
FONDO PIZZOFALCONE



DU CALCUL DES DÉRIVATIONS.

Se trouve

à Paris, chez Levrault, frères, libraires, quai Malaquai,
au coin de la rue des Petits-Augustins.

DU CALCUL DES DÉRIVATIONS;

PAR L. F. A. ARBOGAST,

De l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à Strasbourg.



A STRASBOURG,
DE L'IMPRIMERIE DE LEVRAULT, FRÈRES.

AN VIII (1800).

PRÉFACE.

On s'est proposé dans cet ouvrage d'offrir un genre de calcul qui embrasse la théorie des suites, et dont le calcul différentiel n'est qu'un cas particulier : il fournit des procédés qui abrègent des opérations laborieuses, et des formules qui facilitent les recherches dans des matières compliquées ; il sert à lier entre elles plusieurs branches de l'Analyse : appliqué à une assez grande variété d'objets, il m'a conduit directement, et le plus souvent sans peine, à des résultats, dont plusieurs me paroissent nouveaux, et d'autres présentés sous un aspect nouveau.

Cette méthode de calcul est fondée sur une manière générale de considérer les quantités comme dérivant les unes des autres ; c'est ce qui me l'a fait nommer *Calcul des dérivations*.

Pour se faire une idée des dérivations, on observera que des quantités ou des fonctions qu'on déduit les unes des autres par un procédé uniforme d'opérations, sont des quantités dérivées ; telles sont les différentielles successives. On peut étendre cette idée en considérant des quantités qui dérivent les unes des autres, non en elles-mêmes, mais seulement dans les opérations qui les assemblent et les lient entre elles ; les quantités elles-mêmes étant quelconques, arbitraires, indépendantes. Ainsi, en supposant que de plusieurs lettres différentes la première entre seule dans une fonction, tandis que les deux premières entrent dans la dérivée de cette fonction, que les trois premières entrent par la même loi dans la dérivée de cette dérivée, et ainsi de suite ; on aura des dérivées dans le sens étendu que je leur ai donné. Ici les quantités désignées par les lettres différentes ne dérivent pas les unes des autres ; et les dérivées que je considère sont moins des dérivées de quantités que des dérivées d'opérations, comme l'Algèbre est moins un calcul de quantités que d'opérations arithmétiques ou géométriques à exécuter sur les quantités.

La dérivation est l'opération par laquelle une dérivée est déduite de celle qui la précède ou de la fonction. La méthode des dérivations en

général consiste à saisir la loi qui lie les assemblages de quantités quelconques les uns aux autres, et à se servir de cette loi comme d'un moyen de calcul pour passer de dérivée en dérivée.

Pour former l'algorithme des dérivations, il a fallu introduire des signes nouveaux; j'ai donné une attention particulière à cet objet, persuadé que le secret de la puissance de l'Analyse consiste dans le choix et l'emploi heureux de signes simples et caractéristiques de la chose qu'ils doivent représenter (*). Je me suis prescrit à cet égard les règles suivantes : 1.° de rendre les notations le plus qu'il étoit possible analogues à des notations reçues ; 2.° de ne point introduire de notations inutiles et que j'aurois pu remplacer sans confusion par des notations déjà en usage ; 3.° de les choisir très-simples, en y faisant entrer cependant toutes les variétés qu'exigeoient les différences des opérations.

Après cette idée générale de la méthode, jetons un coup d'œil sur les matières traitées dans cet ouvrage.

Le calcul différentiel donne avec tant de facilité le développement en série des fonctions de binomes, qu'il est naturel de désirer une méthode qui s'étende avec la même facilité à des fonctions de polynomes d'un nombre de termes quelconque. M'étant proposé cette recherche, je fis varier les coëfficiens des termes des polynomes, en les regardant comme dérivant les uns des autres, lors même qu'ils étoient indépendans. Cette considération me conduisit à la méthode générale de développement que j'expose dans les trois premiers articles, qui forment comme la première partie de l'ouvrage.

J'y considère non-seulement les séries et les polynomes simples, c'est-à-dire ceux qui sont ordonnés suivant les puissances d'une seule lettre,

(*) Euler, dans un mémoire intitulé : *Subsidium calculi sinuum*, et imprimé dans le tome V des nouveaux commentaires de Pétersbourg, dit, page 165 : *Ac si quidem ipsius Analysis præstantiam spectamus, eam præcipue soli idoneo quantitates signis denotandi modo tribuendam esse deprehendimus ; quo minus erit mirandum si commoda sinuum in algorithmum introductio tantum lucri attulerit.*

mais encore les séries et les polynomes ordonnés suivant les puissances et les produits de deux, de trois lettres différentes, qu'on peut appeler séries et polynomes doubles, triples. Le sujet des trois premiers articles est la solution du problème général suivant :

Étant proposée une fonction quelconque d'un ou de plusieurs polynomes simples, doubles, triples ; 1.° développer la fonction en une série pareillement simple, ou double, ou triple, en faisant dériver les uns des autres les termes successifs du développement : 2.° dans tous ces cas, trouver immédiatement un terme quelconque du développement, sans le faire dépendre d'aucun des autres termes.

Les coëfficiens dans ces développemens de fonctions de polynomes se présentent composés de deux espèces de quantités ; de celles qui conservent le signe de la fonction ou qui dépendent de la fonction, et dans lesquelles n'entre que le premier terme du polynome ; et de celles qui, dégagées du signe de fonction, demeurent les mêmes pour des fonctions quelconques, et forment des groupes composés uniquement des coëfficiens du polynome, à commencer par celui du second terme. Comme ces quantités dépendent du nombre des termes dont le polynome est formé, j'ai cru pouvoir les désigner par la dénomination de quantités polynomiales.

Les règles pour faire dériver les unes des autres les quantités qui dépendent de la fonction, sont les mêmes que celles du calcul différentiel pour prendre les différentielles successives d'une fonction, la différentielle de la variable étant constante et égale à l'unité ; ainsi on pourra toujours former à part ces quantités.

Les règles de dérivation relativement aux quantités polynomiales donnent des procédés si simples et si expéditifs, qu'en faisant dériver ces quantités les unes des autres, on pourra écrire sans s'arrêter le développement tout réduit, et le pousser aussi loin qu'on voudra ; bien plus, on pourra écrire de même l'expression toute réduite d'un terme quelconque de la série du développement, indépendamment des autres termes.

Les règles pour exécuter les développemens réduits sont des conséquences faciles de formules générales et symétriques qu'une même analyse, diversement appliquée, enchaîne les unes aux autres. Si donc on trouvoit une sorte d'aridité dans les énoncés ou dans l'accumulation des règles, si on les croyoit à charge à la mémoire; on observera qu'il suffit de retrouver les formules, et que, comme les règles en découlent, si on a une fois saisi la manière de les en déduire, on pourra toujours dans chaque cas, sans qu'il soit nécessaire d'avoir retenu la règle, la former de nouveau d'après les formules.

C'est dans ces formules que consiste proprement la solution des problèmes : elles suivent des lois faciles à saisir, ce qui les rend elles-mêmes faciles à retenir ou à retrouver : elles jouissent d'une propriété qui en augmente l'utilité dans les analyses et dans les démonstrations, celle d'être susceptibles de différens degrés de développement, que j'ai distingués par les noms de développemens premier, second, troisième, etc.

Dans l'article premier, où j'ai donné le développement des fonctions d'un polynome simple, je me suis permis plus de détails que dans les articles suivans : j'ai présenté d'abord la méthode telle qu'elle s'est offerte à mes recherches, pour ne la réduire que par la suite à son état le plus simple, parce que cette marche conduisoit naturellement à plusieurs vérités utiles à l'intelligence parfaite de la méthode simplifiée.

Quoique les règles de la méthode simplifiée soient très-faciles, l'analyse qui y mène peut paroître un peu longue. Outre que j'ai donné le moyen d'abréger cette analyse, j'observerai que l'apparence de longueur en doit être imputée en grande partie au soin que j'ai pris de tout démontrer et de ne rien passer de ce qui m'a paru propre à répandre quelque lumière. Je conseille aux jeunes Géomètres qui, dans la lecture de cet ouvrage, seront parvenus jusqu'aux règles, de s'exercer quelque temps à les pratiquer, afin de contracter l'habitude d'écrire sur-le-champ et tout réduit chaque terme du développement avec tout ce qui y entre, pour ne passer qu'ensuite au terme suivant. Si après cet exercice ils reviennent

reviennent sur l'analyse, ils pourront l'embrasser et en saisir l'ensemble comme d'un coup d'œil.

Je n'ai fait aucun usage des combinaisons, que plusieurs Géomètres, LEIBNIZ entre autres, croyoient propres à ces recherches. Je dois remarquer à cette occasion, que la théorie des combinaisons a été beaucoup perfectionnée par le Professeur HINDENBURG, qui s'en est servi pour donner les développemens des fonctions d'un seul polynome simple, et ceux des produits et des produits de puissances de deux ou de plusieurs polynomes simples. L'*Analyse combinatoire* de cet Auteur a été embrassée et cultivée avec ardeur par les Géomètres allemands.

Lorsque je commençai ces recherches, les procédés et les notations du Professeur HINDENBURG ne m'étoient point familières, je ne connoissois guère ses écrits que par le titre ; j'ai suivi mes propres idées. Bien éloigné de vouloir diminuer le mérite des travaux de cet Analyste, si j'en parle, c'est pour témoigner le cas que j'en fais ; ses procédés me paroissent être ce qu'on pouvoit donner de plus achevé sur cette matière, en prenant pour base les combinaisons. Mais je ne puis me dispenser d'observer que les méthodes de dérivation qu'on trouvera ici, malgré quelques points de contact qu'elles peuvent avoir avec les méthodes combinatoires, diffèrent dans les principes, dans les procédés, dans les notations.

Les principes que j'emploie sont plus étendus, les dérivations étant liées avec la théorie générale des fonctions, dont elles forment une branche.

Les procédés que je donne sont plus analytiques. Dans l'Analyse combinatoire le calcul des quantités que j'ai nommées polynomiales, s'exécute par portions détachées ; on y forme d'abord séparément les groupes des lettres, puis séparément leurs coëfficiens numériques. Mes procédés, au contraire, donnent les termes entiers des développemens par un calcul continu, qui fait trouver à la fois les groupes des lettres et les coëfficiens numériques, et qui fait découler les quantités polynomiales les unes des autres, toute réduites, et avec tant de facilité qu'il n'en coûte guère que la peine de les écrire ; on n'a besoin ni de tables

de combinaisons calculées d'avance, ni de moyens en quelque sorte mécaniques ou fondés sur la disposition des cases de certains tableaux, pour former les groupes des quantités polynomiales.

Quant à mes notations, elles sont simples, expressives et en très-petit nombre.

J'observe encore que les problèmes de développemens difficiles et compliqués, savoir ceux qui concernent les fonctions quelconques de deux ou de plusieurs polynomes simples, et ceux sur les fonctions d'un ou de plusieurs polynomes doubles, triples, sont ici résolus pour la première fois; personne que je sache n'ayant encore donné de méthode pour former dans ces cas les développemens complets et réduits. Ces matières occupent la fin de l'article second et tout l'article troisième, et elles exigeoient, si je ne m'abuse, quelque attention et quelque adresse.

Les articles qui suivent le troisième sont destinés principalement à offrir des applications et des usages des formules et des règles trouvées dans les trois premiers. Ces formules, d'un côté, fournissent de nouveaux moyens de résoudre différens problèmes, qui ne pourroient être résolus qu'avec plus de difficulté par d'autres voies; de l'autre côté, elles servent à rapprocher et à réunir sous un même point de vue des solutions connues, mais fondées sur des principes différens et présentées sous diverses formes.

L'article quatrième contient l'application des méthodes et des formules de dérivation à l'expression du terme général des séries récurrentes, dont on connoît l'échelle de relation.

Les séries récurrentes simples n'ont point présenté de difficulté. De l'équation de relation j'ai déduit la fraction génératrice de la série, ensuite, de cette fraction, le terme général. Cette analyse, qui est la plus rapprochée de la marche ordinaire, m'a paru la plus féconde en conséquences. Les dérivations donnent des formules et des développemens pour le terme général, soit qu'on laisse le dénominateur de la fraction génératrice tel

qu'on le déduit de l'équation de relation, soit qu'on le décompose en ses facteurs binomes.

Les séries récurrentes doubles et triples ont présenté, surtout dans la détermination de leur fraction génératrice, des difficultés que j'ai au moins fait sentir, si je ne les ai pas surmontées : aussi-bien je ne donne la méthode pour les séries récurrentes doubles que comme un essai que d'autres efforts pourront porter à plus de perfection; dans l'état où je l'ai laissée, elle a donné des solutions, souvent assez faciles, de plusieurs questions relatives aux séries récurrentes doubles, que LAGRANGE et LAPLACE ont résolues par d'autres voies.

LE retour général des séries, traité par les dérivations, qui fait l'objet de l'article cinquième, est une des matières dont je me suis occupé avec le plus de plaisir et peut-être de succès. J'ose espérer qu'on la trouvera présentée avec plus de généralité et de facilité qu'on n'y en avoit mis jusqu'ici; qu'on jugera dignes d'attention le théorème très-étendu que j'ai placé à l'entrée de l'article, sa démonstration, et surtout la manière dont j'en ai fait découler les différentes propositions sur le retour des fonctions et des séries simples, propositions parmi lesquelles se trouvent les plus beaux théorèmes qu'on connoisse sur ce sujet; et qu'on remarquera la facilité avec laquelle les développemens s'effectuent par les règles de dérivation.

Passant de là au retour des séries doubles, j'ai donné des solutions nouvelles des cas de LEIBNIZ, COUSIN, LAMBERT; des théorèmes fort généraux; des formules remarquables par leur symétrie, dont quelques-unes peuvent être utiles dans le calcul différentiel.

Revenant ensuite aux séries simples, j'ai fait voir comment le rapprochement de quelques formules et de divers moyens d'arriver au retour des séries, conduit à des théorèmes et à des observations sur les dérivations. Je n'ai pu toucher que légèrement à l'usage qu'on peut faire des formules sur le retour des séries pour calculer par approximation les racines des équations; et je n'ai pu entrer dans l'examen de la convergence de ces

formules : mon but principal étoit de considérer le retour des séries sous le point de vue des transformations.

Après avoir considéré les dérivations dans les opérations seulement, j'ai supposé, dans l'article sixième, que les quantités variables dérivent elles-mêmes les unes des autres; ce qui a lieu dans le calcul différentiel et intégral.

Les formules et les règles des dérivations générales, trouvées précédemment, servent à faciliter la pratique du calcul différentiel, principalement dans les cas où les différentielles des variables sont variables elles-mêmes. J'en ai tiré des règles abrégées, tant pour déduire les unes des autres les différentielles successives, que pour calculer immédiatement la différentielle d'un ordre quelconque d'une fonction à une seule variable, lorsque les différentielles de cette variable sont elles-mêmes variables. J'en ai tiré ensuite, pour les différentielles des quantités et des équations à plusieurs variables, des formules simples, et faciles à développer ultérieurement; parmi ces dernières je crois pouvoir faire remarquer des expressions générales des rapports différentiels provenant d'une équation à deux variables, sans substitutions successives. J'ai donné de plus des formules, dont la loi est facile à saisir, pour des cas aux différentielles partielles.

En rendant négatifs les indices, j'ai étendu aux intégrales les formules de dérivation; j'ai remarqué et prouvé par des exemples, que le calcul des dérivations en général a son inverse, tout de même que le calcul différentiel a pour inverse le calcul intégral.

J'applique, dans cet article, aux différentielles, aux dérivées générales, aux relations entre les différentielles et les différences (finies), une méthode de calcul qu'on peut nommer *méthode de séparation des échelles d'opérations :* elle donne le moyen de présenter sous une forme très-simple des formules compliquées et de parvenir avec une extrême facilité à des résultats importans. Considérée généralement, cette méthode consiste à détacher de la fonction des variables, lorsque cela est possible,

les

les signes d'opération qui affectent cette fonction, et à traiter l'expression formée de ces signes mêlés avec des quantités quelconques, expression que j'ai nommée *échelle d'opérations*, à la traiter, dis-je, tout de même que si les signes d'opérations qui y entrent étoient des quantités ; puis à multiplier le résultat par la fonction.

Cette méthode me paroît porter au plus haut degré de simplicité, de clarté et de généralité, l'espèce particulière de calcul qui a pris naissance dans l'analogie observée par Leibniz entre les puissances positives et les différentielles, et entre les puissances négatives et les intégrales ; calcul que Lagrange a le premier mis dans tout son jour et étendu considérablement dans les Mémoires de Berlin pour 1772. La méthode de séparation des échelles a l'avantage de donner immédiatement des résultats dans lesquels il n'y a plus rien à changer, où il n'est plus nécessaire, ni d'appliquer aux signes de différentiation les exposans des puissances, ni de faire passer les indices d'ordre à l'état d'exposans de puissances pendant que l'on calcule, et de changer dans le résultat ces exposans en indices.

Cette méthode des échelles me paroît directe, et ses procédés portent avec eux leur démonstration ; elle m'a donné avec une grande facilité des formules compliquées et même des théories entières du calcul différentiel, auxquelles on n'avoit pas encore songé d'appliquer le calcul fondé sur les analogies, dont il vient d'être question. Je donne une partie de ces applications, le défaut d'espace m'en a fait supprimer le reste.

Il m'a paru résulter de tout cela qu'on abrégeroit d'une manière remarquable un traité de calcul différentiel, si dès le commencement on y réunissoit aux règles et aux théorèmes ordinaires la méthode des dérivations et celle de la séparation des échelles.

L'Article septième rassemble, sous trois divisions, plusieurs cas où les suites ne sont plus ordonnées suivant les dimensions d'une ou de plusieurs lettres, mais où elles procèdent suivant d'autres lois.

La première division contient l'application des formules de dérivation au développement des fonctions de polynomes qui renferment des sinus et des cosinus, en suites ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un même angle. Les dérivations fournissent le moyen de traiter avec généralité et facilité ce sujet utile dans l'Astronomie.

En traitant, dans la seconde division, des produits de facteurs en progression arithmétique, on n'a pas eu pour but d'étendre la théorie de ces produits, mais de la ramener à la théorie et aux notations des dérivations.

La troisième division offre d'abord l'application de la séparation des échelles à la méthode directe et inverse des différences. J'ai lieu d'espérer que le lecteur sera content de voir avec combien de facilité les théorèmes généraux et des formules importantes de la méthode des différences découlent de principes aussi simples. En associant ensuite la méthode des dérivations à la séparation des échelles, on obtient encore d'une manière simple des formules fort générales, relatives à la transformation, à la sommation, à l'interpolation des suites; parmi lesquelles se trouvent des formules que LAPLACE a déduites par une analyse différente du rapport qu'il a observé entre les fonctions génératrices et leurs variables correspondantes, rapport qui est le fondement de son mémoire sur les suites, imprimé dans le recueil de l'Académie des sciences de Paris pour 1779.

De là on peut encore tirer la conclusion qu'en réunissant les méthodes de dérivation et de séparation des échelles, on pourroit apporter des simplifications importantes à un traité de la méthode directe et inverse des différences.

TELLES sont les matières traitées dans cet ouvrage; elles y sont liées entre elles par une méthode générale et uniforme, qui invite à de nouvelles applications, en même temps qu'elle abrège considérablement les calculs, dont la longueur, quelquefois excessive, est un des principaux obstacles aux progrès de l'Analyse. En rapprochant ainsi les unes des autres plusieurs théories importantes et des solutions fondées sur des

principes et des méthodes diverses, j'ai surtout été jaloux, pour mieux faire sentir l'utilité du calcul des dérivations, d'attacher à ce calcul plusieurs des plus élégantes formules dues à la sagacité des grands Géomètres LAGRANGE et LAPLACE. « Ces sortes de rapprochemens, dit » LAGRANGE, sont toujours instructifs, et ne peuvent qu'être très-utiles » aux progrès de l'Analyse ; on peut même dire qu'ils y sont nécessaires » dans l'état où elle est aujourd'hui ; car, à mesure que cette science » s'étend et s'enrichit de nouvelles méthodes, elle en devient aussi plus » compliquée ; et l'on ne sauroit la simplifier qu'en généralisant et en » réduisant tout à la fois les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces » avantages. »

Si quelque chose peut me faire croire que l'objet de cet ouvrage n'est pas indigne de l'attention des Géomètres, c'est le désir que témoigne un des meilleurs Analystes de l'Angleterre, le professeur WARING, d'une méthode dont le but seroit pareil à celui de la méthode des dérivations, et qu'il désigne sous le nom de *méthode de déduction directe et inverse (methodus deductionis et reductionis)*; mais il se contente d'en faire mention, sans donner aucun moyen pour y parvenir. C'est par ce vœu qu'il termine ses *Meditationes analyticæ, Cantabrigiæ*, 1785, ouvrage considérable sur les séries, et le calcul différentiel et intégral.

LE présent ouvrage est la suite de mes recherches sur la vraie théorie du calcul différentiel, que je finis au commencement de l'année 1789.

On peut distinguer deux sortes de principes dans le calcul différentiel. Les uns se rapportent au passage des quantités discrètes aux quantités continues, c'est-à-dire qu'ils concernent ce qu'on nomme la méthode d'exhaustion des Anciens, ou celle des limites ou des infiniment-petits : les autres concernent les règles pratiques pour former les différentielles successives ; ceux-ci tiennent aux dérivations. J'ai traité des premiers dans un mémoire envoyé, au printemps de 1789, à l'Académie des sciences de Paris, et auquel j'ai donné le titre d'*Essai sur de nouveaux principes de Calcul différentiel et intégral, indépendans de la théorie des infi-*

niment-petits et de celle des limites (*). Ce travail me fit faire des réflexions sur les principes de la seconde sorte ; j'en vis naître dès-lors les premiers germes des idées et des méthodes qui, développées et étendues, font la matière du présent ouvrage. Comme LAGRANGE a bien voulu faire mention de mon premier travail dans sa belle théorie des fonctions analytiques, et que LACROIX l'a cité à la page 370 du premier volume de son traité de calcul différentiel et intégral, sans qu'il ait été imprimé

(*) Ce mémoire étant encore manuscrit, on me permettra d'indiquer les principes qui y sont répandus, et sur lesquels je me suis fondé pour donner à la théorie du calcul différentiel la rigueur et l'évidence de l'Algèbre ordinaire.

I. *Si l'on a une équation entre des quantités qui dépendent d'une variable, et d'autres qui n'en dépendent pas et demeurent toujours les mêmes ; et que l'équation ait lieu pour des valeurs quelconques de la variable ; les termes indépendans et les termes dépendans de cette variable seront séparément égaux entre eux.*

Ce principe, qu'on peut appeler principe de la séparation des quantités indépendantes, est le fondement de la méthode des coëfficiens indéterminés.

II. *Si l'on a une fonction quelconque de x, qu'on y mette $x+\Delta x$ à la place de x, et qu'on la développe en une série ordonnée suivant les puissances de Δx, de cette forme :*

$$\varphi x + p\Delta x + \frac{q}{1.2}(\Delta x)^2 + \frac{r}{1.2.3}(\Delta x)^3 + \frac{s}{1.2.3.4}(\Delta x)^4 + etc.\,;$$

les coëfficiens p, q, r, s, etc. seront des fonctions de x, qui dérivent les unes des autres par la même loi et le même procédé par lesquels p dérive de φx.

Ce principe, ainsi présenté, est dû à LAGRANGE, qui l'a publié dans les Mémoires de Berlin pour 1772.

Si l'on fait abstraction des dénominateurs numériques ; les second, troisième, quatrième termes de la série précédente seront les différentielles première, seconde, troisième de la fonction φx. Ainsi les différentielles sont des portions de différens ordres de la différence (finie).

III. *Toute fonction de $x+\Delta x$ peut toujours être développée en une série qui procède suivant les puissances entières de Δx, si l'on suppose à x une valeur générale.*

jusqu'à présent ; on pourroit être tenté de confondre les deux ouvrages. J'avertis donc qu'ils n'ont entre eux rien de commun ni pour le fond ni pour les détails. Je prie les Géomètres de recevoir avec indulgence celui que je publie présentement, et de pardonner, à raison de la complication des matières que j'ai tâché de simplifier, les fautes qui auroient pu m'échapper.

Cet ouvrage est annoncé depuis long-temps, et il y a plus long-temps

---

Il y a des fonctions où, pour certaines valeurs particulières de x, les coëfficiens de la série deviennent infinis, et partant le développement en série devient impossible ; mais ces cas font exception au calcul différentiel, qui se trouve alors en défaut.

IV. *Dans le développement de $\phi(x+\Delta x)$ on peut toujours prendre pour Δx une valeur finie et assignable, assez petite pour qu'un des termes quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.*

Je n'ai jamais fait évanouir aucun terme de la série, aucune différentielle : quelquefois je n'ai pas considéré la fonction comme développée en entier ; j'en ai arrêté le développement après un petit nombre de termes, mais en tenant toujours compte du reste.

V. *Soit une courbe quelconque, dont l'ordonnée y', qui répond à l'abscisse $x+\Delta x$, soit représentée par la série*

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2.dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}(\Delta x)^3 + etc. ;$$

qu'on développe pareillement l'ordonnée u' d'une autre courbe, dont l'équation, donnée et rapportée à la même ligne des abscisses, contienne un nombre n de constantes ; l'abscisse correspondante à u' étant $t+\Delta t$, et $\Delta t = \Delta x$, on aura

$$u' = u + \frac{du}{dt}\Delta x + \frac{d^2u}{1.2.dt^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dt^3}(\Delta x)^3 + etc. :$$

si l'on détermine les n constantes de la dernière courbe par les équations

$$u = y,\ \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2},\ etc.,\ \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} ;$$

cette courbe ainsi déterminée sera de toutes les courbes de même nature celle dont le cours approchera le plus du cours de la première, de manière qu'il sera impossible de faire passer entre ces deux cours celui d'une autre courbe de même nature que la seconde.

En particulier ; en faisant $u = y$, la seconde courbe et la première passeront par

encore que l'impression en est commencée ; elle a été interrompue plusieurs fois par différentes circonstances. J'espère qu'on aura lieu d'être content de l'exactitude de l'édition ; et à cet égard je dois témoigner ma reconnoissance à FRANÇAIS, Professeur de Mathématiques à Colmar, qui a pris le soin de vérifier mes calculs et de m'aider dans la correction des épreuves.

---

un même point ; en faisant $u = y$, et $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt}$, la seconde courbe sera tangente à la première ; en faisant $u = y$, $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx}$, et $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, la seconde courbe sera osculatrice de la première ; de sorte que le contact deviendra d'autant plus intime qu'on égalera entre eux un plus grand nombre de termes dans les deux séries.

De là découlent, comme cas particuliers, les formules des soustangentes, sousnormales, rayons osculateurs, celles pour les points d'inflexion, pour les développées, etc.

VI. *Si l'on a trois expressions ordonnées suivant les puissances de x ou de Δx,*

$$U = a + b.\Delta x + c(\Delta x)^2 + d(\Delta x)^3 + etc.$$
$$V = a' + b'.\Delta x + c'(\Delta x)^2 + d'(\Delta x)^3 + etc.$$
$$W = a'' + b''.\Delta x + c''(\Delta x)^2 + d''(\Delta x)^3 + etc. ;$$

et que, sans connoître la valeur de V, on sache qu'elle est intermédiaire entre celles de U et de W, c'est-à-dire plus grande que l'une et moindre que l'autre ; si les deux séries extrêmes ont un certain nombre de leurs premiers termes égaux entre eux, la série de V aura le même nombre de ses premiers termes égaux aux termes correspondans des autres séries. Si l'on a, par exemple, $a = a''$, $b = b''$; on aura aussi $a' = a$, $b' = b$.

On peut faire un grand usage de ce principe : il m'a donné d'une manière rigoureuse la différentielle de l'aire et celle de l'arc d'une courbe quelconque, tant pour le cas des ordonnées parallèles, que pour celui des ordonnées qui partent d'un même point, etc.

Il me semble que j'ai fait voir le premier, d'une manière développée, qu'au moyen de la réunion de ces principes, l'on peut traiter le calcul différentiel et intégral, et notamment ses applications aux courbes, sans rien faire évanouir ; et c'est en cela que la méthode des anciens Géomètres se distingue principalement de toutes celles que postérieurement on a cherché à y substituer.

TABLE.

ARTICLE PREMIER.

Méthode facile et générale pour développer en séries des fonctions quelconques de polynome, et pour calculer un terme quelconque du développement indépendamment de tous les autres.

ARTICLE SECOND.

Développemens en séries des fonctions de deux ou de plusieurs polynomes ordonnés suivant les puissances d'une même lettre.

ARTICLE TROISIÈME.

Développemens des fonctions d'un ou de plusieurs polynomes ordonnés suivant les puissances et les produits de deux ou de plusieurs lettres différentes, en séries ordonnées de la même manière.

seul

ARTICLE QUATRIÈME.

ARTICLE CINQUIÈME.

Applications du calcul des dérivations au retour général des séries.

ARTICLE SIXIÈME.

Usages des dérivations dans le calcul différentiel.

ARTICLE SEPTIÈME.

Applications du calcul des dérivations à d'autres branches de la théorie des suites.

TABLEAU DES NOTATIONS PRINCIPALES, *employées dans cet ouvrage, avec l'indication des numéros où l'on en fixe la signification.*

Comme on a été obligé d'introduire quelques signes nouveaux, il peut arriver qu'en voulant prendre une formule quelconque de cet ouvrage, l'on ignore ou l'on ait oublié la signification des notations qui y entrent; l'objet de ce tableau est de faire connoître ou de faire retrouver cette signification, sans perte de temps.

D, signe des dérivations . . . . n.° 2.

D, $\mathrm{D}.$, différence entre D sans point et avec point . . . . n.os 3 et 9.

$\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.$, ... n.° 39.

$\mathrm{D}^{m,n}$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^{m,n}$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^{l,m,n}.$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^{l,,}.\underset{c}{\mathrm{D}}^{,m,}.\underset{c}{\mathrm{D}}^{,,n}.$, ... n.° 111.

$\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^{n}.$, ... n.° 130.

${}^{\prime n}\underset{c}{\mathrm{D}}^{0}.$, ${}^{\prime n}\underset{c}{\mathrm{D}}^{0}.\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.$, ... n.° 153.

$\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^{n}.\underset{c}{\mathrm{D}}''^{r}.$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^{m}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^{n}.\underset{c}{\mathrm{D}}''^{r}.\underset{c}{\mathrm{D}}'''^{s}.$, ... n.os 161 et 166.

s, s^{n}, $\mathrm{s}^{,1}$, $\mathrm{s}^{1,}$, au lieu de D^{-1}, D^{-n}, $\mathrm{D}^{,-1}$, $\mathrm{D}^{-1,}$, ... n.os 36 et 391.

$\mathrm{D}^{n}.1^{m:r.}$, $\mathrm{D}^{n}.1^{m:-r.}$, ... n.° 422.

d, signe ordinaire de la différentiation, ... n.os 1 et 352.

$\underset{c}{\mathrm{d}}^{n}$, ... n.° 352.

$\mathrm{d}^{1,}$, $\mathrm{d}^{,1}$, $\mathrm{d}^{,,1}$, ... n.° 371.

$\int = \mathrm{d}^{-1}$, signe ordinaire de l'intégration; $\int^{n} = \mathrm{d}^{-n}$, ... n.° 384.

∂, $\underset{c}{\partial}^{n}$, $\partial.$, $\underset{c}{\partial}^{n}.$, ... n.° 352.

$\partial^{1,}$, $\partial^{,1}$, $\partial^{,,1}$, $\partial^{1,}.$, $\partial^{,1}.$, $\partial^{,,1}.$, ... n.° 376.

f, f^{n}, $f.$, $f^{n}.$, au lieu de ∂^{-1}, ∂^{-n}, $\partial^{-1}.$, $\partial^{-n}.$, ... n.° 384.

Δ, Σ, signes ordinaires des opérations qui donnent la différence et l'intégrale-somme.

$\Delta^{1,}$, $\Delta^{,1}$, ... n.° 409.

E, E^{n}, signes des états variés, ... n.° 442.

$\mathrm{E}^{1,}$, $\mathrm{E}^{,1}$, $\mathrm{E}^{,,1}$, ... n.° 444.

Lorsqu'on a employé des lettres françoises comme caractéristiques, on les a presque toujours prises de caractère romain, pour les distinguer des lettres de quantités, qu'on a mises en italique.

Quelquefois, lorsqu'on avoit plusieurs séries différentes, on a désigné par des lettres allemandes les coëfficiens de quelques-unes d'entr'elles, afin de donner aux calculs plus de symétrie et de simplicité; mais on n'a jamais employé ces lettres comme signes d'opération ou comme caractéristiques : on a cru que les lecteurs françois étoient suffisamment familiarisés avec les lettres allemandes par l'usage qu'en a fait EULER dans ses principaux ouvrages, tant latins que françois (voyez entre autres les Mémoires de Berlin, pour 1760). Au reste, voici les alphabets allemand et françois mis en parallèle, pour ceux qui seroient dans le cas d'y recourir.

$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathfrak{f}$,	$\mathfrak{g}$,	$\mathfrak{h}$,	$\mathfrak{i}$,	$\mathfrak{k}$,	$\mathfrak{l}$,	$\mathfrak{m}$,	$\mathfrak{n}$,
a,	*b*,	*c*,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*h*,	*i*,	*k*,	*l*,	*m*,	*n*,
$\mathfrak{o}$,	$\mathfrak{p}$,	$\mathfrak{q}$,	$\mathfrak{r}$,	$\mathfrak{s}$,	$\mathfrak{t}$,	$\mathfrak{u}$,	$\mathfrak{v}$,	$\mathfrak{w}$,	$\mathfrak{x}$,	$\mathfrak{y}$,	$\mathfrak{z}$;	
o,	*p*,	*q*,	*r*,	*s*,	*t*,	*u*,	*v*,	*w*,	*x*,	*y*,	*z*;	
$\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{D}$,	$\mathfrak{E}$,	$\mathfrak{F}$,	$\mathfrak{G}$,	$\mathfrak{H}$,	$\mathfrak{I}$,	$\mathfrak{K}$,	$\mathfrak{L}$,	$\mathfrak{M}$,	$\mathfrak{N}$,
A,	*B*,	*C*,	*D*,	*E*,	*F*,	*G*,	*H*,	*I*,	*K*,	*L*,	*M*,	*N*,
$\mathfrak{O}$,	$\mathfrak{P}$,	$\mathfrak{Q}$,	$\mathfrak{R}$,	$\mathfrak{S}$,	$\mathfrak{T}$,	$\mathfrak{U}$,	$\mathfrak{V}$,	$\mathfrak{W}$,	$\mathfrak{X}$,	$\mathfrak{Y}$,	$\mathfrak{Z}$.	
O,	*P*,	*Q*,	*R*,	*S*,	*T*,	*U*,	*V*,	*W*,	*X*,	*Y*,	*Z*.	

FAUTES A CORRIGER.

Page 23, *ligne* 5, car il n'y a que ce terme, *lisez* car il n'y a qu'un terme pareil.

Page 40, *ligne* 4 *en remontant*, de D qui affecte γ, *lisez* du D avant γ.

Page 44, *lignes* 6 et 7, *mettez* + etc. *à la fin des premiers membres.*

Même page, *ligne* 26, $\beta^3\gamma^2\delta$, *lisez* $60\beta^3\gamma^2\delta$.

Page 66, *ligne* 5, $\mathfrak{p}^2\phi\alpha$, *lisez* $\mathfrak{p}^2\phi\beta$.

Page 137, *ligne* 13, $c^{\prime\prime\prime}$, *lisez* $c^{\prime\prime\prime\prime}$.

Page 140, *ligne* 10, $\phi\alpha$, *lisez* ϕa.

Page 208, *ligne* 4 *en remontant*, $\alpha\delta^{\prime-1}$, *lisez* $a\delta^{\prime-1}$.

Page 230, *ligne* 2 *du n.°* 255, Bx^4, *lisez*. Ex^4.

Page 312, *ligne* 8 *en remontant*, dx^n, *lisez* $\mathrm{d}x^n$.

DU CALCUL
DES DÉRIVATIONS.

ARTICLE PREMIER.

Méthode facile et générale pour développer en séries des fonctions quelconques de polynomes, et pour calculer un terme quelconque du développement indépendamment de tous les autres.

Je suivrai dans l'exposition de ces recherches la voie même que j'ai suivie en les faisant; et je ne réduirai la méthode que graduellement à l'état le plus simple.

§. I.er

Exposition et premier état de la méthode.



1. Soit $F(\alpha + x)$ une fonction quelconque du binome $\alpha + x$: on sait qu'on peut développer cette fonction en une série qui procède suivant les puissances de x, de cette forme

$$F(\alpha + x) = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \frac{e}{1.2.3.4}x^4 + \text{etc.} : \quad ...(1)$$

on sait aussi que $a = F\alpha$; que b dérive de a ou de $F\alpha$, c de b, d de c, etc. par la même loi; de sorte que, si on connoît la manière de faire dériver b de a ou $F\alpha$, on saura aussi faire dériver c de b, d de c, et ainsi de suite.

2. En désignant par D l'opération qu'il faut faire sur $F\alpha$ pour en déduire b, il est clair qu'on aura $b = \text{D}F\alpha$, $c = \text{DD}F\alpha = \text{D}^2F\alpha$, $d = \text{D}^3F\alpha$, etc. Ainsi la série précédente (1) peut aussi s'exprimer de cette manière :

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{\text{D}F\alpha}{1}x + \frac{\text{D}^2F\alpha}{1.2}x^2 + \frac{\text{D}^3F\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} \quad .....(2)$$

Je prends pour la caractéristique des dérivations qu'on considère ici, la petite capitale D, de caractère romain, parce qu'il est nécessaire de distinguer ces dérivations des différentiations auxquelles LEIBNIZ a consacré le signe d.

3. On sait de plus, par le calcul différentiel, que, si l'on regarde α comme la variable, on a

$$\text{D}F\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha}, \quad \text{D}^2F\alpha = \frac{d^2F\alpha}{(d\alpha)^2}, \quad \text{D}^3F\alpha = \frac{d^3F\alpha}{(d\alpha)^3}, \quad \text{etc.},$$

où $d\alpha$ est constante et arbitraire; on peut donc faire $d\alpha = 1$, et dans cette supposition on a simplement $\text{D}F\alpha = dF\alpha$, $\text{D}^2F\alpha = d^2F\alpha$, $\text{D}^3F\alpha = d^3F\alpha$, etc., et les règles des dérivations sont les mêmes que celles des différentiations.

Soit, par exemple, $F(\alpha+x) = \log(\alpha+x)$; on a $F\alpha = \log\alpha$, d'où, en faisant $d\alpha = 1$, $d^2\alpha = 0$, on tire par dérivation

$\text{D}\log\alpha = \alpha^{-1}.d\alpha = \alpha^{-1}$, $\text{D}^2\log\alpha = \text{D}\alpha^{-1} = -1.\alpha^{-2}$, $\text{D}^3\log\alpha = \text{D}(-1.\alpha^{-2}) = 1.2.\alpha^{-3}$, $\text{D}^4\log\alpha = \text{D}(1.2.\alpha^{-3}) = -1.2.3.\alpha^{-4}$, etc. Donc

$$\log(\alpha+x) = \log\alpha + \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{2\alpha^2}x^2 + \frac{1}{3\alpha^3}x^3 - \frac{1}{4\alpha^4}x^4 + \text{etc.}$$

Si l'on avoit à développer $F(\alpha+\beta x)$, on n'auroit qu'à changer dans (2) x en βx, et en détachant les β des x, on trouveroit

$$F(\alpha+\beta x) = F\alpha + \frac{\text{D}F\alpha.\beta}{1}x + \frac{\text{D}^2F\alpha.\beta^2}{1.2}x^2 + \frac{\text{D}^3F\alpha.\beta^3}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} \quad \ldots(3)$$

Mais on peut aussi regarder les β de ce développement comme provenant des opérations faites sur $F\alpha$. En effet, supposons que α soit une fonction fa d'une variable a, telle que $dfa = \beta$ et $da = 1$; alors $\text{D}F\alpha$ devient $\frac{dF\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{dfa}{da} = \frac{dF\alpha}{d\alpha}\cdot dfa = \text{D}F\alpha.\text{D}fa$. Comme ici $\text{D}fa = dfa$ doit être $= \beta$, et $\text{D}^2fa = d^2fa = 0$, il suffit de supposer $fa = \beta a$, β étant constante.

Pour distinguer cet état de $\text{D}F\alpha$ du premier, où $d\alpha = 1$ et $\text{D}\alpha = 1$, nous mettrons un point après le D, nous écrirons $\text{D}.F\alpha$ pour $\text{D}F\alpha.\beta$, et nous dirons que $\text{D}.F\alpha$ est la dérivée de $F\alpha$, α variant et ayant $\text{D}.\alpha = \beta = dfa$ pour dérivée; tandis que $\text{D}F\alpha$ sans point après D est la dérivée de $F\alpha$, α variant et ayant $\text{D}\alpha = 1 = d\alpha$ pour sa dérivée.

Si l'on fait sur $\text{D}.F\alpha = \text{D}F\alpha.\text{D}.\alpha = \text{D}F\alpha.\beta$ la même opération qu'on a faite sur $F\alpha$; on aura, $\text{D}.\alpha = \beta$ étant invariable, $\text{D}^2.F\alpha = \text{D}.(\text{D}F\alpha.\text{D}.\alpha) = \text{D}^2F\alpha.(\text{D}.\alpha)^2 = \text{D}^2F\alpha.\beta^2$; ensuite $\text{D}^3.F\alpha = \text{D}.\{\text{D}^2F\alpha.(\text{D}.\alpha)^2\} = \text{D}^3F\alpha.(\text{D}.\alpha)^3$

$= \text{D}^3 F\alpha . \mathcal{C}^3$, et ainsi de suite ; de sorte que la série (3) s'exprime aussi de la manière suivante :

$$F(\alpha + \mathcal{C}x) = F\alpha + \frac{\text{D}.F\alpha}{1}x + \frac{\text{D}^2.F\alpha}{1.2}x^2 + \frac{\text{D}^3.F\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} \quad \ldots(4)$$

En opérant ainsi sur $\log\alpha$, par exemple, on trouvera

$$\log(\alpha + \mathcal{C}x) = \log\alpha + \frac{\mathcal{C}}{\alpha}x - \frac{\mathcal{C}^2}{2\alpha^2}x^2 + \frac{\mathcal{C}^3}{3\alpha^3}x^3 - \frac{\mathcal{C}^4}{4\alpha^4}x^4 + \text{etc.}$$

4. Si l'on compare cette manière de développer les fonctions des binomes avec celle qui est en usage dans le calcul différentiel, on verra qu'elle en diffère en ce que nous prenons α pour la variable et que nous mettons pour $\text{D}.\alpha$ le coëfficient que x a dans le binome $\alpha + \mathcal{C}x$.

5. Pour passer des fonctions des binomes à celles des polynomes, prenons de chaque membre de (4) la fonction φ ; nous aurons, d'un côté,

$$\varphi F(\alpha+\mathcal{C}x) = \varphi\left(F\alpha + \frac{\text{D}.F\alpha}{1}x + \frac{\text{D}^2.F\alpha}{1.2}x^2 + \frac{\text{D}^3.F\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}\right);$$

de l'autre, en mettant dans (4) φF au lieu de F,

$$\varphi F(\alpha+\mathcal{C}x) = \varphi F\alpha + \frac{\text{D}.\varphi F\alpha}{1}x + \frac{\text{D}^2.\varphi F\alpha}{1.2}x^2 + \frac{\text{D}^3.\varphi F\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Donc, en faisant $F\alpha = a$, $\text{D}.F\alpha = \text{D}.a$, $\text{D}^2F\alpha = \text{D}^2.a$, etc., on a

$$\varphi\left(a + \frac{\text{D}.a}{1}x + \frac{\text{D}^2.a}{1.2}x^2 + \text{etc.}\right) = \varphi a + \frac{\text{D}.\varphi a}{1}x + \frac{\text{D}^2.\varphi a}{1.2}x^2 + \text{etc.} \quad \ldots(5)$$

Il s'agit de trouver les développemens de $\text{D}.\varphi a$, $\text{D}^2.\varphi a$, $\text{D}^3.\varphi a$, etc.

Il est visible d'abord, par le n.° 3, que $\text{D}.\varphi a = \text{D}\varphi a.\text{D}.a$; mais ici, $\text{D}^2.a$, $\text{D}^3.a$, etc. n'étant pas zéro, $\text{D}^2.\varphi a$, $\text{D}^3.\varphi a$, etc. ne sont plus égaux à $\text{D}^2\varphi a.(\text{D}.a)^2$, $\text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^3$, etc., et il est clair qu'il faut y ajouter les quantités qui proviennent de $\text{D}.a$, $\text{D}^2.a$, etc. variables.

Pour trouver $\text{D}^2.\varphi a$, il faut faire sur $\text{D}.\varphi a = \text{D}\varphi a.\text{D}.a$ la même opération qu'on a faite sur φa pour en déduire $\text{D}.\varphi a$, mais en considérant $\text{D}.a$ comme ayant $\text{D}^2.a$ pour dérivée : or les signes D et d étant ici sujets aux mêmes règles, on aura $\text{D}^2.\varphi a = \text{D}.(\text{D}\varphi a.\text{D}.a) = \text{D}\varphi a \times \text{D}.(\text{D}.a) + \text{D}.(\text{D}\varphi a) \times \text{D}.a = \text{D}\varphi a.\text{D}^2.a + \text{D}^2\varphi a.(\text{D}.a)^2$; on aura pareillement $\text{D}^3.\varphi a = \text{D}.(\text{D}^2.\varphi a) = \text{D}.\{\text{D}\varphi a.\text{D}^2.a + \text{D}^2\varphi a.(\text{D}.a)^2\} = \text{D}.\varphi a.\text{D}^3.a + \text{D}^2\varphi a.\text{D}.a.\text{D}^2.a + \text{D}^2\varphi a.\,2\text{D}.a.\text{D}^2.a + \text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^3 = \text{D}\varphi a.\text{D}^3.a + 3\text{D}^2\varphi a.\text{D}.a.\text{D}^2.a + \text{D}^3\varphi a.(\text{D}.a)^3$; et ainsi de suite. On voit donc que les coëfficiens des différentes puissances

de x, dans le développement du second membre de (5), dérivent les uns des autres et du premier terme φa, toujours par une même loi uniforme, et qui est encore la même au fond que celle par laquelle se forment les termes successifs du développement de $F(\alpha + x)$; il n'y a de différence qu'en ce que dans $F(\alpha + x)$ la dérivée $D\alpha$ est $= 1$, tandis qu'ici la dérivée $D.a$ est variable et a elle-même $D^2.a$ pour dérivée, et ainsi de suite.

6. Mais si le polynome $a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 +$ etc. est tel que b ne dérive pas de a, ni c de b, ni d de c, etc.; a, b, c, d, etc. étant des quantités quelconques, qui ne sont liées entre elles par aucune loi; alors on n'a qu'à feindre que a, b, c, d, etc. dérivent les unes des autres, et l'on aura encore

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}) = \\ \varphi a + D.\varphi a.x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.},\end{array}\right\} \quad \ldots.(6)$$

pourvu qu'après les dérivations effectuées on change $D.a$ en b, $D^2.a$ en c, $D^3.a$ en d, etc.

En effet, avant la substitution de b à la place de $D.a$, de c à la place de $D^2.a$, etc., le développement du second membre de (6) coïncide avec celui du second membre de (5); or, après le développement tout l'effet de la dépendance des quantités $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$, etc. est produit, et on peut alors les considérer comme indépendantes; c'est-à-dire qu'on peut mettre après les dérivations dans les deux membres de (5) b au lieu de $D.a$, c au lieu de $D^2.a$, etc. On a donc le théorème suivant :

Pour développer la fonction

$$\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}),$$

a, b, c, d, etc. étant quelconques, en une série de cette forme

$$A + B.x + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{A_n}{1.2.3\ldots.n}x^n + \text{etc.};$$

on aura $A = \varphi a$, $B = D.\varphi a$, $C = D^2.\varphi a$, et généralement $A_n = D^n.\varphi a$, en faisant varier $D.a$ dans les dérivations et mettant b pour $D.a$, c pour $D^2.a$, d pour $D^3.a$, etc. après les dérivations effectuées, ou en faisant successivement dans les dérivations $D.a = b$, $D.b = c$, $D.c = d$, etc.

7. Les

7. Les polynomes se présentent rarement sous la forme

$$a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, avec les coëfficiens numériques $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, $\frac{1}{1.2.3.4}$, etc.; communément ils manquent de ces coëfficiens et ont la forme suivante

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.};$$

on suppose aussi communément

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} + \alpha_n x^n + \text{etc.}) =$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} + A_n x^n + \text{etc.},$$

α_n et A_n désignant les $n^{\text{ièmes}}$ coëfficiens après les quantités α et A respectivement.

Pour faire usage de notre méthode, on pourroit mettre ces séries sous la forme précédente, et écrire

$$\varphi(\alpha + \beta x + \frac{\gamma'}{1.2}x^2 + \frac{\delta'}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{\alpha'_n}{1.2\ldots n}x^n + \text{etc.}) =$$
$$A + Bx + \frac{C'}{1.2}x^2 + \frac{D'}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{A'_n}{1.2\ldots n}x^n + \text{etc.},$$

en supposant

$$\gamma' = 1.2\gamma,\quad \delta' = 1.2.3\delta,\ \text{etc.}\quad \alpha'_n = 1.2\ldots n\,\alpha_n,$$
$$C' = 1.2C,\quad D' = 1.2.3D,\ \text{etc.}\quad A'_n = 1.2\ldots n\,A_n;$$

on feroit ensuite les dérivations, et, après avoir obtenu les résultats, on remettroit

1.2γ pour γ', $1.2.3\delta$ pour δ', etc. $1.2\ldots n\alpha_n$ pour α'_n,
$1.2C$ pour C', $1.2.3D$ pour D', etc. $1.2\ldots nA_n$ pour A'_n.

Mais on n'a pas besoin de ces détours; il suffit de faire les dérivations sans avoir égard aux coëfficiens numériques $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, etc., et de mettre ensuite

β pour $\text{D}.\alpha$, $1.2.\gamma$ pour $\text{D}^2.\alpha$, $1.2.3\,\delta$ pour $\text{D}^3.\alpha$, etc. $1.2\ldots n\,\alpha_n$ pour $\text{D}^n.\alpha$,
B pour $\text{D}.A$, $1.2\,C$ pour $\text{D}^2.A$, $1.2.3\,D$ pour $\text{D}^3.A$, etc. $1.2\ldots nA_n$ pour $\text{D}^n.A$:
car il est visible que ce second procédé revient au même que le premier. Ce qui donne cet autre théorème:

THÉORÈME.

Soit

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} + \alpha_n x^n + \text{etc.})$$

une fonction quelconque d'un polynome quelconque ; pour la développer en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx \ + \text{etc.} + A_n x^n + \text{etc.},$$

on aura

$A = \varphi\alpha$ pour le premier terme,

$\mathrm{D}.A = \mathrm{D}.\varphi\alpha$ pour le coëfficient du second terme ;

ensuite $\mathrm{D}^2.A = \mathrm{D}^2.\varphi\alpha$ donnera le coëfficient du troisième terme,

$\mathrm{D}^3.A = \mathrm{D}^3.\varphi\alpha$ donnera celui du quatrième,

et en général

$\mathrm{D}^n.A = \mathrm{D}^n.\varphi\alpha$ donnera le coëfficient de x^n :

pourvu qu'après avoir fait les dérivations, on mette dans les résultats
β pour $\mathrm{D}.\alpha$, $1.2\,\gamma$ pour $\mathrm{D}^2.\alpha$, $1.2.3\,\delta$ pour $\mathrm{D}^3.\alpha$, etc., $1.2...n\alpha_n$ pour $\mathrm{D}^n.\alpha$;
B pour $\mathrm{D}.A$, $1.2\,C$ pour $\mathrm{D}^2.A$, $1.2.3D$ pour $\mathrm{D}^3.A$, etc., $1.2...nA_n$ pour $\mathrm{D}^n.A$.

COROLLAIRE.

8. Si l'on calcule successivement les valeurs des coëfficiens A, B, C, etc, et qu'on fasse chaque fois les réductions, il suffira de mettre simplement

$1\,\beta$ pour $\mathrm{D}.\alpha$, $2\,\gamma$ pour $\mathrm{D}.\beta$, $3\,\delta$ pour $\mathrm{D}.\gamma$, etc., $n\alpha_n$ pour $\mathrm{D}.\alpha_{n-1}$,

B pour $\mathrm{D}.A$, $2\,C$ pour $\mathrm{D}.B$, $3D$ pour $\mathrm{D}.C$, etc., nA_n pour $\mathrm{D}.A_{n-1}$.

En effet, puisque de cette manière $\mathrm{D}.\gamma$, par exemple, $= \mathrm{D}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{D}.\beta = \mathrm{D}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2.\alpha = \frac{1}{1.2}\,\mathrm{D}^3.\alpha$, on a $3\delta = \frac{1}{1.2}\,\mathrm{D}^3.\alpha$ et $1.2.3\,\delta = \mathrm{D}^3.\alpha$; de sorte qu'on substitue équivalemment de cette manière $1.2.3\,\delta$ à la place de $\mathrm{D}^3.\alpha$, et ainsi des autres.

Il est visible que le coëfficient numérique qu'on met devant la lettre qu'on substitue, est le nombre qui compte les dérivations que l'on a faites sur la lettre primitive α ou A.

9. Lorsqu'on effectue les développemens, on peut se dispenser d'écrire des lettres affectées du signe D, en écrivant sur le champ celles qu'on doit leur substituer avec les coëfficiens numériques convenables ; mais dans ce cas il est nécessaire de faire observer aux coëfficiens des puissances x^0, x^1, x^2, x^3,

etc. un certain ordre, par exemple l'ordre alphabétique, ou de les marquer par des indices; il est avantageux que le nombre qui exprime l'indice soit le même que l'exposant de la puissance de x, à laquelle le coëfficient appartient.

10. Quant aux règles qu'il faut suivre pour développer les dérivations indiquées par $\text{D}.\varphi\alpha$, $\text{D}^2.\varphi\alpha$, $\text{D}^3.\varphi\alpha$, etc.; elles sont, pour les cas que nous traitons, les mêmes que celles que prescrit le calcul différentiel pour effectuer les différentiations $d.\varphi\alpha$, $d^2.\varphi\alpha$, $d^3.\varphi\alpha$, etc. en regardant α comme la variable, et $d\alpha$, de même que $d^2\alpha$, $d^3\alpha$, etc., aussi comme variables. Ainsi, comme nous supposons la connoissance de ces règles, nous n'entrerons à cet égard dans aucun détail.

Observons seulement que nous mettrons toujours à l'avenir une différence entre les notations $\text{D}\varphi\alpha$, $\text{D}^2\varphi\alpha$, $\text{D}^3\varphi\alpha$, etc. sans points, et celles-ci, $\text{D}.\varphi\alpha$, $\text{D}^2.\varphi\alpha$, $\text{D}^3.\varphi\alpha$, etc., où le signe D est suivi d'un point. Voici en quoi elle consiste.

Puisqu'on a

$$d.\varphi\alpha = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \times d\alpha, \text{ et } d^2.\varphi\alpha = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \times d^2\alpha + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} \times d\alpha^2, \text{ etc.},$$

afin d'éviter les expressions fractionnaires, nous désignerons

$$\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}, \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}, \frac{d^3\varphi\alpha}{d\alpha^3}, \text{ etc., simplement par } \text{D}\varphi\alpha, \text{D}^2\varphi\alpha, \text{D}^3\varphi\alpha, \text{ etc.},$$

sans points : ces quantités sont la même chose que les différens termes du développement de $\varphi(\alpha + 1)$, si l'on fait abstraction des coëfficiens numériques, car en supposant $x = 1$ dans le n.° 2, on a

$$\varphi(\alpha + 1) = \varphi\alpha + \text{D}\varphi\alpha + \frac{1}{1.2}\text{D}^2\varphi\alpha + \frac{1}{1.2.3}\text{D}^3\varphi\alpha + \text{etc.}$$

Ainsi $\text{D}\varphi\alpha$, $\text{D}^2\varphi\alpha$, $\text{D}^3\varphi\alpha$, etc. indiquent les dérivées successives de $\varphi\alpha$ dans le cas où la dérivée de la variable α, c'est-à-dire $\text{D}\alpha$, est constante et égale à l'unité.

Les expressions $\text{D}.\varphi\alpha$, $\text{D}^2.\varphi\alpha$, au contraire, indiquent les développemens

$$\text{D}\varphi\alpha \times \text{D}.\alpha, \qquad \text{D}\varphi\alpha \times \text{D}^2.\alpha + \text{D}^2\varphi\alpha \times (\text{D}.\alpha)^2,$$

où la dérivée de α, savoir $\text{D}.\alpha$, est variable et quelconque, développemens qui deviennent par notre calcul

$$\text{D}\varphi\alpha \times 6, \qquad \text{D}\varphi\alpha \times 1.2\gamma + \text{D}^2\varphi\alpha \times 6^2.$$

En un mot, $\varphi\alpha$, $\text{D}\varphi\alpha$, $\frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}$, etc. sont les coëfficiens des termes successifs

du développement de $\varphi(\alpha + x)$; et $\varphi\alpha$, $\text{D}.\varphi\alpha$, $\frac{\text{D}^2.\varphi\alpha}{1.2}$, etc., les coëfficiens des termes successifs du développement de $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \text{ etc.})$.

On se servira aussi du point pour marquer jusqu'où s'étend le signe D; ainsi, dans $\text{D}.\varphi\alpha.b$, $\text{D}\varphi\alpha.\psi a$, $\text{D}.\varphi\alpha.\text{D}.\psi a$, le point aprés $\varphi\alpha$ marque que le signe D avant $\varphi\alpha$ n'affecte plus b, ou ψa, ou $\text{D}.\psi a$. D'autres fois le point est employé à la manière ordinaire, pour distinguer les différens facteurs ou les grouppes de facteurs des produits.

11. Nous nommerons le premier terme $\varphi\alpha$ du développement, ou celui dont on fait dériver tous les autres, *origine des dérivations.*

Quand ce terme est donné, et qu'on a examiné lesquelles des quantités qui y entrent sont fonctions d'autres quantités, le reste ne demande plus d'autres raisonnemens; tout se réduit alors à une suite d'opérations assujetties à une marche régulière et uniforme.

Quelquefois la loi des dérivations devient plus sensible, si l'on prend le second terme pour origine des dérivations.

Si le premier terme α du polynome avoit une valeur particulière, comme s'il étoit égal à l'unité, ainsi que cela arrive quelquefois, l'origine des dérivations deviendroit $\varphi 1$, expression qui ne seroit pas commode pour en déduire les autres termes : on mettroit donc à la place de 1 une quantité qui auroit une valeur indéfinie, comme α; sauf à remettre, dans les résultats, au lieu de α sa valeur particulière.

12. Il est temps de passer à des exemples, pour éclaircir tout ce que nous venons d'exposer, et pour montrer la facilité de notre méthode.

EXEMPLE Ier

On propose de développer la fonction

$$\log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.})$$

en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

On aura d'abord $A = \log\alpha$, parce que, x pouvant avoir des valeurs quelconques, les quantités indépendantes de x doivent être égales entre elles séparément. De ce premier terme nous allons déduire tous les coëfficiens B, C, D, etc. par de simples dérivations, d'après ce qui a été dit n.° 8 et suivans. J'en mets ici tout le calcul sans rien abréger.

A

$A = \log\alpha$; de là l'on tire par dérivation,

$B = \text{D}.\log\alpha = \frac{\text{D}.\alpha}{\alpha} = \alpha^{-1}.\beta$; faisant une nouvelle dérivation, on a

$2C = \text{D}.\alpha^{-1}\beta = \alpha^{-1}.2\gamma - \alpha^{-2}\beta\beta$, réduisant

$C = \alpha^{-1}.\gamma - \frac{\alpha^{-2}}{2}.\beta^2$; de là, par dérivation,

$3D = \alpha^{-1}.3\delta - \alpha^{-2}\beta\gamma - \frac{\alpha^{-2}}{2}.2\beta 2\gamma + \frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta.\beta^2$, et réduisant,

$$D = \alpha^{-1}.\delta - \frac{\alpha^{-2}}{2}.2\beta\gamma + \frac{\alpha^{-3}}{3}.\beta^3;$$

$$4E = \alpha^{-1}.4\varepsilon - \alpha^{-2}\beta\delta - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta 3\delta + 2.2\gamma^2) + \frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta.2\beta\gamma + \frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2 2\gamma - \frac{3\alpha^{-4}}{3}\beta\beta^3,$$

$$E = \alpha^{-1}.\varepsilon - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2\gamma - \frac{\alpha^{-4}}{4}.\beta^4;$$

$$5F = \alpha^{-1}.5\zeta - \alpha^{-2}\beta\varepsilon - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta 4\varepsilon + 2.2\gamma\delta + 2\gamma 3\delta) + \frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta(2\beta\delta + \gamma^2)$$
$$+ \frac{\alpha^{-3}}{3}(3\beta^2 3\delta + 2.3\beta 2\gamma^2) - \frac{3\alpha^{-4}}{3}\beta.3\beta^2\gamma - \frac{\alpha^{-4}}{4}.4\beta^3 2\gamma + \frac{4\alpha^{-5}}{4}\beta.\beta^4,$$

$$F = \alpha^{-1}.\zeta - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{\alpha^{-3}}{3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) - \frac{\alpha^{-4}}{4}.4\beta^3\gamma + \frac{\alpha^{-5}}{5}.\beta^5;$$

et ainsi de suite.

13. La même méthode donne encore, avec une grande facilité, les coëfficiens A, B, C, D, etc. en termes récurrens, c'est-à-dire, par des formules dans lesquelles entrent les coëfficiens précédens; formules qu'on obtient ordinairement par la méthode des coëfficiens indéterminés, ainsi qu'on peut le voir dans le calcul différentiel d'Euler, chap. VIII de la 2.ᵉ partie. Il suffira ici de regarder A et ses dérivées comme indépendantes de α et de ses dérivées, c'est-à-dire, comme n'étant pas fonctions les unes des autres.

Dans l'exemple précédent, on a $A = \log\alpha$; d'où l'on tire par dérivation, $\text{D}.A = \frac{\text{D}.\alpha}{\alpha}$, et, en multipliant par α, $\alpha\text{D}.A = \text{D}.\alpha$, ou bien $\alpha B = \beta$, équation qui sert d'origine aux dérivations, et de laquelle on déduit ce qui suit:

$A = \log\alpha$;
$B\alpha = \beta$; de là par dérivation,
$2C\alpha + B\beta = 2\gamma$, et réduisant,
$C\alpha + \frac{1}{2}B\beta = \gamma$;
$3D\alpha + C\beta + \frac{1}{2}.2C\beta + \frac{1}{2}B2\gamma = 3\delta$,
$D\alpha + \frac{2}{3}C\beta + \frac{1}{3}B\gamma = \delta$;
$4E\alpha + D\beta + \frac{2}{3}.3D\beta + \frac{2}{3}C2\gamma + \frac{1}{3}.2C\gamma$
$+ \frac{1}{3}B3\delta = 4\varepsilon$,
$E\alpha + \frac{3}{4}D\beta + \frac{2}{4}C\gamma + \frac{1}{4}B\delta = \varepsilon$;
etc.

De là on tire, en transposant

$$A = \log \alpha; \qquad D\alpha = \delta - \tfrac{1}{3}B\gamma - \tfrac{2}{3}C\beta;$$
$$B\alpha = \beta; \qquad E\alpha = \varepsilon - \tfrac{1}{4}B\delta - \tfrac{2}{4}C\gamma - \tfrac{3}{4}D\beta;$$
$$C\alpha = \gamma - \tfrac{1}{2}B\beta;$$

etc., où la loi est facile à saisir.

Exemple II.

14. On demande à développer la fonction

$$e^{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}},$$

log e étant $= 1$, en une série de cette forme :

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

On aura $A = e^\alpha$; de là on tire par les dérivations successives :

$$A = e^\alpha;$$
$$B = e^\alpha \beta;$$
$$2C = e^\alpha.2\gamma + e^\alpha \beta.\beta,$$
$$C = e^\alpha.\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2}.\beta^2;$$
$$3D = e^\alpha.3\delta + e^\alpha \beta.\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2}.2\beta 2\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2}\beta.\beta^2,$$
$$D = e^\alpha.\delta + \frac{e^\alpha}{1.2}.2\beta\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3}.\beta^3;$$
$$4E = e^\alpha.4\varepsilon + e^\alpha \beta.\delta + \frac{e^\alpha}{1.2}(2\beta 3\delta + 2.2\gamma^2) + \frac{e^\alpha}{1.2}\beta.2\beta\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3}3\beta^2 2\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3}\beta.\beta^3,$$
$$E = e^\alpha.\varepsilon + \frac{e^\alpha}{1.2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{e^\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4;$$
$$5F = e^\alpha.5\zeta + e^\alpha \beta.\varepsilon + \frac{e^\alpha}{1.2}.(2\beta 4\varepsilon + 2.2\gamma\delta + 2\gamma 3\delta) + \frac{e^\alpha}{1.2}\beta(2\beta\delta + \gamma^2)$$
$$+ \frac{e^\alpha}{1.2.3}(3\beta^2 3\delta + 3.2\beta 2\gamma^2) + \frac{e^\alpha}{1.2.3}\beta.3\beta^2\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3.4}.4\beta^3 2\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2.3.4}\beta.\beta^4,$$
$$F = e^\alpha.\zeta + \frac{e^\alpha}{1.2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{e^\alpha}{1.2.3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) + \frac{e^\alpha}{1.2.3.4}.4\beta^3\gamma + \frac{e^\alpha}{1.2\ldots5}.\beta^5;$$

et ainsi de suite.

15. Si l'on veut calculer les coëfficiens A, B, C, D etc. en termes récurrens, on les trouvera avec la plus grande facilité.

On a $A = e^\alpha$; d'où par dérivation $B = e^\alpha \beta$, et, en mettant A au lieu de e^α, $B = A\beta$. Il suffira de continuer les dérivations, et l'on aura

$$A = e^\alpha;$$
$$B = A\beta;$$
$$2C = A\,2\gamma + B\beta,$$
$$C = A\gamma + \tfrac{1}{2}B\beta;$$
$$3D = A3\delta + B\gamma + \tfrac{1}{2}B2\gamma + \tfrac{1}{2}.2C\beta,$$
$$D = A\delta + \tfrac{2}{3}B\gamma + \tfrac{1}{3}C\beta;$$
$$4E = A\,4\varepsilon + B\delta + \tfrac{2}{3}B\,3\delta + \tfrac{2}{3}.2C\gamma + \tfrac{1}{3}C2\gamma + \tfrac{1}{3}.3D\beta,$$
$$E = A\varepsilon + \tfrac{3}{4}B\delta + \tfrac{2}{4}C\gamma + \tfrac{1}{4}D\beta;$$

etc., où la loi est manifeste.

EXEMPLE III.

16. Soit proposé de convertir

$$\sin(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.})$$

en une série de cette forme :

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

On aura d'abord $A = \sin\alpha$, qu'on considèrera comme l'origine des dérivations. De là on déduira ce qui suit :

$$A = \sin\alpha;$$
$$B = \cos\alpha.\beta;$$
$$2C = \cos\alpha.2\gamma - \sin\alpha.\beta^2,$$
$$C = \cos\alpha.\gamma - \frac{\sin\alpha}{1.2}.\beta^2;$$
$$3D = \cos\alpha.3\delta - \sin\alpha\beta.\gamma - \frac{\sin\alpha}{1.2}.2\beta 2\gamma - \frac{\cos\alpha}{1.2}\beta.\beta^2,$$
$$D = \cos\alpha.\delta - \frac{\sin\alpha}{1.2}.2\beta\gamma - \frac{\cos\alpha}{1.2.3}.\beta^3;$$
$$4E = \cos\alpha.4\varepsilon - \sin\alpha\beta.\delta - \frac{\sin\alpha}{1.2}(2\beta 3\delta + 2.2\gamma^2) - \frac{\cos\alpha}{1.2}\beta.2\beta\gamma - \frac{\cos\alpha}{1.2.3}.3\beta^2 2\gamma + \frac{\sin\alpha}{1.2.3}\beta.\beta^3,$$
$$E = \cos\alpha.\varepsilon - \frac{\sin\alpha}{1.2}(2\beta\delta + \gamma^2) - \frac{\cos\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{\sin\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4;$$

et ainsi de suite.

17. Pour trouver ces coëfficiens en termes récurrens, je fais une première dérivation sur $A = \sin\alpha$, ce qui donne $B = \cos\alpha . \mathcal{C}$; mais, puisque je ne puis pas substituer pour $\cos\alpha$ sa valeur, je fais une seconde dérivation, qui donne $C = \cos\alpha . \gamma - \frac{\sin\alpha}{1.2} . \mathcal{C}^2$: substituant maintenant pour $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ leurs valeurs A et $\frac{B}{\mathcal{C}}$, on aura l'équation

$$2C\mathcal{C} = B2\gamma - A\mathcal{C}^3,$$

où il suffira de continuer les dérivations; mais comme la loi suivant laquelle les différens termes se succèdent, ne se présente pas aussi facilement que dans les exemples précédens, nous ne nous arrêterons pas davantage à ce cas.

18. On pourroit, si on le jugeoit à propos, pour s'exercer à ce genre de calcul, développer par le même procédé différentes autres fonctions du polynome $\alpha + \mathcal{C}x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc.; nous n'y insisterons pas, parce que nous avons à proposer une manière encore plus simple d'effectuer ces développemens.

La méthode que nous venons d'exposer donne, par exemple, avec une grande facilité le développement d'une puissance quelconque m du polynome $\alpha + \mathcal{C}x + \gamma x^2 +$ etc. $+ \alpha_n x^n$; mais, comme nous appliquerons à ce cas la méthode simplifiée, nous nous contenterons de faire voir ici la manière de calculer le même développement en termes récurrens.

On a $A = \alpha^m$; d'où l'on tire par dérivation $B = m\alpha^{m-1}\mathcal{C} = m\alpha^m\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$, et en mettant A à la place de α^m, $B = mA\frac{\mathcal{C}}{\alpha}$; partant

$B\alpha = mA\mathcal{C}$; de là par dérivation,

$2C\alpha + B\mathcal{C} = mB\mathcal{C} + mA2\gamma$, transposant et réduisant,

$2C\alpha = (m-1)B\mathcal{C} + 2mA\gamma$; faisant une nouvelle dérivation,

$2.3D\alpha + 2C\mathcal{C} = (m-1)2C\mathcal{C} + (m-1)B2\gamma + 2mB\gamma + 2mA3\delta$, réduisant,

$3D\alpha = (m-2)C\mathcal{C} + (2m-1)B\gamma + 3mA\delta$;

$3.4E\alpha + 3D\mathcal{C} = (m-2)(3D\mathcal{C} + C2\gamma) + (2m-1)(2C\gamma + B3\delta) + 3m(B\delta + A4\varepsilon)$,

$4E\alpha = (m-3)D\mathcal{C} + (2m-2)C\gamma + (3m-1)B\delta + 4mA\varepsilon$;

etc.

où

où la loi est visible, sans qu'on ait besoin d'aller plus loin; et l'on aura pour F

$$5F\alpha = (m-4)E\beta + (2m-3)D\gamma + (3m-2)C\delta + (4m-1)B\varepsilon + 5mA\zeta.$$

Ces formules sont les mêmes que celles que trouve EULER à l'endroit cité de son calcul différentiel.

§ II.

Simplification de la Méthode.

19. Quoique le procédé dont nous venons de faire usage soit assez facile dans les premiers termes; cependant, comme il fait calculer plusieurs fois des quantités composées des mêmes lettres, et qu'il exige des réductions relatives aux coëfficiens numériques, ce qui le rend d'autant plus embarrassant qu'on s'éloigne davantage du premier terme, on peut demander avec raison si ce procédé ne peut pas être simplifié au point de faire éviter toute réduction, et de manière qu'un terme quelconque étant donné et ordonné, on puisse sur le champ en faire dériver le terme suivant, déjà tout réduit et mis sous la forme la plus simple. C'est l'objet que nous nous proposons présentement.

THÉORÈME.

20. Si l'on a une fonction quelconque de polynome

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} + \alpha_n x^n + \text{etc.})$$

à convertir en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} + A_n x^n + \text{etc.},$$

et qu'on désigne le développement de $\varphi(\alpha + 1)$ de cette manière (n.° 10)

$$\varphi(\alpha + 1) = \varphi\alpha + \text{D}\varphi\alpha + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3} + \text{etc.} + \frac{\text{D}^n\varphi\alpha}{1.2\ldots n} + \text{etc.},$$

le coëfficient A_n du terme général $A_n x^n$ sera

$$A_n = \frac{\text{D}^n.\varphi\alpha}{1.2\ldots n} = \text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^{n-1}.\beta}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^{n-2}.\beta^2}{1.2\ldots(n-2)} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\frac{\text{D}^{n-3}.\beta^3}{1.2\ldots(n-3)}$$
$$+ \text{etc.} + \frac{\text{D}^{n-1}\varphi\alpha}{1.2\ldots(n-1)}.\text{D}.\beta^{n-1} + \frac{\text{D}^n\varphi\alpha}{1.2\ldots n}.\beta^n,$$

où il faudra considérer β comme un premier terme de polynome.

21. *Démonstration.* Supposons

$$\pi = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.} + \alpha_n x^{n-1} + \text{etc.}; \qquad \ldots(1)$$

la fonction du polynome deviendra $\varphi(\alpha + \pi x)$, et en développant on aura (n.[os] 2 et 3)

$$\varphi(\alpha + \pi x) = \varphi\alpha + \mathrm{D}\varphi\alpha.\pi x + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\pi^2 x^2 + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\pi^3 x^3 + \text{etc},$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^n\varphi\alpha}{1.2\ldots n}.\pi^n x^n + \text{etc.}$$

Or, puisque π, π^2, π^3, etc., π^n sont aussi des fonctions de polynome, on aura (n.° 7)

$$\pi = \beta + \mathrm{D}.\beta.x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^r.\beta}{1.2\ldots r}x^r + \text{etc.}$$

$$\pi^2 = \beta^2 + \mathrm{D}.\beta^2.x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^2}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta^2}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^r.\beta^2}{1.2\ldots r}x^r + \text{etc.}$$

$$\pi^3 = \beta^3 + \mathrm{D}.\beta^3.x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^3}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta^3}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^r.\beta^3}{1.2\ldots r}x^r + \text{etc.}$$

etc., et en général

$$\pi^m = \beta^m + \mathrm{D}.\beta^m.x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^m}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta^m}{1.2.3}x^3 + \text{etc.} \frac{\mathrm{D}^r.\beta^m}{1.2\ldots r}x^r + \text{etc.};$$

formules, dans lesquelles β est le premier terme du polynome (1).

Actuellement, si l'on substitue ces séries dans le développement de $\varphi(\alpha + \pi x)$, et qu'on ordonne par rapport à x, on aura

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} + A_n x^n + \text{etc.} =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\varphi\alpha + \mathrm{D}\varphi\alpha.\beta.x + \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta & x^2 + \mathrm{D}\varphi\alpha.\frac{\mathrm{D}^2.\beta}{1.2} & x^3 + \mathrm{D}\varphi\alpha.\frac{\mathrm{D}^3.\beta}{1.2.3} & x^4 + \text{etc.} + \mathrm{D}\varphi\alpha.\frac{\mathrm{D}^{n-1}\beta}{1.2..(n-1)} & x^n + \text{etc.} \\
+\frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\beta^2 & +\frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2.}.\mathrm{D}.\beta^2 & +\frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^2.\beta^2}{1.2} & + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\beta^2}{1.2..(n-2)} & \\
 & +\frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3 & +\frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\mathrm{D}.\beta^3 & + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.\beta^3}{1.2..(n-3)} & \\
(2)\ldots\ldots\ldots & & +\frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4 & + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1\ldots 4}.\frac{\mathrm{D}^{n-4}.\beta^4}{1.2\ldots(n-4)} & \\
 & & & + \text{etc.} & \\
 & & & + \frac{\mathrm{D}^n\varphi\alpha}{1.2\ldots n}.\beta^n &
\end{array}$$

série dans laquelle le coëfficient de x^n est tel que nous l'avons énoncé.

COROLLAIRE I.

22. On peut aussi ordonner les termes qui forment le développement du terme général A_n de la manière suivante, en écrivant la formule à rebours, ce qui est plus commode pour effectuer les dérivations relatives à ζ,

$$\frac{\text{D}^n.\varphi\alpha}{1.2.3...n} = \frac{\text{D}^n\varphi\alpha}{1.2...n}.\zeta^n + \frac{\text{D}^{n-1}\varphi\alpha}{1.2...(n-1)}.\text{D}.\zeta^{n-1} + \frac{\text{D}^{n-2}\varphi\alpha}{1.2...(n-2)}.\frac{\text{D}^2.\zeta^{n-2}}{1.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^{n-2}.\zeta^2}{1.2...(n-2)} + \text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^{n-1}.\zeta}{1.2...(n-1)}.$$

COROLLAIRE II.

23. Il résulte du n.° 21, que α est la seule lettre dans le développement qui soit affectée de la fonction φ; les suivantes ζ, γ, δ, etc. forment proprement les *quantités polynomiales*. Ces quantités ne sont affectées d'autres fonctions que de puissances entières, et sont toujours les mêmes pour toutes les fonctions possibles de polynomes.

24. Tirons à présent du théorème précédent et de sa démonstration des conséquences propres à faciliter les dérivations.

Dans le développement (2) n.° 21, le coëfficient de x^3 est

$$\text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^2.\zeta}{1.2} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\text{D}.\zeta^2 + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\zeta^3;$$

celui du terme suivant de la série, affecté de x^4, est

$$\text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^3.\zeta}{1.2.3} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^2.\zeta^2}{1.2} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\text{D}.\zeta^3 + \frac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\zeta^4,$$

et l'expression du terme général de la série fait voir que le coëfficient du terme suivant, affecté de x^5, sera

$$\text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^4.\zeta}{1.2.3.4} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^3.\zeta^2}{1.2.3} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\frac{\text{D}^2.\zeta^3}{1.2} + \frac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\text{D}.\zeta^4 + \frac{\text{D}^5\varphi\alpha}{1.2.3.4.5}.\zeta^5;$$

et ainsi de suite.

De là découle cette règle :

Pour faire dériver d'un terme donné d'une série celui qui le suit immédiatement, 1.° *on regardera comme constante la lettre* α *ou ses fonctions, et l'on prendra seulement les dérivées des quantités où entre* ζ, *en divisant chaque nouvelle dérivée par le nombre qui compte les dérivations.*

2.° *Ensuite on fera encore varier la lettre précédente α de $\text{D}.\alpha = \beta$, mais seulement dans la quantité qui a déjà subi le plus de dérivations; on prendra une nouvelle dérivée de cette quantité, qu'on divisera pareillement par le nombre qui compte les dérivations.*

Ainsi $\text{D}\varphi\alpha.\dfrac{\text{D}^2.\beta}{1.2} + \dfrac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2.}\text{D}.\beta^2 + \dfrac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3$ ....(1)

donnera d'abord

$$\text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^3.\beta}{1.2.3} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^2.\beta^2}{1.2} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\text{D}.\beta^3; \quad \ldots. (2)$$

et en faisant une nouvelle dérivation sur $\dfrac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}$, quantité en α, qui a subi le plus de dérivations, on aura $\dfrac{\text{D}^4\varphi\alpha.\beta}{1.2.3.4}$, et l'on ajoutera le terme nouveau $\dfrac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4$ à la formule (2), laquelle deviendra par là

$$\text{D}\varphi\alpha.\frac{\text{D}^3.\beta}{1.2.3} + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^2.\beta^2}{1.2} + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\text{D}.\beta^3 + \frac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4,$$

ce qui est précisément le coëfficient du terme suivant de la série. On peut continuer ainsi tant qu'on voudra.

25. Passons au développement des quantités où entre β et où toutes les fonctions sont des puissances entières.

Soit en général $\dfrac{\text{D}^n.\beta^r}{1.2\ldots n}$ à développer ; en comparant cette expression à celle-ci $\dfrac{\text{D}^n.\varphi\alpha}{1.2\ldots n}$, on voit que β remplace α, que l'exposant r remplace le signe φ de la fonction, et que $\gamma = \text{D}.\beta$ doit être considéré comme un premier terme de polynome; on aura donc, par le théorème du n.° 20, ce premier développement;

$$\frac{\text{D}^n.\beta^r}{1.2\ldots n} = \text{D}\beta^r.\frac{\text{D}^{n-1}.\gamma}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{\text{D}^2\beta^r}{1.2}.\frac{\text{D}^{n-2}.\gamma^2}{1.2\ldots(n-2)} + \frac{\text{D}^3\beta}{1.2.3}.\frac{\text{D}^{n-3}.\gamma^3}{1.2\ldots(n-3)}$$

$$+ \text{etc.} + \frac{\text{D}^{n-1}\beta^r}{1.2\ldots(n-1)}.\text{D}.\gamma^{n-1} + \frac{\text{D}^n\beta^r}{1.2\ldots n}.\gamma^n.$$

En particulier, on a

$$\frac{\text{D}^3.\beta^r}{1.2.3} = \text{D}\beta^r.\frac{\text{D}^2.\gamma}{1.2} + \frac{\text{D}^2\beta^r}{1.2}.\text{D}.\gamma^2 + \frac{\text{D}^3\beta^r}{1.2.3}.\gamma^3,$$

et

et la dérivée est

$$\frac{\mathrm{D}^4.\,\beta^r}{1.2.3.4} = \mathrm{D}\,\beta^r.\frac{\mathrm{D}^3.\,\gamma}{1.\,2.\,3} + \frac{\mathrm{D}^2\beta^r}{1.\,2}.\frac{\mathrm{D}^2.\,\gamma^2}{1.\,2} + \frac{\mathrm{D}^3\beta^r}{1.\,2.\,3}.\mathrm{D}.\,\gamma^3 + \frac{\mathrm{D}^4\beta^r}{1.\,2.\,3.\,4}.\gamma^4\,;$$

d'où l'on conclud que la règle que nous avons donnée dans le numéro précédent s'applique encore aux dérivations des quantités où entre β. Il en est de méme de celles où γ entre, qu'on développera de la même manière, pour avoir un second développement de $\frac{\mathrm{D}^n.\,\beta^r}{1.\,2\ldots\ldots n}$, dans lequel entrera la lettre δ; laquelle lettre sera considérée à son tour comme un premier terme de polynome, conformément au n.° 21 ; et ainsi de suite.

Nous nommons en général premier développement celui dans lequel entre une lettre de plus que dans l'expression proposée, cette lettre étant mêlée avec les signes D ; développement second, celui dans lequel entrent deux lettres de plus ; développement troisième, celui qui renferme trois lettres de plus; etc.

26. Le développement des quantités $\frac{\mathrm{D}^n.\,\beta^r}{1.\,2\ldots n}$, $\frac{\mathrm{D}^l.\,\gamma^r}{1.\,2\ldots l}$, etc., s'arrête naturellement après qu'il est parvenu au terme dont le second facteur n'est plus affecté du signe dérivatif D. Ainsi le développement de $\frac{\mathrm{D}^3.\,\beta^6}{1.\,2.\,3}$ a pour dernier terme $\frac{\mathrm{D}^3\beta^6}{1.\,2.\,3}.\,\gamma^3$, celui de $\frac{\mathrm{D}^4.\,\gamma^6}{1.\,2.\,3.\,4}$ a pour dernier terme $\frac{\mathrm{D}^4\gamma^6}{1.\,2.\,3.\,4}.\,\delta^4$. Le second facteur du dernier terme est, dans ce cas, une puissance d'une seule lettre, dont l'exposant compte le nombre des dérivations qu'on a faites sur la puissance ou la fonction de la lettre précédente, et ce dernier terme est le seul qui puisse donner un terme nouveau dans la dérivée.

Mais il y a des cas où le développement s'arrête plus tôt; c'est ce qui arrive toujours quand l'indice ou exposant n du signe dérivatif est plus grand que l'exposant r de la lettre sous le signe, comme dans $\frac{\mathrm{D}^7.\,\beta^3}{1\ldots 7}$; alors le développement s'arrête après le terme dans le premier facteur duquel l'exposant de la lettre sous le signe D non ponctué est égal à l'indice de ce signe; car il est visible que les quantités de cette forme $\frac{\mathrm{D}^m\,\beta^m}{1.\,2\ldots m}$, $\frac{\mathrm{D}^m\,\gamma^m}{1.\,2\ldots m}$ sont égales à l'unité, et leurs dérivées, comme $\frac{\mathrm{D}^{m+1}\,\beta^m}{1.\,2\ldots(m+1)}$, $\frac{\mathrm{D}^{m+2}\,\beta^m}{1.\,2\ldots(m+2)}$, etc.,

$\frac{D^{m+1}\gamma^m}{1.2...(m+1)}$, etc., toutes égales à zéro. Ainsi le premier développement de $\frac{D^7.\zeta^3}{1.2...7}$ n'a que trois termes, parce qu'il s'arrête après celui dont le premier facteur est $\frac{D^3\zeta^3}{1.2.3} = 1$; ces termes sont

$$\frac{D^7.\zeta^3}{1.2...7} = D\zeta^3.\frac{D^6.\gamma}{1...6} + \frac{D^2\zeta^3}{1.2}.\frac{D^5.\gamma^2}{1....5} + \frac{D^3\zeta^3}{1.2.3}.\frac{D^4.\gamma^3}{1....4}.$$

Lorsqu'il arrive que le dernier terme d'un premier développement a son premier facteur de la forme $\frac{D^m\zeta^m}{1.2....m}$, c'est-à-dire, égal à l'unité, alors ce dernier terme ne donnera pas de terme nouveau dans la dérivée, parce que les dérivées de l'unité sont égales à zéro ; de là il résulte qu'en calculant des premiers développemens, dès qu'un développement s'est arrêté dans une des dérivées, toutes les dérivées suivantes ne contiendront plus que le même nombre de termes de premier développement, les premiers facteurs demeurant les mêmes dans toutes les dérivées. Ainsi l'on a

$$\frac{D^8.\zeta^3}{1....8} = D\zeta^3.\frac{D^7.\gamma}{1....7} + \frac{D^2\zeta^3}{1.2}.\frac{D^6.\gamma^2}{1....6} + \frac{D^3\zeta^3}{1.2.3}.\frac{D^5.\gamma^3}{1....5},$$

$$\frac{D^9.\zeta^3}{1....9} = D\zeta^3.\frac{D^8.\gamma}{1....8} + \frac{D^2\zeta^3}{1.2}.\frac{D^7.\gamma^2}{1....7} + \frac{D^3\zeta^3}{1.2.3}.\frac{D^6.\gamma^3}{1....6},$$

etc. ; ce qui fait voir que la 2.e partie de la règle n.° 24 ne trouve pas d'application dans ces cas, les dérivations qu'elle prescrit n'étant pas possibles.

27. Donnons actuellement les développemens successifs en γ, δ, ε, etc. de deux dérivées immédiates, dans la vue d'examiner comment le développement complet et réduit de la dernière dérivée découle de celui de la précédente.

Nous avons calculé chacun de ces développemens en suivant la voie indiquée dans le n.° 25, et, pour faciliter les comparaisons, nous les avons placés sur des colonnes correspondantes dans les deux tableaux suivans (I) et (II).

(*Voyez les tableaux, pages* 20 *et* 21).

De cette manière, chaque colonne de (II) présente la dérivée de la colonne correspondante de (I), exprimée par les mêmes lettres.

On remarque que dans ces tableaux on a fait

$$\frac{D^4.\gamma}{1...4} = \frac{D^3.\delta}{1.2.3} = \frac{D^2.\varepsilon}{1.2} = D.\zeta = \eta;$$

il est aisé de se convaincre de l'exactitude de ces transformations, et en général de celles-ci

$$\frac{D^n.\gamma}{1.2\ldots n} = \frac{D^{n-1}.\delta}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{D^{n-2}.\varepsilon}{1.2\ldots(n-2)} = \text{etc.},$$

car, si on regarde successivement γ, δ, ε, ζ, etc. comme des premiers termes de polynomes, on a (n.° 7)

$$1.2.3.4\eta = D^4.\gamma,\ 1.2.3\eta = D^3.\delta,\ 1.2\eta = D^2.\varepsilon,\ 1\eta = D.\zeta.$$

On peut encore s'en convaincre par l'application immédiate de la formule du n.° 25, car elle donne

$$\frac{D^4.\gamma}{1\ldots4} = D\gamma.\frac{D^3.\delta}{1.2.3} = D\gamma.D\delta.\frac{D^2.\varepsilon}{1.2} = D\gamma.D\delta.D\varepsilon.D.\zeta = D\gamma.D\delta.D\varepsilon.D\zeta.\eta,$$

et puisque les expressions $D\gamma$, $D\delta$, $D\varepsilon$, $D\zeta$ sont toutes égales à l'unité, on a

$$\frac{D^4.\gamma}{1\ldots4} = \frac{D^3.\delta}{1.2.3} = \frac{D^2.\varepsilon}{1.2} = D.\zeta = \eta.$$

Après avoir considéré les deux tableaux comme formés indépendamment l'un de l'autre, examinons de quelle manière chaque colonne du second dérive de la colonne correspondante du premier.

En s'arrêtant d'abord aux premiers développemens, en γ, on voit que la première colonne de (II) se déduit de la première colonne de (I), si l'on fait simplement une dérivation sur les seconds facteurs en γ, sans rien changer aux premiers facteurs en ζ, lesquels demeurent les mêmes dans la dérivée et ne donnent point de terme nouveau, parce que ici se rencontre le cas dont il a été fait mention à la fin du n.° 26.

Passant aux secondes colonnes, qui contiennent les développemens en δ des quantités en γ des premières colonnes, il est visible que la deuxième colonne de (II) se déduit de la colonne correspondante de (I), en faisant une dérivation uniquement sur les derniers facteurs en δ, sans rien changer aux facteurs en γ et ζ; à l'exception cependant des facteurs en γ, suivis d'un facteur en δ non affecté du signe dérivatif D, et dans lesquels l'exposant de γ est plus grand que l'indice de D, lesquels facteurs donnent chacun un terme nouveau dans la colonne dérivée en (II), conformément à la 2.e partie de la règle n.° 24.

On fera des observations semblables sur les colonnes suivantes.

On remarquera aussi que les termes qui dans (II) proviennent d'une dérivation relative à la 2.e partie de la règle n.° 24, ne sont pas susceptibles de développement ultérieur, et se retrouvent les mêmes dans les colonnes suivantes de (II). La raison en est que leurs derniers facteurs sont dégagés du signe dérivatif.

TABLEAU (I),

Dével.t 1.er, en γ.

$$\frac{D^5.\zeta^4}{1.2...5} = D\zeta^4 \cdot \frac{D^4.\gamma}{1.2.3.4} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\frac{D^3.\gamma^2}{1.2.3} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\frac{D^2.\gamma^3}{1.2} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot D.\gamma^4$$

Développem.t 2.d, en δ.

$$= D\zeta^4\cdot\frac{D^3.\delta}{1.2.3} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\left\{D\gamma^2\cdot\frac{D^2.\delta}{1.2} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2}\cdot D.\delta^2\right\} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\left\{D\gamma^3.D.\delta + \frac{D^2\gamma^3}{1.2}\cdot\delta^2\right\} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot D\gamma^4.\delta$$

Développement 3.e, en ε.

$$= D\zeta^4\cdot\frac{D^2.\varepsilon}{1.2} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\left\{D\gamma^2.D.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^2}{1.2}\cdot D\delta^2.\varepsilon\right\} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\left\{D\gamma^3.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2}\cdot\delta^2\right\} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot D\gamma^4.\delta$$

TABLEAU (II),

Dével.t 1.er, en γ.

$$\frac{D^6.\zeta^4}{1.2...6} = D\zeta^4\cdot\frac{D^5.\gamma}{1.2...5} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\frac{D^4.\gamma^2}{1.2.3.4} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\frac{D^3.\gamma^3}{1.2.3} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{D^2.\gamma^4}{1.2}$$

Développem.t 2.d, en δ.

$$= D\zeta^4\cdot\frac{D^4.\delta}{1.2...4} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\left\{D\gamma^2\cdot\frac{D^3.\delta}{1.2.3} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2}\cdot\frac{D^2.\delta^2}{1.2}\right\} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\left\{D\gamma^3\cdot\frac{D^2.\delta}{1.2} + \frac{D^2\gamma^3}{1.2}\cdot D.\delta^2 + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\right\} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot\left\{D\gamma^4.D.\delta + \frac{D^2\gamma^4}{1.2}\cdot\delta^2\right\}$$

Développement 3.e, en ε.

$$= D\zeta^4\cdot\frac{D^3.\varepsilon}{1.2.3} + \frac{D^2\zeta^4}{1.2}\cdot\left\{D\gamma^2\cdot\frac{D^2.\varepsilon}{1.2} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2}\cdot\left\{D\delta^2.D.\varepsilon + \frac{D^2\delta^2}{1.2}\cdot\varepsilon^2\right\}\right\} + \frac{D^3\zeta^4}{1.2.3}\cdot\left\{D\gamma^3.D.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2}\cdot D\delta^2\varepsilon + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\right\} + \frac{D^4\zeta^4}{1.2.3.4}\cdot\left\{D\gamma^4.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^4}{1.2}\cdot\delta^2\right\}$$

DÉVELOPPEMENT de $\frac{D^5.\beta^4}{1.2\ldots5}$.

Développement 4.e, en ζ.	Développement 5.e, en η.		Développ.^{t} réduit.

$$\left.\begin{aligned}
&D\beta^4.D.\zeta\\
&+\frac{D^2\beta^4}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^2.\zeta\\&+\frac{D^2\gamma^2}{1.2}.D\delta^2.\varepsilon\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^3\beta^4}{1.2.3}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^3.\varepsilon\\&+\frac{D^2\gamma^3}{1.2}.\delta^2\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4}.D\gamma^4.\delta
\end{aligned}\right\}
=\left\{\begin{aligned}
&D\beta^4.\eta\\
&+\frac{D^2\beta^4}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^2.\zeta\\&+\frac{D^2\gamma^2}{1.2}.D\delta^2.\varepsilon\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^3\beta^4}{1.2.3}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^3.\varepsilon\\&+\frac{D^2\gamma^3}{1.2}.\delta^2\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4}.D\gamma^4.\delta
\end{aligned}\right.
\begin{matrix}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{matrix}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}
=\left\{\begin{aligned}
&4\beta^3.\eta\\
&+6\beta^2\left\{\begin{aligned}&2\gamma.\zeta\\&+2\delta.\varepsilon\end{aligned}\right.\\
&+4\beta\left\{\begin{aligned}&3\gamma^2.\varepsilon\\&+3\gamma.\delta^2\end{aligned}\right.\\
&+4\gamma^3.\delta
\end{aligned}\right.$$

DÉVELOPPEMENT de $\frac{D^6.\beta^4}{1.2\ldots6}$.

Développement 4.e, en ζ.	Développement 5.e, en η.	(*)	Développ.^{t} réduit.

$$\left.\begin{aligned}
&D\beta^4.\frac{D^2.\zeta}{1.2}\\
&+\frac{D^2\beta^4}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^2.D.\zeta\\&+\frac{D^2\gamma^2}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\delta^2.\zeta\\&+\frac{D^2\delta^2}{1.2}.\varepsilon^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^3\beta^4}{1.2.3}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^3.\zeta\\&+\frac{D^2\gamma^3}{1.2}.D\delta^2.\varepsilon\\&+\frac{D^3\gamma^3}{1.2.3}.\delta^3\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^4\beta^4}{1.2\ldots4}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^4.\varepsilon\\&+\frac{D^2\gamma^4}{1.2}.\delta^2\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}
=\left\{\begin{aligned}
&D\beta^4.D.\eta\\
&+\frac{D^2\beta^4}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^2.\eta\\&+\frac{D^2\gamma^2}{1.2}.\left\{\begin{aligned}&D\delta^2.\zeta\\&+\frac{D^2\delta^2}{1.2}.\varepsilon^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^3\beta^4}{1.2.3}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^3.\zeta\\&+\frac{D^2\gamma^3}{1.2}.D\delta^2.\varepsilon\\&+\frac{D^3\gamma^3}{1.2.3}.\delta^3\end{aligned}\right.\\
&+\frac{D^4\beta^4}{1.2\ldots4}.\left\{\begin{aligned}&D\gamma^4.\varepsilon\\&+\frac{D^2\gamma^4}{1.2}.\delta^2\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}
=\left\{\begin{matrix}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{matrix}\right\}
=\left\{\begin{aligned}
&4\beta^3.\theta\\
&+6\beta^2\left\{\begin{aligned}&2\gamma.\eta\\&+2\delta.\zeta\\&+\varepsilon^2\end{aligned}\right.\\
&+4\beta\left\{\begin{aligned}&3\gamma^2.\zeta\\&+3\gamma.2\delta.\varepsilon\\&+\delta^3\end{aligned}\right.\\
&+4\gamma^3.\varepsilon\\
&+6\gamma^2.\delta^2
\end{aligned}\right.$$

(*) On a omis le développement sixième, qui ne diffère du cinquième que dans le premier terme.

28. Il est essentiel de s'arrêter aux développemens réduits, placés dans les dernières colonnes, et dans lesquels, les dérivations ayant été effectuées, les signes D ne se trouvent plus nulle part.

On conclura d'abord de l'inspection des colonnes précédentes et des observations que l'on a déjà faites, que « pour déduire le développement réduit » de la dérivée (II) de celui de (I), on n'a jamais de dérivations à faire que » sur les dernières lettres de tous les termes de (I) et sur les avant-dernières » de quelques-uns de ces termes, et qu'on ne touche pas aux autres lettres. »

Ainsi, en ne faisant varier que les dernières lettres, l'expression suivante

$$4\beta^3.\eta + 6\beta^2(2\gamma.\zeta + 2\delta.\varepsilon) + 4\beta(3\gamma^2.\varepsilon + 3\gamma.\delta^2) + 4\gamma^3.\delta,$$

laquelle est le développement réduit de (I), donne pour la dérivée les termes suivans

$$4\beta^3.\theta + 6\beta^2(2\gamma.\eta + 2\delta.\zeta) + 4\beta(3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta\varepsilon) + 4\gamma^3.\varepsilon.$$

Les seuls termes de l'expression précédente dans lesquels il faille de plus faire varier les avant-dernières lettres, sont

$$6\beta^2.2\delta.\varepsilon + 4\beta.3\gamma.\delta^2 + 4\gamma^3.\delta;$$

ils donnent, par cette autre dérivation, les termes

$$6\beta^2.\frac{2\varepsilon\varepsilon}{2} + 4\beta.\frac{3\delta\delta^2}{3} + \frac{4.3\gamma^2\delta\delta}{2},$$

lesquels, étant ajoutés à ceux que nous venons d'obtenir, forment la dérivée

$$4\beta^3.\theta + 6\beta^2(2\gamma.\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2) + 4\beta(3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta\varepsilon + \delta^3) + 4\gamma^3.\varepsilon + 6\gamma^2.\delta^2,$$

ce qui est, comme l'on voit, le développement réduit de (II).

Les dérivations que l'on fait sur les dernières lettres de chaque terme, remplissent l'objet de la première partie de la règle n.° 24; celles que l'on fait sur les avant-dernières, et qui donnent des termes nouveaux dans la dérivée, satisfont à la seconde partie de la même règle.

Il est toujours facile de reconnoître dans les développemens réduits les termes sur lesquels il faut faire deux dérivations, et qui donnent des termes nouveaux dans la dérivée.

« Le caractère auquel on reconnoît ces termes, consiste en ce que, les lettres » étant disposées suivant leur ordre naturel, la dernière lettre du terme, ou sa » puissance, est précédée de la lettre immédiatement précédente dans l'ordre » des lettres, ou d'une puissance ou d'une fonction de cette même lettre. »

Ce caractère est exclusif, et il n'y a que les termes qui le portent qui soient susceptibles de deux dérivations.

En effet, supposons qu'on soit parvenu au développement en λ, et qu'on ait le terme . . . $\times \frac{D^m x^r}{1.2...m} \cdot \lambda^s$, où le dernier facteur λ^s n'est pas affecté du signe D (n.° 26), et où x^r a subi le plus de dérivations, car il n'y a que ce terme qui puisse donner un terme nouveau dans la dérivée (n.° 24); il résulte des n.os 21 et 26 que dans ce cas l'exposant s de λ doit être égal à l'indice m de D^m; le terme dont il s'agit, aura donc nécessairement cette forme . . . $\times \frac{D^m x^r}{1.2...m} \cdot \lambda^m$. Actuellement, on ne peut faire à l'égard de r que ces trois suppositions : ou r est $> m$, ou $r = m$, ou $r < m$.

1.° Si $r > m$; soit $r = m + n$, le terme .... $\times \frac{D^m x^r}{1.2...m} \cdot \lambda^s$ devient ... $\times \frac{D^m x^{m+n}}{1.2...m} \cdot \lambda^m$, et à cause de

$$\frac{D^m x^{m+n}}{1.2...m} = \frac{(m+n)(m+n-1)...(n+1)}{1. \quad 2 \;...\; m} x^n = \frac{(m+1)(m+2)...(m+n)}{1. \quad 2 \;...\; n} x^n,$$

on a . . . $\times \frac{D^m x^{m+n}}{1.2...m} \cdot \lambda^m = ... \times \frac{(m+1)(m+2)....(m+n)}{1. \quad 2 \;...\; n} x^n \cdot \lambda^m$,

où l'on voit λ^m précédée de x^n, x étant la lettre qui, dans l'ordre naturel, précède λ immédiatement. Aussi dans ce cas le terme est-il susceptible de deux dérivations, puisqu'il a les conditions exigées par la seconde partie de la règle n.° 24, et par le n.° 26.

2.° Si $r = m$; alors $\frac{D^m x^r}{1.2...m}$ devient $= \frac{D^m x^m}{1.2...m} = 1$; donc le terme ... $\times \frac{D^m x^r}{1.2...m} \cdot \lambda^m$ devient... $\times \lambda^m$, où x disparoît entièrement; donc la lettre λ ne sauroit être précédée de x. Aussi le terme ne sauroit-il donner aucun terme nouveau dans la dérivée parce qu'il est dans le cas désigné à la fin du n.° 26.

3.° Si $r < m$, le terme même disparoît et ne sauroit se trouver dans aucun développement, parce que $\frac{D^m x^m}{1.2...m}$ étant $= 1$, toutes les dérivées ultérieures $\frac{D^{m+n} x^m}{1.2...(m+n)}$ sont zéro.

29. Les dérivations dans ce §. II sont, comme on voit, toujours accompagnées des divisions par les produits convenables des nombres 1, 2, 3, 4, etc. Ces dérivations, les divisions y comprises, s'effectuent de la manière la plus aisée et sans que les coëfficiens numériques causent aucun embarras : nous en nommerons les résultats des dérivées divisées.

Si c'est sur une dernière lettre qu'il faut faire une dérivation, cette lettre est ou simple ou élevée à une puissance. Soit généralement $\varkappa^m$ la puissance de la dernière lettre ; on a pour la dérivée divisée $\text{D}.\varkappa^m = \text{D}\varkappa^m.\lambda = m\varkappa^{m-1}.\lambda$; et si $m = 1$, on a $\text{D}.\varkappa = \lambda$. Ainsi,

1.° « Pour prendre la dérivée divisée d'une lettre simple, on n'a qu'à écrire » la lettre suivante; » ce qui résulte d'ailleurs de la remarque faite n.° 27.

2.° « Pour prendre la dérivée divisée d'une puissance, on multipliera par » l'exposant de la puissance, lequel deviendra un coëfficient numérique ; on » changera une seule lettre dans la suivante, ce qui diminuera l'exposant » d'une unité: »

Si c'est sur une avant-dernière lettre qu'il faut faire une dérivation, cette lettre est ou élevée à une puissance, ou sous le signe de fonction.

Soit le terme ... $\times\, h\varkappa^m.\lambda^p$, où h est un coëfficient numérique ; la dérivée par rapport à $\varkappa$ est ... $h\dfrac{\text{D}.\varkappa^m}{p+1}.\lambda^p$, où l'on a divisé par $p+1$ (n.° 24), parce que l'exposant p de λ compte le nombre des dérivations que $\varkappa^m$ avoit déjà subies : or, $\text{D}.\varkappa^m = \text{D}\varkappa^m.\lambda = m\varkappa^{m-1}\lambda$; donc la dérivée sera ... $\times\, \dfrac{h\,m}{p+1}\varkappa^{m-1}\lambda^{p+1}$. Donc,

3.° « Pour prendre la dérivée divisée d'une avant-dernière lettre $\varkappa$ élevée à » une puissance, on multipliera par l'exposant de cette puissance, on diminuera » ensuite ce même exposant d'une unité, de laquelle on augmentera l'exposant » de la lettre suivante, et on divisera par ce dernier exposant ainsi augmenté. »

Si l'avant-dernière lettre est affectée du signe de fonction, le terme sera de cette forme $\dfrac{\text{D}^m\,\phi\alpha}{1.2\ldots m}.\beta^m$, et la dérivée divisée sera $\dfrac{\text{D}^{m+1}\,\phi\alpha}{1.2\ldots m\,(m+1)}\beta^{m+1}$; ainsi,

4.° « On fera une dérivation sur la fonction comme si $\text{D}\alpha$ étoit $= 1$, on » augmentera l'exposant de la lettre suivante β d'une unité, et on divisera par » cet exposant augmenté.

» En général, toutes les fois qu'il se forme une nouvelle puissance plus élevée » d'un degré, on divise par l'exposant de cette nouvelle puissance ; et toutes » les fois qu'une puissance s'abaisse d'un degré, on multiplie par l'exposant » non diminué. »

D'après

D'après cela, les dérivées suivantes de $\frac{D^6.\beta^4}{1.2\ldots 6}$ se déduisent facilement du développement réduit de cette quantité (n.° 27), et l'on a sur le champ

$$\frac{D^7.\beta^4}{1.2\ldots 7} = 4\beta^3.\iota + 6\beta^2(2\gamma.\theta + 2\delta.\eta + 2\varepsilon\zeta) + 4\beta\left\{3\gamma^2.\eta + 3\gamma\left(2\delta.\zeta + \frac{2\varepsilon^2}{2}\right) + 3\delta^2.\varepsilon\right\}$$
$$+ 4\gamma^3.\zeta + 6\gamma^2.2\delta\varepsilon + \frac{6.2\gamma\delta^3}{3};$$

$$\frac{D^8.\beta^4}{1.2\ldots 8} = 4\beta^3.\kappa + 6\beta^2(2\gamma.\iota + 2\delta.\theta + 2\varepsilon\eta + \zeta^2) + 4\beta\{3\gamma^2.\theta + 3\gamma(2\delta.\eta + 2\varepsilon\zeta)$$
$$+ 3\delta^2.\zeta + 3\delta\varepsilon^2\} + 4\gamma^3.\eta + 6\gamma^2(2\delta\zeta + \varepsilon^2) + 4\gamma 3\delta^2\varepsilon + \delta^4.$$

On peut remarquer que toutes les fois qu'on arrive à un terme susceptible des deux dérivations, on les fait de suite et avant que de passer au terme suivant.

30. En rassemblant les observations que nous venons de faire, on parvient à cette règle très-simple, pour former les dérivées divisées et développées :

RÈGLE.

Pour faire les dérivations qui servent à déduire le développement de $\frac{D^{n+1}.\varphi\alpha}{1.2\ldots n.(n+1)}$ *de celui de* $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2\ldots n}$; *après avoir disposé les lettres suivant leur ordre de succession,*

1.° *On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière lettre ou sa puissance, en suivant les règles des différentiations, et en mettant simplement* β *pour* $D.\alpha$, γ *pour* $D.\beta$, δ *pour* $D.\gamma$, *etc., sans autre coëfficient que l'unité.*

2.° *On fera de plus varier l'avant-dernière lettre, sa puissance ou sa fonction, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre alphabétique, précède immédiatement la dernière du terme; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par l'exposant ainsi augmenté.*

Cette règle est d'une pratique extrêmement aisée : elle ne fait jamais calculer qu'une seule fois les produits composés des mêmes lettres; elle donne les coëfficiens numériques sans la moindre peine : de sorte qu'avec son aide on déduit les uns des autres les termes de la série déjà tout réduits, et avec tant de facilité qu'il n'en coûte que la peine de les écrire.

31. On peut appliquer cette règle aux exemples déjà calculés, n.os 12, 14, 16; mais donnons-en encore d'autres, afin de mieux montrer la marche facile et rapide du calcul.

EXEMPLE I.

Développer la puissance quelconque m d'un polynome quelconque,

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{etc.})^m,$$

en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{etc.}$$

Nous avons $A = \alpha^m$; de là on déduit successivement B, C, D déjà tout réduits, ainsi qu'il suit :

$$A = \alpha^m,$$

$$B = m\alpha^{m-1}.\beta,$$

$$C = m\alpha^{m-1}.\gamma + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2,$$

$$D = m\alpha^{m-1}.\delta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\beta\gamma + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.\beta^3,$$

$$E = m\alpha^{m-1}.\varepsilon + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\beta^2\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}.\beta^4,$$

$$F = m\alpha^{m-1}.\zeta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2)$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}.4\beta^3\gamma + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}\alpha^{m-5}.\beta^5,$$

$$G = m\alpha^{m-1}.\eta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}(2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}(3\beta^2\varepsilon$$
$$+ 3\beta.2\gamma\delta + \gamma^3) + \frac{m\ldots m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}.(4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2) + \frac{m\ldots m-4}{1\ldots 5}\alpha^{m-5}.5\beta^4\gamma$$
$$+ \frac{m\ldots m-5}{1\ldots 6}\alpha^{m-6}.\beta^6,$$

etc. On peut continuer avec la même facilité autant qu'on voudra.

Si le procédé pouvoit encore avoir besoin d'explication après ce qui en a été dit précédemment, nous en donnerions l'indication suivante.

Qu'on soit parvenu à D, par exemple, et qu'on veuille en déduire E : le premier terme $m\alpha^{m-1}\delta$ donne, en changeant la dernière lettre δ en ε, $m\alpha^{m-1}.\varepsilon$; et comme δ n'est pas précédé de γ dans ce terme de D, mais bien de α, je passe au terme suivant $\frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\beta\gamma$. J'y change d'abord la dernière lettre

γ en δ; j'ai $\frac{m.m-1}{1.\ 2}\alpha^{m-2}.2\beta\delta$, et', comme dans le terme, γ est précédé de β, qui est la lettre qui précède γ immédiatement dans l'ordre alphabétique, il faut aussi changer β en γ, et j'ai de plus $\frac{m.m-1}{1.\ 2}\alpha^{m-2}\gamma^2$, en divisant par 2, parce qu'il se forme une nouvelle puissance γ^2. Le troisième terme $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{m-3}\beta^3$, contenant deux lettres voisines, donne aussi deux termes pour la dérivée, savoir $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{m-3}.3\beta^2\gamma$ en faisant varier β, et $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha^{m-4}\beta^4$ en faisant varier α. La réunion des quantités que nous venons de former, compose la valeur de E.

Exemple II.

32. Développer

$$\cos(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{etc.})$$

en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

On a $A = \cos\alpha$; de là, $B = -\sin\alpha.\beta$; continuant les dérivations, on a sur le champ, et sans être obligé de faire aucune réduction, ce qui suit :

$A = \cos\alpha$,

$B = -\sin\alpha.\beta$,

$C = -\sin\alpha.\gamma - \frac{\cos\alpha}{1.2}.\beta^2$,

$D = -\sin\alpha.\delta - \frac{\cos\alpha}{1.2}.2\beta\gamma + \frac{\sin\alpha}{1.2.3}.\beta^3$,

$E = -\sin\alpha.\varepsilon - \frac{\cos\alpha}{1.2}.(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{\sin\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{\cos\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4$,

$F = -\sin\alpha.\zeta - \frac{\cos\alpha}{1.2}.(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{\sin\alpha}{1.2.3}.(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2)$
$\qquad + \frac{\cos\alpha}{1.2.3.4}.4\beta^3\gamma - \frac{\sin\alpha}{1.2...5}.\beta^5$,

$G = -\sin\alpha.\eta - \frac{\cos\alpha}{1.2}.(2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \frac{\sin\alpha}{1.2.3}.(3\beta^2\varepsilon + 3\beta2\gamma\delta + \gamma^3)$
$\qquad + \frac{\cos\alpha}{1...4}.(4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2) - \frac{\sin\alpha}{1...5}.5\beta^4\gamma - \frac{\cos\alpha}{1...6}.\beta^6$,

etc., et ainsi de suite.

33. Mais sans nous arrêter plus long-temps à des cas particuliers, nous allons donner onze termes du développement du cas général où la fonction du polynome est quelconque, connue ou inconnue.

Soit donc la fonction exprimée généralement par

$$\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{etc.}):$$

le premier terme du développement est $\phi\alpha$; en suivant la règle du numéro 30, on écrit sur le champ les termes suivans, chacun se déduisant de celui qui le précède; voici le développement :

$$\phi\alpha + \mathrm{D}\phi\alpha.\beta.x + \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\gamma + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\beta^2\right) x^2$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\delta + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.2\beta\gamma + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.\beta^3\right) x^3$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\varepsilon + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\{2\beta\delta + \gamma^2\} + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma + \frac{\mathrm{D}^4\phi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4\right) x^4$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\zeta + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\{2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta\} + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.\{3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2\} + \frac{\mathrm{D}^4\phi\alpha}{1.2.3.4}.4\beta^3\gamma + \frac{\mathrm{D}^5\phi\alpha}{1.2...5}.\beta^5\right) x^5$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\eta + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\{2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2\} + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.\left\{\begin{matrix}3\beta^2\varepsilon + 3\beta 2\gamma\delta \\ + \gamma^3\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^4\phi\alpha}{1.2...4}.\{4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2\} + \frac{\mathrm{D}^5\phi\alpha}{1.2...5}.5\beta^4\gamma + \frac{\mathrm{D}^6\phi\alpha}{1.2...6}.\beta^6\right) x^6$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\theta + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\{2\beta\eta + 2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon\} + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.\left\{\begin{matrix}3\beta^2\zeta + 3\beta(2\gamma\varepsilon + \delta^2) \\ + 3\gamma^2\delta\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^4\phi\alpha}{1....4}.\left\{\begin{matrix}4\beta^3\varepsilon + 6\beta^2 2\gamma\delta \\ + 4\beta\gamma^3\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^5\phi\alpha}{1....5}.\{5\beta^4\delta + 10\beta^3\gamma^2\} + \frac{\mathrm{D}^6\phi\alpha}{1....6}.6\beta^5\gamma + \frac{\mathrm{D}^7\phi\alpha}{1....7}.\beta^7\right) x^7$$

$$+ \left(\mathrm{D}\phi\alpha.\iota + \frac{\mathrm{D}^2\phi\alpha}{1.2}.\{2\beta\theta + 2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2\} + \frac{\mathrm{D}^3\phi\alpha}{1.2.3}.\left\{\begin{matrix}3\beta^2\eta + 3\beta(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) \\ + 3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^4\phi\alpha}{1...4}.\left\{\begin{matrix}4\beta^3\zeta + 6\beta^2(2\gamma\varepsilon + \delta^2) \\ + 4\beta 3\gamma^2\delta + \gamma^4\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^5\phi\alpha}{1....5}.\left\{\begin{matrix}5\beta^4\varepsilon + 10\beta^3 2\gamma\delta \\ + 10\beta^2\gamma^3\end{matrix}\right\} + \frac{\mathrm{D}^6\phi\alpha}{1...6}.\{6\beta^5\delta + 15\beta^4\gamma^2\} + \frac{\mathrm{D}^7\phi\alpha}{1...7}.7\beta^6\gamma + \frac{\mathrm{D}^8\phi\alpha}{1....8}.\beta^8\right) x^8$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha \cdot \kappa \\
&+ \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2} \cdot \{2\beta\iota + 2\gamma\theta + 2\delta\eta + 2\varepsilon\zeta\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 3\beta^2\theta + 3\beta(2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2) \\ \quad + 3\gamma^2\zeta + 3\gamma 2\delta\varepsilon + \delta^3 \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1 \ldots 4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4\beta^3\eta + 6\beta^2(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) \\ + 4\beta(3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2) + 4\gamma^3\delta \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^5\varphi\alpha}{1 \ldots 5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 5\beta^4\zeta + 10\beta^3(2\gamma\varepsilon + \delta^2) \\ \quad + 10\beta^2 3\gamma^2\delta + 5\beta\gamma^4 \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^6\varphi\alpha}{1 \ldots 6} \cdot \{6\beta^5\varepsilon + 15\beta^4 2\gamma\delta + 20\beta^3\gamma^3\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^7\varphi\alpha}{1 \ldots 7} \cdot \{7\beta^6\delta + 21\beta^5\gamma^2\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^8\varphi\alpha}{1 \ldots 8} \cdot 8\beta^7\gamma \\
&+ \frac{\mathrm{D}^9\varphi\alpha}{1 \ldots 9} \cdot \beta^9
\end{aligned}
\quad \Bigg| \; x^9
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha \cdot \lambda \\
&+ \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2} \cdot \{2\beta\kappa + 2\gamma\iota + 2\delta\theta + 2\varepsilon\eta + \zeta^2\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 3\beta^2\iota + 3\beta(2\gamma\theta + 2\delta\eta + 2\varepsilon\zeta) \\ + 3\gamma^2\eta + 3\gamma(2\delta\zeta + \varepsilon^2) + 3\delta^2\varepsilon \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1 \ldots 4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4\beta^3\theta + 6\beta^2(2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2) \\ + 4\beta(3\gamma^2\zeta + 3\gamma 2\delta\varepsilon + \delta^3) + 4\gamma^3\varepsilon + 6\gamma^2\delta^2 \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^5\varphi\alpha}{1 \ldots 5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 5\beta^4\eta + 10\beta^3(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) \\ + 10\beta^2(3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2) + 5\beta 4\gamma^3\delta + \gamma^5 \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^6\varphi\alpha}{1 \ldots 6} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 6\beta^5\zeta + 15\beta^4(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 20\beta^3 3\gamma^2\delta \\ \qquad + 15\beta^2\gamma^4 \end{array} \right\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^7\varphi\alpha}{1 \ldots 7} \cdot \{7\beta^6\varepsilon + 21\beta^5 2\gamma\delta + 35\beta^4\gamma^3\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^8\varphi\alpha}{1 \ldots 8} \cdot \{8\beta^7\delta + 28\beta^6\gamma^2\} \\
&+ \frac{\mathrm{D}^9\varphi\alpha}{1 \ldots 9} \cdot 9\beta^8\gamma \\
&+ \frac{\mathrm{D}^{10}\varphi\alpha}{1 \ldots 10} \cdot \beta^{10}
\end{aligned}
\quad \Bigg| \; x^{10}
$$

etc. On peut continuer ainsi sans peine autant qu'on voudra.

34. On pourroit développer de la même manière les fonctions suivantes,
tang$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, cotang$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$,
arc.sin$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, arc.cos$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$,
log.sin$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, log.cos$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$,
et toutes sortes d'autres fonctions. Mais comme les quantités polynomiales demeurent toujours les mêmes, et que les seules $\mathrm{D}\varphi\alpha$, $\frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}$, $\frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}$, etc. changent avec la nature de la fonction; que d'ailleurs ces dernières quantités se trouvent toujours par les règles du calcul différentiel, puisqu'elles ne sont autre chose que $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$, $\frac{d^2\varphi\alpha}{1.2\,d\alpha^2}$, $\frac{d^3\varphi\alpha}{1.2.3\,d\alpha^3}$, etc., $d\alpha$ étant constante;

il suffira de substituer les valeurs de ces quantités dans le développement du numéro précédent, pour avoir celui de chaque fonction particulière.

On remarque, sans que j'en avertisse, que si le polynome n'est composé que d'un nombre limité de termes, comme si l'on a $\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$, il suffit de traiter comme constant le coëfficient γ du dernier terme de ce polynome ; de cette manière on ne calcule rien de superflu, et on a sur le champ le résultat tout réduit.

35. Si ce n'est pas les dérivées divisées qu'on demande à déduire les unes des autres, mais bien les dérivées simples $\text{D}.\phi\alpha$, $\text{D}^2.\phi\alpha$, $\text{D}^3.\phi\alpha$, etc., dégagées des divisions par les produits convenables de 1, 2, 3, 4, etc. ; voici comment on s'y prendra.

Soit en général $\text{D}^n.\phi\alpha$ *développée et réduite ; pour en déduire* $\text{D}^{n+1}.\phi\alpha$, *on multiplie chaque terme de la dérivée proposée par* $n+1$, *indice de la nouvelle dérivée, et l'on exécute les dérivations par la règle du n.° 30.*

Ainsi l'on trouve

$$\text{D}.\phi\alpha = \text{D}\phi\alpha.\beta,$$

$$\text{D}^2.\phi\alpha = 2\text{D}\phi\alpha.\gamma + \text{D}^2\phi\alpha.\beta^2,$$

$$\text{D}^3.\phi\alpha = 2.3\,\text{D}\phi\alpha.\delta + 3\,\text{D}^2\phi\alpha.2\beta\gamma + \text{D}^3\phi\alpha.\beta^3,$$

$$\text{D}^4.\phi\alpha = 2.3.4\,\text{D}\phi\alpha.\varepsilon + 3.4\,\text{D}^2\phi\alpha.(2\beta\delta + \gamma^2) + 4\,\text{D}^3\phi\alpha.3\beta^2\gamma + \text{D}^4\phi\alpha.\beta^4,$$

et ainsi de suite.

La règle précédente découle immédiatement de celle du n.° 30. En effet, il est facile de voir qu'elle mène au même résultat que l'on obtiendroit en calculant $\frac{\text{D}^{n+1}.\phi\alpha}{1.2...(n+1)}$ par la règle du n.° 30, et en multipliant ensuite chaque terme par le produit 1, 2, 3... $n(n+1)$, afin d'avoir $\text{D}^{n+1}.\phi\alpha$.

36. Jusqu'à présent nous avons déduit chaque dérivée de celle qui la précède immédiatement, mais nous pouvons aussi faire l'inverse, et déduire en rétrogradant une dérivée quelconque de celle qui la suit immédiatement et qui est d'un ordre plus élevé d'une unité, c'est-à-dire, déduire le coëfficient de x^{n-1} dans la série, de celui de x^n. On peut nommer cette opération une *dérivation inverse*, et la désigner par D^{-1} ou par S, en faisant $\text{S} = \text{D}^{-1}$, (S est une petite capitale de caractère romain) : cette opération répond à l'intégration comme la dérivation directe répond à la différentiation.

Pour déduire une dérivée divisée de la dérivée divisée de l'ordre immédiatement supérieur, on observera la règle suivante :

Règle.

Soit donnée $\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2...n}$ *développée et réduite : pour remonter de cette dérivée à celle qui la précède d'un rang, savoir à* $\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\varphi\alpha}{1.2...(n-1)}$,

1.° *Rejetez tous les termes où les dernières lettres sont élevées à des puissances plus hautes que la première ;*

2.° *Dans chaque terme terminé par une lettre simple, changez cette dernière lettre du terme en celle qui la précède dans l'ordre alphabétique, et toutes les fois qu'il se forme une nouvelle puissance, divisez par son exposant.*

Ainsi, soit donné, par exemple,

$$\frac{\mathrm{D}^6.\varphi\alpha}{1....6} = \mathrm{D}\varphi\alpha.\eta + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.(2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.(3\beta^2\varepsilon + 3\beta 2\gamma\delta + \gamma^3)$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1....4}.(4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2) + \frac{\mathrm{D}^5\varphi\alpha}{1....5}.5\beta^4\gamma + \frac{\mathrm{D}^6\varphi\alpha}{1....6}.\beta^6;$$

on trouve par la règle précédente, pour la dérivée inverse $\frac{\mathrm{D}^5.\varphi\alpha}{1....5}$,

$$\mathrm{D}\varphi\alpha.\zeta + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) + \frac{\mathrm{D}^4\varphi\alpha}{1....4}.4\beta^3\gamma$$
$$+ \frac{\mathrm{D}^5\varphi\alpha}{1....5}.\beta^5.$$

Cette règle est l'inverse de celle du n.° 30, et il est aisé d'en sentir la raison, sans qu'il soit nécessaire d'y insister ; il suffit d'observer que les termes qu'on rejette sont ceux qui, dans les dérivées directes, proviennent des dérivations faites sur les avant-dernières lettres.

On peut calculer par cette règle, dans un ordre inverse, les termes du développement du n.° 33, ce qui sert à la pratiquer et me dispense de l'appliquer à d'autres exemples.

37. S'il s'agit de faire des dérivations inverses pour former des dérivées simples, c'est-à-dire non divisées, on observera la règle suivante :

Soit donnée $D^n.\varphi\alpha$ développée et réduite; pour remonter de cette dérivée à celle de l'ordre immédiatement inférieur, $D^{n-1}.\varphi\alpha$, divisez toute l'expression par n, indice de la dérivée proposée, et suivez au reste la règle du n.° 36.

Ainsi de

$$D^4.\varphi\alpha = 24\,D\varphi\alpha.\varepsilon + 12\,D^2\varphi\alpha.(2\beta\delta + \gamma^2) + 4D^3\varphi\alpha.3\beta^2\gamma + D^4\varphi\alpha.\beta^4,$$

on déduit par cette règle

$$D^3.\varphi\alpha = 6\,D\varphi\alpha.\delta + 3\,D^2\varphi\alpha.2\beta\gamma + D^3\varphi\alpha.\beta^3.$$

Cette règle est un corollaire des n.os 35 et 36.

38. Voici une autre manière de parvenir à la règle du n.° 30, qui est à quelques égards plus simple et même plus directe que celle que nous avons employée. Elle ne suppose que ce qui a été dit n.os 1, 2, 3 et la règle du développement des puissances des binomes, et mériteroit peut-être la préférence dans une exposition abrégée de la méthode.

Dans $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})$ on peut considérer le polynome $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ comme engendré de la manière suivante : soit d'abord α seule et soit βx son accroissement, on aura $\alpha + \beta x$; soit actuellement γx l'accroissement de β, on aura $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; soit encore δx l'accroissement de γ, le polynome deviendra $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, et ainsi de suite.

Or, si on avoit d'abord $\varphi(\alpha + \beta x)$, βx étant l'accroissement de α, le développement seroit, n.os 2 et 3,

$$\varphi(\alpha + \beta x) =$$

$$\varphi\alpha + D\varphi\alpha.\beta x + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\beta^2 x^2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3 x^3 + \frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4 x^4 + \text{etc.}$$

Que β croisse maintenant de γx, on aura d'une part

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2),$$

et de l'autre, en mettant $\beta + \gamma x$ au lieu de β dans β, β^2, β^3, etc. considérées comme des fonctions de $\beta + \gamma x$, et ordonnant par rapport à x,

$$\varphi\alpha + D\varphi\alpha.\beta x + D\varphi\alpha.\gamma x.x$$

$$+ \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\beta^2 x^2 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.D\beta^2.\gamma x.x^2 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^2\beta^2}{1.2}.\gamma^2 x^2.x^2.$$

$$+ \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3 x^3 \quad + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.D\beta^3.\gamma x.x^3 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4 x^4 + \text{etc.}$$

Si

Si on met, de plus, $\gamma + \delta x$ au lieu de γ, ensuite $\delta + \varepsilon x$ au lieu de δ, etc.; on aura, d'une part,

$$\varphi(\alpha + \mathcal{C}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}),$$

et de l'autre,

$$\begin{aligned}
&\varphi\alpha + \text{D}\varphi\alpha.\mathcal{C}x + \text{D}\varphi\alpha.\gamma x.x + \text{D}\varphi\alpha.\delta x.x^2 + \text{D}\varphi\alpha.\varepsilon x.x^3 + \text{etc.}\\
&\quad + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\mathcal{C}^2x^2 + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\text{D}\mathcal{C}^2.\gamma x.x^2 + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\text{D}\mathcal{C}^2.\delta x.x^3\\
&\quad\quad + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\mathcal{C}^3x^3 + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{\text{D}^2\mathcal{C}^2}{1.2}.\gamma^2x^2.x^2\\
&\quad\quad\quad + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\text{D}\mathcal{C}^3.\gamma x.x^3\\
&\quad\quad\quad + \frac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2..4}.\mathcal{C}^4x^4
\end{aligned}$$

Maintenant, après avoir calculé quelques termes de plus, qu'on fasse abstraction des x et qu'on suppose simplement l'accroissement de $\alpha = \mathcal{C}$, celui de $\mathcal{C} = \gamma$, etc., ou bien $\text{D}.\alpha = \mathcal{C}$, $\text{D}.\mathcal{C} = \gamma$, $\text{D}.\gamma = \delta$, etc., et qu'on examine de quelle manière le coëfficient d'un terme quelconque dérive du précédent, on parviendra sans peine à la règle du n.° 30.

Si de plus on observe que $\gamma = \text{D}.\mathcal{C}$; $\delta = \text{D}.\gamma = \frac{\text{D}^2.\mathcal{C}}{1.2}$, $\text{D}\mathcal{C}^2.\gamma = \text{D}\mathcal{C}^2.\text{D}.\mathcal{C} = \text{D}.\mathcal{C}^2$; $\varepsilon = \frac{\text{D}^3.\mathcal{C}}{1.2.3}$, $\text{D}\mathcal{C}^2.\delta + \frac{\text{D}^2\mathcal{C}^2}{1.2}.\gamma^2 = \text{D}\mathcal{C}^2.\frac{\text{D}^2.\mathcal{C}}{1.2} + \frac{\text{D}^2\mathcal{C}^2}{1.2}(\text{D}.\mathcal{C})^2 = \frac{\text{D}^2.\mathcal{C}^2}{1.2}$; $\text{D}\mathcal{C}^3.\gamma = \text{D}.\mathcal{C}^3$, et ainsi de suite; on aura les premiers termes de la série (2) du n.° 21; d'où l'on conclura, quoique par une sorte d'induction, le théorème du n.° 20.

39. Introduisons ici pour les dérivées divisées une notation plus simple, dont nous ferons souvent usage par la suite. Puisque dans $\frac{\text{D}^m.\varphi\alpha}{1.2.3...m}$, $\frac{\text{D}^m.\mathcal{C}_r}{1.2...m}$, le dénominateur se forme d'après l'indice ou exposant m du signe dérivatif D, ce dénominateur n'étant autre chose que le produit des nombres naturels 1, 2, 3, etc. m, dont le dernier est cet indice même; nous proposons de mettre D_c^m au lieu de $\frac{\text{D}^m}{1.2.3...m}$, le c au-dessous du D indiquant un coëfficient dénominateur, déterminé par l'indice m. Ainsi on écrira indistinctement $\text{D}_c^2\varphi\alpha$ ou $\frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}$, $\text{D}_c^3\varphi\alpha$ ou $\frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}$; $\text{D}_c^2.\mathcal{C}'$ ou $\frac{\text{D}^2.\mathcal{C}'}{1.2}$, $\text{D}_c^3.\mathcal{C}'$ ou $\frac{\text{D}^3.\mathcal{C}'}{1.2.3}$, $\text{D}_c^4.\mathcal{C}'$ ou $\frac{\text{D}^4.\mathcal{C}'}{1.2.3.4}$, etc.

§. III.

Manières de calculer un terme quelconque du développement indépendamment de tous les autres.

40. La méthode que nous venons de donner offre des moyens simples de calculer un terme quelconque de la série dans laquelle se développe la fonction du polynome, sans qu'on ait besoin de connoître les termes précédens ou subséquens; car les termes de ce développement sont la plupart composés eux-mêmes de plusieurs autres termes, et comme il est toujours facile d'avoir un de ceux-ci, tels que le premier ou le dernier, on peut en déduire les autres par dérivation, à peu près comme nous avons fait dériver les termes même de la série les uns des autres. Ces manières de calculer un terme de la série, isolé et hors de rang, étant souvent d'une grande utilité, nous les présenterons avec quelque détail; elles sont fondées sur les formules des n.ºs 20 et 22 : comme celle qui résulte de la dernière de ces formules est la plus facile, nous allons l'exposer la première.

Observons d'abord en général, que, puisque les quantités affectées du signe de fonction, $\mathrm{D}\varphi\alpha$, $\mathfrak{D}^2\varphi\alpha$, $\mathfrak{D}^3\varphi\alpha$, etc., qui entrent dans les formules citées, se calculent par les règles des différentiations, tout se réduit à faire voir comment on développe, en les faisant dériver les unes des autres, les quantités que nous avons nommées polynomiales.

PREMIÈRE MANIÈRE.

41. Prenons la formule du n.° 22, savoir :

$$\mathfrak{D}^n.\varphi\alpha = \mathfrak{D}^n\varphi\alpha.\varsigma^n + \mathfrak{D}^{n-1}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\varsigma^{n-1} + \mathfrak{D}^{n-2}\varphi\alpha.\mathfrak{D}^2.\varsigma^{n-2} + \text{etc.} + \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathfrak{D}^{n-1}.\varsigma;$$

les quantités polynomiales à développer se suivent dans cet ordre,

$$\varsigma^n,\ \mathrm{D}.\varsigma^{n-1},\ \ \mathfrak{D}^2.\varsigma^{n-2},\ \ \mathfrak{D}^3.\varsigma^{n-3},\ \text{etc.}\ \ \mathfrak{D}^{n-1}.\varsigma,$$

et les exposans de ς sous le signe D vont toujours en diminuant.

Pour faire dériver le développement d'une quelconque de ces quantités de celle qui la précède et dont le développement est connu, voici le procédé qu'il faut suivre. 1.° Il est nécessaire avant tout de faire sur le développement proposé une préparation, qui consiste à diminuer dans chaque terme l'exposant de ς d'une unité, à changer en conséquence les coëfficiens numériques qui proviennent des exposans de ς, et à rejeter les termes où ς

n'entre pas. 2.° Après cette préparation, on fera les dérivations conformément à la règle du n.° 30.

Cela suppose qu'ayant en général $\mathfrak{d}^m.\beta^r$, on en déduise d'abord $\mathfrak{d}^m.\beta^{r-1}$, et ensuite $\mathfrak{d}^{m+1}.\beta^{r-1}$ de $\mathfrak{d}^m.\beta^{r-1}$. Si on donne à chacune de ces trois expressions un premier développement, on y lira la démonstration du procédé. En effet on a, n.os 25 et 26,

$$\mathfrak{d}^m.\beta^r = r\beta^{r-1}.\mathfrak{d}^{m-1}.\gamma + \frac{r.r-1}{1.2}\beta^{r-2}.\mathfrak{d}^{m-2}.\gamma^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}\beta^{r-3}.\mathfrak{d}^{m-3}.\gamma^3$$
$$+ \text{etc.} + r\beta.\mathfrak{d}^{m-r+1}.\gamma^{r-1} + \mathfrak{d}^{m-r}.\gamma^r, \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\mathfrak{d}^m.\beta^{r-1} = (r-1)\beta^{r-2}\mathfrak{d}^{m-1}.\gamma + \frac{r-1.r-2}{1.2}\beta^{r-3}\mathfrak{d}^{m-2}.\gamma^2 + \frac{r-1.r-2.r-3}{1.2.3}\beta^{r-4}.\mathfrak{d}^{m-3}.\gamma^3$$
$$+ \text{etc.} + (r-1)\beta.\mathfrak{d}^{m-r+2}.\gamma^{r-2} + \mathfrak{d}^{m-r+1}.\gamma^{r-1}; \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\mathfrak{d}^{m+1}.\beta^{r-1} = (r-1)\beta^{r-2}.\mathfrak{d}^m.\gamma + \frac{r-1.r-2}{1.2}\beta^{r-3}.\mathfrak{d}^{m-1}.\gamma^2 + \frac{r-1.r-2.r-3}{1.2.3}\beta^{r-4}\mathfrak{d}^{m-2}.\gamma^3$$
$$+ \text{etc.} + (r-1)\beta.\mathfrak{d}^{m-r+3}.\gamma^{r-2} + \mathfrak{d}^{m-r+2}.\gamma^{r-1}. \quad \ldots\ldots(3)$$

L'inspection des formules (1) et (2) démontre la 1.re partie du procédé; et puisque la formule (3) n'est autre chose que la dérivée divisée de la formule (2), la 2.de partie du procédé est aussi démontrée.

42. Pour donner un exemple de ces dérivations, soit $\beta^a = \beta^9$; on en déduit successivement, par notre procédé,

$$8\beta^7.\gamma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = D.\beta^8$$
$$7\beta^6.\delta + \frac{7.6}{1.2}\beta^5.\gamma^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \mathfrak{d}^2.\beta^7$$
$$6\beta^5.\varepsilon + \frac{6.5}{1.2}\beta^4.2\gamma\delta + \frac{6.5.4}{1.2.3}\beta^3.\gamma^3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \mathfrak{d}^3.\beta^6$$
$$5\beta^4.\zeta + \frac{5.4}{1.2}\beta^3.(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \frac{5.4.3}{1.2.3}\beta^2.3\gamma^2\delta + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\beta.\gamma^4, \quad = \mathfrak{d}^4.\beta^5$$
$$4\beta^3.\eta + \frac{4.3}{1.2}\beta^2.(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) + \frac{4.3.2}{1.2.3}\beta.(3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2) + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}.4\gamma^3\delta, = \mathfrak{d}^5.\beta^4$$
$$3\beta^2.\theta + \frac{3.2}{1.2}\beta.(2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2) + \frac{3.2.1}{1.2.3}(3\gamma^2\zeta + 3\gamma 2\delta\varepsilon + \delta^3), = \mathfrak{d}^6.\beta^3$$
$$2\beta.\iota + \frac{2.1}{1.2}(2\gamma\theta + 2\delta\eta + 2\varepsilon\zeta), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \mathfrak{d}^7.\beta^2$$
$$1\kappa. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \mathfrak{d}^8.\beta.$$

Le calcul dérivatif de ces quantités est si facile qu'il n'y a guère d'autre

peine que celle de les écrire ; car les coëfficiens numériques placés avant $\mathcal{C}$ sont ceux qui naissent du développement des puissances du binome : il est donc très-aisé, en passant d'une ligne à l'autre, de les changer en ceux qui appartiennent à des puissances de $\mathcal{C}$ inférieures d'un degré. Dans cet exemple, je n'ai pas réduit les coëfficiens numériques, et j'ai laissé ceux de $\mathcal{C}$ séparés des autres, afin de faire voir plus clairement la marche des préparations. Rien n'empêche de réduire les coëfficiens; il est même avantageux de le faire, pour la simplicité des expressions.

Quand on fait ces réductions, le changement à faire aux coëfficiens numériques, en conséquence de l'abaissement des puissances de $\mathcal{C}$, pour passer du développement de $\mathrm{D}^m.\mathcal{C}^r$ à celui de $\mathrm{D}^m.\mathcal{C}^{r-1}$, se réduit à multiplier dans $\mathrm{D}^m.\mathcal{C}^r$ chaque puissance de $\mathcal{C}$ par son exposant et à diviser tous les termes par r. Cela résulte encore de la comparaison des formules (1) et (2) du n.° précédent.

43. On peut donc prescrire, pour ces sortes de dérivations, la règle suivante :

RÈGLE.

Le développement de $\mathrm{D}^m.\mathcal{C}^r$ *étant donné, pour en déduire celui de* $\mathrm{D}^{m+1}.\mathcal{C}^{r-1}$, 1.° *divisez toute l'expression par* r, *multipliez chaque puissance de* $\mathcal{C}$ *par son exposant et diminuez cet exposant de l'unité, en observant que dans les termes sans* $\mathcal{C}$ *cet exposant est zéro.* 2.° *Après cette préparation, faites les dérivations conformément à la règle du n.°* 30.

44. EXEMPLE I. Trouver immédiatement le coëfficient du 8.e terme du développement de $\varphi(\alpha + \mathcal{C}x + \gamma x^2 + \text{etc.})$.

Ce coëfficient est $\mathrm{D}^7.\varphi\alpha$, qu'il s'agit de développer. On a d'abord, n.° 22,

$$\mathrm{D}^7.\varphi\alpha = \mathrm{D}^7\varphi\alpha.\mathcal{C}^7 + \mathrm{D}^6\varphi\alpha.\mathrm{D}.\mathcal{C}^6 + \mathrm{D}^5\varphi\alpha.\mathrm{D}^2.\mathcal{C}^5 + \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\mathrm{D}^3.\mathcal{C}^4 + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\mathrm{D}^4.\mathcal{C}^3 + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\mathrm{D}^5.\mathcal{C}^2 + \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}^6.\mathcal{C};$$

on voit donc que la question se réduit à celle-ci : étant donné $\mathrm{D}^7\varphi\alpha.\mathcal{C}^7$, c'est-à-dire, la valeur de $\mathrm{D}^7.\varphi\alpha$ lorsque le polynome se réduit au binome $\alpha + \mathcal{C}x$, déduire de ce terme tous les autres qui complettent le développement de $\mathrm{D}^7.\varphi\alpha$ lorsque le polynome a un nombre quelconque de termes.

En

En suivant la règle précédente, on a sur le champ

$$\underset{c}{\mathfrak{D}}^{7}.\varphi\alpha = \mathfrak{D}^{7}\varphi\alpha.\beta^{7} + \mathfrak{D}^{6}\varphi\alpha.6\beta^{5}.\gamma$$
$$+ \mathfrak{D}^{5}\varphi\alpha(5\beta^{4}.\delta + 10\beta^{3}\gamma^{2}) + \mathfrak{D}^{4}\varphi\alpha(4\beta^{3}.\varepsilon + 6\beta^{2}\,2\gamma\delta + 4\beta\gamma^{3})$$
$$+ \mathfrak{D}^{3}\varphi\alpha\{3\beta^{2}.\zeta + 3\beta(2\gamma\varepsilon + \delta^{2}) + 3\gamma^{2}\delta\}$$
$$+ \mathfrak{D}^{2}\varphi\alpha(2\beta.\eta + 2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) + \mathrm{D}\varphi\alpha.\theta.$$

Exemple II. Trouver immédiatement le coëfficient de x^6 dans le développement de $\sin(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$.

La formule du n.° 22 donne

$$\mathfrak{D}^{6}.\sin\alpha = \mathfrak{D}^{6}\sin\alpha.\beta^{6} + \mathfrak{D}^{5}\sin\alpha.\mathrm{D}.\beta^{5} + \mathfrak{D}^{4}\sin\alpha.\mathfrak{D}^{2}.\beta^{4} + \mathrm{D}^{3}\sin\alpha.\mathfrak{D}^{3}.\beta^{3} + \mathrm{D}^{2}\sin\alpha.\mathfrak{D}^{4}.\beta^{2}$$
$$+ \mathrm{D}\sin\alpha.\mathfrak{D}^{5}.\beta.$$

Or on a $\mathrm{D}\sin\alpha, = \cos\alpha$, $\mathrm{D}^2\sin\alpha = -\sin\alpha$, $\mathrm{D}^3\sin\alpha = -\cos\alpha$, $\mathrm{D}^4\sin\alpha = \sin\alpha$, $\mathrm{D}^5\sin\alpha = \cos\alpha$, $\mathrm{D}^6\sin\alpha = -\sin\alpha$: on a donc pour le premier terme $-\frac{\sin\alpha}{1.2..6}.\beta^6$. On en déduit les autres par la règle du n.° précédent, et l'on trouve

$$\mathfrak{D}^{6}.\sin\alpha = -\frac{\sin\alpha}{1.2...6}.\beta^{6} + \frac{\cos\alpha}{1.2...5}.5\beta^{4}.\gamma + \frac{\sin\alpha}{1.2...4}.(4\beta^{3}.\delta + 6\beta^{2}.\gamma^{2})$$
$$-\frac{\cos\alpha}{1.2.3}.(3\beta^{2}.\varepsilon + 3\beta.2\gamma\delta + \gamma^{3}) - \frac{\sin\alpha}{1.2}.(2\beta.\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^{2}) + \cos\alpha.\eta.$$

45. En multipliant tous les termes par $1.2.3...n$, la formule du n.° 22 devient

$$\mathrm{D}^{n}.\varphi\alpha = \mathrm{D}^{n}\varphi\alpha.\beta^{n} + \mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha.n\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \mathrm{D}^{n-2}\varphi\alpha.n(n-1)\mathfrak{D}^{2}.\beta^{n-2} +$$
$$\mathrm{D}^{n-3}\varphi\alpha.n(n-1)(n-2)\mathfrak{D}^{3}.\beta^{n-3} + \text{etc.}$$
$$+ \mathrm{D}\varphi\alpha.n(n-1)....2.1.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta,$$

ce qui donne le moyen suivant de calculer immédiatement une dérivée non divisée d'un ordre quelconque.

Pour développer $\mathrm{D}^n.\varphi\alpha$, on a pour premier terme $\mathrm{D}^n\varphi\alpha.\beta^n$, et l'on en déduit les autres en suivant le procédé du n.° précédent, à cela près qu'on omet les divisions, et qu'au lieu de prendre les dérivées divisées $\mathfrak{D}^n\varphi\alpha$, $\mathfrak{D}^{n-1}\varphi\alpha$, etc., on prend les dérivées simples $\mathrm{D}^n\varphi\alpha$, $\mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha$, etc.

K

Soit proposé, par exemple, de développer $D^6.\varphi\alpha$; on aura

$$D^6\varphi\alpha.\beta^6$$

$$+ D^5\varphi\alpha.\,6.5.\beta^4.\gamma,$$

$$+ D^4\varphi\alpha.\left(6.5.4.\beta^3.\delta + \frac{6.5.4.3}{2}\beta^2.\gamma^2\right)$$

$$+ D^3\varphi\alpha.\left(6.5.4.3.\beta^2.\varepsilon + \frac{6.5.4.3.2}{2}\beta.2\gamma\delta + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.3}\gamma^3\right)$$

$$+ D^2\varphi\alpha.\left\{6.5.4.3.2.\beta.\zeta + \frac{6.5.4.3.2.1}{2}(2\gamma\varepsilon + \delta^2)\right\}$$

$$+ D\varphi\alpha.\,6.5.4.3.2.1.\eta.$$

46. Il peut arriver que, ayant à développer $\mathcal{D}^n.\varphi\alpha$, on ne puisse pas avoir $\mathcal{D}^n\varphi\alpha.\beta^n$, parce que $\mathcal{D}^n\varphi\alpha$ est zéro, de même que quelques-unes des dérivées inférieures; ce qui a lieu lorsque la fonction est une puissance entière positive. Si l'on demande, par exemple, le 9.e terme du développement de $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})^5$, on n'aura pas $\mathcal{D}^8\alpha^5\,\beta^8$, parce que $\mathcal{D}^5\beta^5 = 1$, et que $\mathcal{D}^6\alpha^5$ est zéro, aussi bien que toutes les dérivées supérieures. De là il s'ensuit que l'on a, par un premier développement,

$$\mathcal{D}^8.\alpha^5 = \mathcal{D}^5\alpha^5.\mathcal{D}^3.\beta^5 + \mathcal{D}^4\alpha^5.\mathcal{D}^4\beta^4 + \mathcal{D}^3\alpha^5.\mathcal{D}^5.\beta^5 + \mathcal{D}^2\alpha^5.\mathcal{D}^6.\beta^2 + D\alpha^5.\mathcal{D}^7.\beta.$$

Il faut donc avant toute chose avoir le développement de $\mathcal{D}^5\alpha^5.\mathcal{D}^3.\beta^5$, afin de pouvoir ensuite en déduire ceux des termes suivans. On donne à cet effet un premier développement à $\mathcal{D}^3.\beta^5$, et l'on trouve

$$\mathcal{D}^3.\beta^5 = \mathcal{D}^3\beta^5.\gamma^3 + \mathcal{D}^2\beta^5.D.\gamma^2 + D\beta^5.\mathcal{D}^2.\gamma,$$

ce qui donne par la règle précédente, n° 43.

$$\mathcal{D}^3.\beta^5 = 10\beta^2.\gamma^3 + 10\beta^3.2\gamma\delta + 5\beta^4.\varepsilon.$$

On écrit à rebours cette expression, et l'on obtient, en suivant encore la même règle,

$$\mathcal{D}^8.\alpha^5 = 5\beta^4.\varepsilon + 10\beta^3.2\gamma\delta + 10\beta^2.\gamma^3$$

$$+ 5\alpha\{4\beta^3.\zeta + 6\beta^2(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 4\beta.3\gamma^2\delta + \gamma^4\}$$

$$+ 10\alpha^2\{3\beta^2.\eta + 3\beta(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) + 3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2\}$$

$$+ 10\alpha^3\{2\beta.\theta + 2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2\}$$

$$+ 5\alpha^4.\iota.$$

SECONDE MANIÈRE.

47. Si l'on prend la formule du n.° 20, savoir

$$\mathrm{D}^n.\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}^{n-1}.\beta + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\mathrm{D}^{n-2}.\beta^2 + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\mathrm{D}^{n-3}.\beta^3 + \text{etc.} + \mathrm{D}^n\varphi\alpha.\beta^n,$$

les quantités polynomiales à développer se succèdent dans cet ordre :

$$\mathrm{D}^{n-1}.\beta,\quad \mathrm{D}^{n-2}.\beta^2,\quad \mathrm{D}^{n-3}.\beta^3,\ \text{etc.},\quad \beta^n;$$

La première de ces quantités n'est autre chose que la $n-1^{\text{ième}}$ lettre après β, (n.° 27). Pour parvenir à faire dériver ces quantités les unes des autres, on observe que les puissances de β vont en augmentant et que les indices de D vont en diminuant, et qu'ainsi ces quantités offrent une sorte de dérivées inverses; voici la règle pour en former les développemens par dérivation.

RÈGLE.

Le développement de $\mathrm{D}^m.\beta^r$ étant donné, pour en faire dériver inversement celui de $\mathrm{D}^{m-1}.\beta^{r+1}$;

1.° *On fait d'abord la préparation suivante : on augmente de l'unité l'exposant de chaque puissance de β, ce qui exige qu'on multiplie par β les termes qui ne contiennent pas cette lettre ; et on change, en conséquence de cette augmentation, les coëfficiens numériques qui proviennent des puissances de β : opération qui se réduit à diviser par chaque exposant de β, ainsi augmenté de l'unité, et à multiplier tous les termes par $r+1$.*

2.° *On exécute sur les termes ainsi préparés la règle du n.° 36, et l'on obtient tous les termes de $\mathrm{D}^{m-1}.\beta^{r+1}$ qui contiennent β.*

3.° *Pour avoir les termes dans lesquels β n'entre pas, on change β en γ dans ceux des termes que l'on vient d'obtenir où β n'est qu'à la première puissance, en ayant soin de diviser par les exposans des nouvelles puissances qui se forment ; après cela, on applique la règle du n.° 36, et l'on a tous les termes où entre γ sans β.*

On change γ en δ dans ceux des termes que l'on vient d'obtenir en dernier lieu où γ n'est qu'à la première puissance, et l'on applique de rechef la règle du n.° 36.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on obtiendroit des termes où la dernière lettre seroit antérieure, dans l'ordre alphabétique, à celles qui la précéderoient dans le terme.

Ainsi de $\mathrm{D}^7.\beta = \iota$, par exemple, on déduit au moyen de cette règle toutes les autres quantités polynomiales qui entrent dans le développement de $\mathrm{D}^8.\varphi\alpha$, comme il suit :

$$\iota, \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \mathrm{D}^7.\beta$$

$$2\beta.\theta + 2\gamma\eta + 2\delta\zeta + \varepsilon^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \mathrm{D}^6.\beta^2$$

$$\frac{3.2}{2}\beta^2.\eta + 3\beta(2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) + \frac{3\gamma 2\gamma\varepsilon}{2} + 3\gamma\delta^2, \quad \ldots\ldots \quad = \mathrm{D}^5.\beta^3$$

$$\frac{4.3.2}{2.3}\beta^3.\zeta + \frac{4.3}{2}\beta^2.(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + 4\beta.3\gamma^2\delta + \frac{4\gamma 3\gamma^2\gamma}{3.4}, \quad \ldots \quad = \mathrm{D}^4.\beta^4$$

$$\frac{5.4.3.2}{2.3.4}\beta^4.\varepsilon + \frac{5.4.3}{2.3}\beta^3 2\gamma\delta + \frac{5.4}{2}\beta^2.\gamma^3, \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \mathrm{D}^3.\beta^5$$

$$\frac{6.5.4.3.2}{2.3.4.5}\beta^5.\delta + \frac{6.5.4.3}{2.3.4}\beta^4.\gamma^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \mathrm{D}^2.\beta^6$$

$$7\beta^6.\gamma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \mathrm{D}.\beta^7$$

$$\beta^8. \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \beta^8.$$

On fera bien de réduire les coëfficiens numériques, que nous n'avons laissés tels qu'on les voit que pour mieux indiquer la marche du calcul.

48. Pour démontrer la règle, prenons les premiers développemens de $\mathrm{D}^m.\beta^r$ et de $\mathrm{D}^{m-1}.\beta^{r+1}$, savoir (n.ºs 25 et 26) :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^m.\beta^r = {} & r\beta^{r-1}.\mathrm{D}^{m-1}.\gamma + \frac{r.r-1}{1.2}\beta^{r-2}.\mathrm{D}^{m-2}.\gamma^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3.}\beta^{r-3}.\mathrm{D}^{m-3}.\gamma^3 \\ & + \text{etc.} + r\beta.\mathrm{D}^{m-r+1}.\gamma^{r-1} + \mathrm{D}^{m-r}.\gamma^r, \quad \ldots\ldots \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{m-1}\beta^{r+1} = {} & (r+1)\beta^r.\mathrm{D}^{m-2}.\gamma + \frac{r+1.r}{1.2}\beta^{r-1}.\mathrm{D}^{m-3}.\gamma^2 + \frac{r+1.r.r-1}{1.2.3}\beta^{r-2}.\mathrm{D}^{m-4}.\gamma^3 \\ & + \text{etc.} + (r+1)\beta.\mathrm{D}^{m-r-1}.\gamma^r + \mathrm{D}^{m-r-2}.\gamma^{r+1}. \quad \ldots\ldots \quad (2)\end{aligned}$$

En comparant tous les termes de la formule (2), à l'exception du dernier, avec ceux de la formule (1), on a la démonstration de la 1.re et de la 2.de parties de la règle.

Quant à la 3.e partie, elle n'a lieu que lorsque r est $<$ ou $= m - 2$; car, si r est $> m - 2$, le développement de la formule (2) a pour dernier terme celui dans lequel l'indice de D qui affecte γ est zéro, et tous les termes où cet indice seroit négatif en sont exclus (n.º 26) : ainsi lorsque r est $> m - 2$, tous les termes de la formule (2) contiennent β, et le dernier terme $\mathrm{D}^{m-r-2}.\gamma^{r+1}$ n'existe pas. Mais dans les cas où ce dernier terme existe, la 3.^{e}

3.e partie de la règle enseigne à en former le développement d'après celui du terme précédent $(r+1)\beta.\mathrm{D}^{m-r-1}.\gamma^r$ de la même formule (2). Pour le démontrer, il suffit de comparer ensemble les développemens en δ de ces deux termes, savoir (n.ºs 25 et 26) :

$$(r+1)\beta.\mathrm{D}^{m-r-1}.\gamma^r = (r+1)r\beta\gamma^{r-1}.\mathrm{D}^{m-r-2}.\delta + \frac{r+1.r.r-1}{1.\ 2}\beta\gamma^{r-2}.\mathrm{D}^{m-r-3}.\delta^2$$
$$+ \text{ etc. } + (r+1)r\beta\gamma.\mathrm{D}^{m-2r}.\delta^{r-1} + (r+1)\beta.\mathrm{D}^{m-2r-1}.\delta^r, \ \ldots (3)$$

$$\mathrm{D}^{m-r-2}.\gamma^{r+1} = (r+1)\gamma^r.\mathrm{D}^{m-r-3}.\delta + \frac{r+1.r}{1.\ 2}\gamma^{r-1}.\mathrm{D}^{m-r-4}.\delta^2$$
$$+ \text{ etc. } + (r+1)\gamma.\mathrm{D}^{m-2r-2}.\delta^r + \mathrm{D}^{m-2r-3}.\delta^{r+1}. \ \ldots\ldots (4)$$

Or, cette dernière formule (4) se déduit, au dernier terme près, de la précédente (3), en changeant dans celle-ci β en γ, en divisant par les exposans des nouvelles puissances de γ, et en faisant ensuite une dérivation inverse sur les quantités affectées du signe D. Quant au dernier terme $\mathrm{D}^{m-2r-3}.\delta^{r+1}$ de la formule (4), il dérive d'une manière semblable du terme précédent $(r+1)\gamma.\mathrm{D}^{m-2r-2}.\delta^r$ de la même formule ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des termes où l'indice de D devienne négatif. Ce qui présente la démonstration de la 3.e partie de la règle.

49. Exemple I. On propose de câlculer immédiatement le 7.e terme du développement de $\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.})$.

Le coëfficient de x^6 est $\mathrm{D}^6.\varphi\alpha$; or on a, n.° 20,

$$\mathrm{D}^6.\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}^5.\beta + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\mathrm{D}^4.\beta^2 + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\mathrm{D}^3.\beta^3 + \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\mathrm{D}^2.\beta^4 + \mathrm{D}^5\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^5$$
$$+ \mathrm{D}^6\varphi\alpha.\beta^6,$$

où le premier terme est $\mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}^5.\beta = \mathrm{D}\varphi\alpha.\eta$; de ce premier terme on déduit les développemens de tous les autres au moyen de la règle du n.° 47, et l'on a

$$\mathrm{D}^6.\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha.\eta + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.(2\beta.\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.(3\beta^2.\varepsilon + 3\beta.2\gamma\delta + \gamma^3)$$
$$+ \mathrm{D}^4\varphi\alpha.(4\beta^3.\delta + 6\beta^2.\gamma^2) + \mathrm{D}^5\varphi\alpha.5\beta^4.\gamma + \mathrm{D}^6\varphi\alpha.\beta^6.$$

On peut appliquer la règle aux différens termes du développement du n.° 33 ; chacun en fournit un exemple particulier.

Exemple II. Trouver le coëfficient de x^5 dans le développement de $\log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$.

L

On a d'abord, n.° 20,

$$\mathrm{D}^5.\log\alpha = \alpha^{-1}.\,\mathrm{D}^4.\beta - \frac{\alpha^{-2}}{2}.\,\mathrm{D}^3.\beta^2 + \frac{\alpha^{-3}}{3}.\,\mathrm{D}^2.\beta^3 - \frac{\alpha^{-4}}{4}.\,\mathrm{D}.\beta^4 + \frac{\alpha^{-5}}{5}.\,\beta^5,$$

et, en appliquant la règle,

$$\mathrm{D}^5.\log\alpha = \alpha^{-1}.\,\zeta - \frac{\alpha^{-2}}{2}.(2\beta.\varepsilon + 2\gamma\delta) + \frac{\alpha^{-3}}{3}.(3\beta^2.\delta + 3\beta\gamma^2)$$
$$- \frac{\alpha^{-4}}{4}.\,4\beta^3.\gamma + \frac{\alpha^{-5}}{5}.\,\beta^5.$$

50. Il est trop facile de développer immédiatement par cette seconde manière une dérivée non divisée $\mathrm{D}^n.\varphi\alpha$, pour que nous nous y arrétions; car, en multipliant par 1. 2. 3... n la formule du n.° 20, elle devient

$$\mathrm{D}^n.\varphi\alpha = 1.2...n\,\mathrm{D}\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^{n-1}.\beta + 3.4...n\,\mathrm{D}^2\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^{n-2}.\beta^2 + 4.5...n\,\mathrm{D}^3\varphi\alpha.\mathrm{D}^{n-3}.\beta^3$$
$$+ \text{etc.} + n\,\mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha.\,\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \mathrm{D}^n\varphi\alpha.\,\beta^n,$$

où les quantités polynomiales se développent par la règle du n.° 47.

La seconde manière fait trouver les termes qui composent le terme cherché de la série dans le même ordre qu'on les a trouvés n.° 33; la première manière les donne dans l'ordre inverse.

51. Nous croyons devoir rappeler ici un moyen dont nous avons déjà fait usage, n.° 27, et qui peut servir dans d'autres occasions.

En prenant pour guide la formule du n.° 20, on peut faire des développemens successifs, d'abord en β, puis en γ, ensuite en δ, etc. Ce procédé peut être employé avec avantage lorsque le polynome n'a qu'un nombre de termes déterminé et peu considérable, ou lorsqu'on demande une dérivée d'un ordre peu élevé.

Un exemple va éclaircir ce que nous venons d'indiquer. Qu'il s'agisse d'avoir le 7.e terme du développement de la fonction du quadrinome $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)$: on a d'abord, en faisant un développement en β,

$$\mathrm{D}^6.\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^5.\beta + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^4.\beta^2 + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^3.\beta^3 + \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^2.\beta^4 + \mathrm{D}^5\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^5$$
$$+ \mathrm{D}^6\varphi\alpha.\,\beta^6;$$

faisant actuellement le développement en γ, on trouve

$$\mathrm{D}^6.\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha\,\mathrm{D}^4.\gamma + \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\,(2\beta.\mathrm{D}^3.\gamma + \mathrm{D}^2.\gamma^2) + \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\,(3\beta^2.\mathrm{D}^2.\gamma + 3\beta\mathrm{D}.\gamma^2 + \gamma^3)$$
$$+ \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\,(4\beta^3\mathrm{D}.\gamma + 6\beta^2.\gamma^2) + \mathrm{D}^5\varphi\alpha.\,5\beta^4\gamma + \mathrm{D}^6\varphi\alpha.\,\beta^6;$$

d'où l'on rejette $\mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}^4.\gamma$, $2\beta\mathrm{D}^3.\gamma$, $3\beta^2\mathrm{D}^2.\gamma$, parce que $\mathrm{D}^4.\gamma$, $\mathrm{D}^3.\gamma$, $\mathrm{D}^2.\gamma$

sont les 4.e, 3.e, 2.e lettres après γ respectivement, lesquelles sont zéro, à cause que dans le quadrinome, δ est le dernier coëfficient. Je fais à présent le développement en δ, et j'ai

$$\mathrm{D}^6.\phi\alpha = \mathrm{D}^2\phi\alpha.(2\gamma\mathrm{D}.\delta + \delta^2) + \mathrm{D}^3\phi\alpha.(3\mathcal{C}^2\gamma\delta + \gamma^3) + \mathrm{D}^4\phi\alpha.(4\mathcal{C}^3\delta + 6\mathcal{C}^2\gamma^2) + \mathrm{D}^5\phi\alpha.5\mathcal{C}^4\gamma + \mathrm{D}^6\phi\alpha.\mathcal{C}^6,$$

et, en rejetant encore $\mathrm{D}.\delta = \varepsilon$, j'ai le développement demandé.

Remarques.

52. Les quantités polynomiales $\mathcal{C}^n$, $\mathrm{D}.\mathcal{C}^{n-1}$, $\mathrm{D}^2.\mathcal{C}^{n-2}$, etc. peuvent aussi se former par les combinaisons, quoique d'une façon moins facile et moins analytique que par les dérivations; il ne sera donc pas inutile de faire connoître l'accord des quantités polynomiales avec certains résultats que l'on obtient par les combinaisons, afin que dans l'occasion on puisse comparer nos formules avec des théorèmes auxquels différens analystes sont parvenus par les combinaisons ou par d'autres voies.

L'expression $\frac{\mathrm{D}^m.\mathcal{C}^n}{1.2...m}$ désigne le coëfficient du $m+1^e$ terme, dans le développement de la puissance n du polynome $\mathcal{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 +$ etc.

Or, n étant un nombre entier positif, on démontre par la théorie des combinaisons (*), 1.° que ce même coëfficient est formé de la somme de tous les produits qui peuvent être représentés par

$$\mathcal{C}^p.\gamma^q.\delta^r.\varepsilon^s.....,$$

p, q, r, s étant des nombres entiers positifs ou zéro, et tels que

$$p + q + r + s + \text{etc.} = n,$$
$$q + 2r + 3s + \text{etc.} = m;$$

2.° que chacun de ces produits a pour coëfficient numérique

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ ......\ n}{1.2.3...p \times 1.2...q \times 1.2...r \times 1.2...s \times ...},$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)....(p+1)}{1.2...q \times 1.2.3...r \times 1.2...s \times ...}.$$

Ainsi, en prenant le signe $\int$ pour désigner un assemblage de termes ou

(*) Voyez l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, partie II, chap. VIII; et Hindenburg, *Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulæ.*

produits ajoutés les uns aux autres (*), on peut représenter le coëfficient de x^m dans la $n^{ième}$ puissance du polynome, par

$$\mathrm{f}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+2)(p+1)}{1.2\ldots q\times 1.2\ldots r\times 1.2\ldots s\times\ldots}\cdot\beta^p.\gamma^q.\delta^r.\varepsilon^s\ldots$$

Nous aurons donc toujours

$$\frac{\mathrm{D}^m.\beta^n}{1.2\ldots m}=\mathrm{f}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+2)(p+1)}{1.2\ldots q\times 1.2\ldots r\times 1.2\ldots s\times\ldots}\cdot\beta^p.\gamma^q.\delta^r.\varepsilon^s\ldots,$$

$$\text{où }\; p+q+r+s=n,$$
$$\text{et }\; q+2r+3s=m;$$

ce qui est la relation que nous voulions faire connoître, et que l'on peut encore énoncer de la manière suivante.

Les lettres β, γ, δ, etc. ayant pour indices ou quantièmes respectifs 1, 2, 3, etc., c'est-à-dire, ces lettres étant représentées par α_1, α_2, α_3, etc.; $\frac{\mathrm{D}^m.\beta^n}{1.2\ldots m}$ ou $\mathrm{D}^m.\beta^n$ indique la somme de tous les produits différens composés chacun de n lettres (les mêmes lettres pouvant être répétées), sous la condition que dans chaque produit la somme des indices de toutes les lettres soit égale à $n+m$, et qu'on donne pour coëfficient numérique à chacun de ces produits la quantité qui exprime le nombre des permutations que peuvent recevoir les lettres qui forment le produit, en ayant égard aux lettres répétées.

Au moyen de ces indices, la recherche des produits peut se ramener à cette question sur la partition des nombres : connoissant le nombre entier $n+m$, trouver toutes les manières différentes de le former par l'addition de n nombres entiers plus petits (**).

53. Puisque dans le produit $\beta^p.\gamma^q.\delta^r.\varepsilon^s\ldots$ le nombre des permutations des lettres est $\frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{1.2\ldots q\times 1.2\ldots r\times 1.2\ldots s\times\ldots}$, il s'ensuit de là une manière de vérifier les coëfficiens numériques de chaque terme des quantités polynomiales $\mathrm{D}\,\beta^{n-1}$, $\frac{\mathrm{D}^2.\beta^{n-2}}{1.2}$, $\frac{\mathrm{D}^3.\beta^{n-3}}{1.2.3}$, etc. développées. Si j'avois, par exemple, à vérifier le coëfficient de $\beta^3\gamma^2\delta$; je ferois la somme des exposans $3+2+1=6=n$, et j'aurois $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.2\times 1}=60$.

(*) Euler se sert souvent du signe f dans le même sens.

(**) On peut voir dans l'ouvrage cité la manière dont le Professeur Hindenburg a résolu ce problème.

Les

54. Les notations dont nous nous servons, malgré leur grande simplicité, puisqu'on n'y emploie qu'un seul signe particulier D, ont différentes significations qu'il convient de faire remarquer.

1.° Elles sont des signes de coëfficiens. Considérées sous ce rapport, elles indiquent non-seulement le quantième du terme, mais encore la nature de la fonction du polynome au développement de laquelle ce terme appartient. Ainsi $\frac{D^m . \mathcal{C}^n}{1.2...m}$ est le coëfficient du $m + 1^{ième}$ terme du développement de $(\mathcal{C} + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^n$; $\frac{D^{10}. \sin \gamma}{1.2....10}$ signifie le coëfficient du 11e terme de $\sin(\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 \text{ etc.})$ développé.

2.° Ces notations représentent une série entière par un seul monome.

3.° Elles sont des signes de dérivations. Ainsi la notation $\frac{D^m . \varphi\alpha}{1.2...m}$ exprime, par D^m, une suite d'opérations assujetties à la même loi, et répétées m fois; elle exprime de plus, par le rapport de D avec le d des différentiations, la nature de cette loi, ou le genre de dérivation approprié au cas que nous traitons.

4.° Enfin $D . \mathcal{C}^n$, $\frac{D^2 . \mathcal{C}^n}{1.2}$, $\frac{D^m . \mathcal{C}^n}{1.2...m}$, en particulier, peuvent encore être considérées comme des signes de combinaisons, ainsi qu'on l'a fait voir dans le numéro précédent.

Il me paroît donc que nos notations réunissent tous les avantages qu'on puisse exiger, ceux d'être très-simples et très-caractéristiques.

§. IV.

Application de la Méthode à différens cas généraux.

55. Les applications que nous allons faire à quelques cas des plus étendus, feront voir que la méthode n'est pas bornée à ceux qui ont été traités précédemment; mais qu'elle est digne d'attention, non-seulement par sa simplicité, mais encore à raison de la fréquence de ses usages dans l'analyse. Nous avons déjà fait la remarque (n.° 11) que dès qu'on a observé, dans l'origine des dérivations ou dans quelques-uns des premiers termes du développement, quelles quantités sont fonctions d'autres quantités, le reste du développement n'est plus qu'une opération presque mécanique; c'est ce

M

qu'on verra avec plus de clarté en suivant les calculs des exemples dont on va s'occuper. Ce paragraphe est principalement destiné à faire contracter l'habitude de lire dans la fonction proposée et non encore développée, ou au moins de pressentir quelles quantités sont fonctions d'autres quantités, et comment elles le sont. Nous aurons d'ailleurs occasion d'y mettre nos procédés dans un plus grand jour, et de les généraliser à quelques égards; et nous terminerons le paragraphe par des observations sur les diverses formes des polynomes.

(I.)

PROBLÈME.

56. Les signes φ et ψ indiquant des fonctions quelconques, on demande à développer d'une manière générale la double fonction

$$\varphi\psi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})$$

en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Si on considère la double fonction $\varphi\psi a$ comme une seule fonction $\mathrm{F}a$, la dérivée de a étant b, on trouve par la règle du n.° 30,

$$\begin{aligned} A &= \varphi\psi a, \\ B &= \mathrm{D}\varphi\psi a.b, \\ C &= \mathrm{D}\varphi\psi a.c + \mathrm{D}^2\varphi\psi a.b^2, \\ D &= \mathrm{D}\varphi\psi a.d + \mathrm{D}^2\varphi\psi a.2bc + \mathrm{D}^3\varphi\psi a.b^3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Mais il est facile de donner aux quantités qui portent le double signe $\varphi\psi$ un développement ultérieur; pour cela on observe que dans $\varphi\psi a$ on peut considérer ψa comme la quantité variable de la fonction φ, et qu'ainsi $\mathrm{D}.\varphi\overline{\psi a}$ est $= \mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}.\psi a$, où il faut distinguer $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}$ de $\mathrm{D}\varphi\psi a$; dans $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}$ c'est ψa qui est la variable, dans $\mathrm{D}\varphi\psi a$ c'est a; et, puisque d'ailleurs $\mathrm{D}.\psi a = \mathrm{D}\psi a.b$, on a $\mathrm{D}.\varphi\overline{\psi a} = \mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a.b$. Maintenant, comme cette dernière expression a trois facteurs, on peut l'envisager sous deux aspects, ou comme partagée en ces deux facteurs $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}$ et $\mathrm{D}\psi a.b$, ou comme partagée en ces deux autres $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a$ et b; ce qui donnera deux sortes de développemens, qui reviennent au même pour le fond, mais qui diffèrent pour la forme. On aura de la première manière, par la règle du n.° 30,

$$A = \varphi\psi a,$$
$$B = \mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.[\mathrm{D}\psi a.b],$$
$$C = \mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.[\mathrm{D}\psi a.c + \mathfrak{D}^2\psi a.b^2] + \mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.[(\mathrm{D}\psi a)^2.b^2],$$
$$D = \mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.[\mathrm{D}\psi a.d + \mathfrak{D}^2\psi a.2bc + \mathfrak{D}^3\psi a.b^3]$$
$$+ \mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.[(\mathrm{D}\psi a)^2.2bc + 2\mathrm{D}\psi a.\mathfrak{D}^2\psi a.b^3]$$
$$+ \mathfrak{D}^3\varphi\overline{\psi a}.[(\mathrm{D}\psi a)^3.b^3],$$

etc.

En considérant $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a.b$ sous le second aspect, la même règle du n.° 30 donne encore

$$A = \varphi\psi a,$$
$$B = [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a].b,$$
$$C = [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a].c + [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathfrak{D}^2\psi a + \mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.(\mathrm{D}\psi a)^2].b^2,$$
$$D = [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathrm{D}\psi a]d + [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathfrak{D}^2\psi a + \mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.(\mathrm{D}\psi a)^2].2bc$$
$$+ [\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathfrak{D}^3\psi a + \mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.2\mathrm{D}\psi a.\mathfrak{D}^2\psi a + \mathfrak{D}^3\varphi\overline{\psi a}.(\mathrm{D}\psi a)^3].b^5,$$

etc.

On voit que les quantités que nous avons renfermées entre des parenthèses angulaires sont des développemens sujets eux-mêmes à la règle du n.° 30, et que par conséquent on y fait des dérivations, non-seulement sur chaque dernier facteur, mais encore sur le pénultième lorsqu'il est suivi de sa dérivée immédiate. Ainsi, dans C, $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathfrak{D}^2\psi a$ donne seulement $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}.\mathfrak{D}^3\psi a.b$; mais $\mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.(\mathrm{D}\psi a)^2$ donne les deux termes $\mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}.2\mathrm{D}\psi a\mathfrak{D}^2\psi a.b + \mathfrak{D}^3\varphi\overline{\psi a}.(\mathrm{D}\psi a)^3.b$, à cause que la dérivée immédiate de ψa est $\mathrm{D}\psi a$.

57. On peut vérifier ces développemens de la manière suivante.

On fait d'abord

$\psi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.}$, où $\mathfrak{a} = \psi a$, et $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. sont donnés par le n.° 33 ; actuellement $\varphi\psi(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$ prend cette forme $\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \text{etc.})$, dont le développement est encore donné par le n.° 33. Il suffira donc de substituer, dans ce dernier développement, les valeurs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. en a, b, c, d, etc. données par le premier développement; et l'on trouvera les dernières ou les avant-dernières formules ci-dessus, suivant qu'on ordonnera par rapport à b, c, d, etc., ou par rapport à $\mathrm{D}\varphi\overline{\psi a}$, $\mathfrak{D}^2\varphi\overline{\psi a}$, etc.

EXEMPLE.

58. Si l'on avoit à convertir en série la puissance quelconque n d'une fonction quelconque de polynome,

$$\{\psi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})\}^n;$$

on auroit par dérivation, n.° 30, le développement suivant, où je mets $\mathfrak{a}$ au lieu de ψa, pour plus de simplicité;

$$\mathfrak{a}^n + n\mathfrak{a}^{n-1}[\mathrm{D}\mathfrak{a}.b].x + \left.\begin{array}{r} n\mathfrak{a}^{n-1}[\mathrm{D}\mathfrak{a}.c + \mathrm{D}^2\mathfrak{a}.b^2] \\ + \dfrac{n.n-1}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}.[(\mathrm{D}\mathfrak{a})^2.b^2] \end{array}\right| x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} + n\mathfrak{a}^{n-1}[\mathrm{D}\mathfrak{a}.d + \mathrm{D}^2\mathfrak{a}.2bc + \mathrm{D}^3\mathfrak{a}.b^3] \\ + \dfrac{n.n-1}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}[(\mathrm{D}\mathfrak{a})^2.2bc + 2\mathrm{D}\mathfrak{a}.\mathrm{D}^2\mathfrak{a}.b^3] \\ + \dfrac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\mathfrak{a}^{n-3}.[(\mathrm{D}\mathfrak{a})^3.b^3] \end{array}\right| x^3 + \text{etc.};$$

ou bien, en ordonnant autrement,

$$\mathfrak{a}^n + [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}\mathfrak{a}].b.x + \left.\begin{array}{r} [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}\mathfrak{a}].c \\ + [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}^2\mathfrak{a} + \dfrac{n.n-1}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}(\mathrm{D}\mathfrak{a})^2].b^2 \end{array}\right| x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} + [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}\mathfrak{a}].d \\ + [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}^2\mathfrak{a} + \dfrac{n.n-1}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}(\mathrm{D}\mathfrak{a})^2].2bc \\ + [n\mathfrak{a}^{n-1}.\mathrm{D}^3\mathfrak{a} + \dfrac{n.n-1}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}.2\mathrm{D}\mathfrak{a}.\mathrm{D}^2\mathfrak{a} + \dfrac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\mathfrak{a}^{n-3}(\mathrm{D}\mathfrak{a})^3].b^3 \end{array}\right| x^3 + \text{etc.}$$

PROBLÈME.

59. Soit proposé de convertir l'expression suivante

$$\varphi\{a + x\psi(b + cx + dx^2 + \text{etc.})\},$$

dans laquelle entrent deux signes de fonction, en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

En

En suivant la règle du n.° 30, et en faisant $\mathrm{D}.a = \psi b$, on trouve sur-le-champ par des dérivations successives :

$$
\begin{aligned}
A &= \varphi a, \\
B &= \mathrm{D}\varphi a.\psi b, \\
C &= \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b.c + \mathfrak{D}^2\varphi a.(\psi b)^2, \\
D &= \mathrm{D}\varphi a.[\mathrm{D}\psi b.d + \mathfrak{D}^2\psi b.c^2] + \mathfrak{D}^2\varphi a.[2\psi b.\mathrm{D}\psi b.c] + \mathfrak{D}^3\varphi a.(\psi b)^3, \\
E &= \mathrm{D}\varphi a.[\mathrm{D}\psi b.e + \mathfrak{D}^2\psi b.2cd + \mathfrak{D}^3\psi b.c^3] \\
&\quad + \mathfrak{D}^2\varphi a.[2\psi b.\mathrm{D}\psi b.d + [2\psi b.\mathfrak{D}^2\psi b + (\mathrm{D}\psi b)^2]c^2] \\
&\quad + \mathfrak{D}^3\varphi a.[3(\psi b)^2.\mathrm{D}\psi b.c] \qquad + \mathfrak{D}^4\varphi a.(\psi b)^4, \\
F &= \mathrm{D}\varphi a.[\mathrm{D}\psi b.f + \mathfrak{D}^2\psi b.(2ce + d^2) + \mathfrak{D}^3\psi b.3c^2d + \mathfrak{D}^4\psi b.c^4] \\
&\quad + \mathfrak{D}^2\varphi a.[2\psi b.\mathrm{D}\psi b.e + [2\psi b.\mathfrak{D}^2\psi b + (\mathrm{D}\psi b)^2].2cd \\
&\qquad\qquad + [2\psi b.\mathfrak{D}^3\psi b + 2\mathrm{D}\psi b.\mathfrak{D}^2\psi b].c^3] \\
&\quad + \mathfrak{D}^3\varphi a.[3(\psi b)^2.\mathrm{D}\psi b.d + [3(\psi b)^2\mathfrak{D}^2\psi b + 3\psi b(\mathrm{D}\psi b)^2]c^2] \\
&\quad + \mathfrak{D}^4\varphi a.[4(\psi b)^3.\mathrm{D}\psi b.c] \qquad + \mathfrak{D}^5\varphi a.(\psi b)^5
\end{aligned}
$$

etc.

Il faut observer que, de même que dans le problème précédent, les quantités en b, que nous avons renfermées entre des parenthéses angulaires, doivent être considérées comme des développemens sujets à la règle du n.° 30 ; et qu'ainsi, pour prendre la dérivée d'un de ces développemens, il faut y faire une dérivation non-seulement sur chaque dernier facteur, mais encore sur le pénultième, quand celui-ci est suivi de sa dérivée immédiate.

60. Si on doutoit de l'exactitude de la solution, il seroit aisé de s'en assurer de la manière suivante. On feroit

$$\psi(b + cx + dx^2 + \text{etc.}) = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d}x^2 + \text{etc.},$$

et, en substituant, la fonction proposée prendroit la forme ordinaire

$$\varphi(a + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.});$$

on auroit donc, n.° 30,

$$
\begin{aligned}
A &= \varphi a, \\
B &= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{b}, \\
C &= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{c} + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{b}^2, \\
D &= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{d} + \mathfrak{D}^2\varphi a.\,2\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{b}^3, \\
E &= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{e} + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2\mathfrak{b}\mathfrak{d} + \mathfrak{c}^2) + \mathfrak{D}^3\varphi a.3\mathfrak{b}^2\mathfrak{c} + \mathfrak{D}^4\varphi a.\mathfrak{b}^4,
\end{aligned}
$$

etc.

Or, on a pareillement, n.° 30,

$$\mathfrak{b} = \psi b,$$
$$\mathfrak{c} = \mathrm{D}\psi b.c,$$
$$\mathfrak{d} = \mathrm{D}\psi b.d + \mathrm{D}^2\psi b.c^2,$$
$$\mathfrak{e} = \mathrm{D}\psi b.e + \mathrm{D}^2\psi b.2cd + \mathrm{D}^3\psi b.c^3,$$
etc.

Il suffit de substituer ces valeurs de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. dans celles de B, C, D, pour avoir les résultats précédens.

On a généralement pour un terme quelconque,

$$A_n = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^{n-1}.(\psi b) + \mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}^{n-2}.(\psi b)^2 + \mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}^{n-3}.(\psi b)^3 + \text{etc.} + \mathrm{D}^n\varphi a.(\psi b)^n,$$

ou, en écrivant la formule à rebours,

$$A_n = \mathrm{D}^n\varphi a.(\psi b)^n + \mathrm{D}^{n-1}\varphi a.\mathrm{D}.(\psi b)^{n-1} + \mathrm{D}^{n-2}\varphi a.\mathrm{D}^2.(\psi b)^{n-2} + \text{etc.} + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^{n-1}.(\psi b);$$

on développera ces formules par ce qui a été dit n.° 58 et les règles du §. III.

Il n'est pas plus difficile de développer cette expression

$$\varphi\{a + x\psi[b + x\mathrm{F}(c + dx + ex^2 + \text{etc.})]\}$$

où entrent trois signes de fonction, non plus que celle-ci

$$\varphi\{a + bx + x^2\psi(c + dx + \text{etc.})\}.$$

(II.)

PROBLÈME.

61. Soit

$$a + b\pi x + c\pi' x^2 + d\pi'' x^3 + e\pi''' x^4 + \text{etc.}$$

où
$$\pi = \psi(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}),$$
$$\pi' = \psi'(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}),$$
$$\pi'' = \psi''(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}),$$
etc.,

ψ, ψ', ψ'', etc. étant des fonctions indépendantes les unes des autres, ou liées entre elles par une loi quelconque; et a, b, c, d, etc. étant de même des quantités indépendantes les unes des autres, ou liées par une loi; on demande à convertir l'expression proposée en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

On a d'abord

$$\pi = \psi\beta + \text{D}.\psi\beta.x + \frac{\text{D}^2.\psi\beta}{1.2}.x^2 + \frac{\text{D}^3.\psi\beta}{1.2.3}.x^3 + \text{etc.};$$

et, pour avoir π', π'', etc., il suffit de marquer ψ d'un, de deux, etc. accens. Substituant donc ces valeurs de π, π', π'', etc., et ordonnant par rapport à x, on trouve

$$\begin{aligned} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = \\ a + b.\psi\beta.x + b.\text{D}.\psi\beta.x^2 + b.\frac{\text{D}^2.\psi\beta.}{1.2}x^3 + b.\frac{\text{D}^3.\psi\beta.}{1.2.3}x^4 + \text{etc.} \\ + c.\psi'\beta.x^2 + c.\text{D}.\psi'\beta.x^3 + c.\frac{\text{D}^2.\psi'\beta.}{1.2}x^4 \\ + d.\psi''\beta.x^3 + d.\text{D}.\psi''\beta.x^4 \\ + e.\psi'''\beta.x^4 \end{aligned}$$

et on aura pour un terme quelconque,

$$A_n = b.\text{D}^{n-1}.\psi\beta + c\text{D}^{n-2}.\psi'\beta + d.\text{D}^{n-3}.\psi''\beta + e.\text{D}^{n-4}\psi'''\beta + \text{etc.} + b_n.\psi'^{n-1'}\beta.$$

formule qu'on écrira à rebours, si on le juge à propos.

On peut encore généraliser ce cas en supposant que les polynomes sous les signes de fonction ψ, ψ', ψ'', etc., au lieu d'être les mêmes, soient différens et quelconques, c'est-à-dire, en supposant

$$\begin{aligned} \pi &= \psi(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}), \\ \pi' &= \psi'(\beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \text{etc.}), \\ \pi'' &= \psi''(\beta'' + \gamma'' x + \delta'' x^2 + \text{etc.}), \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

et l'on aura en général, pour un terme quelconqne,

$$A_n = b.\text{D}^{n-1}.\psi\beta + c.\text{D}^{n-2}.\psi'\beta' + d.\text{D}^{n-3}.\psi''\beta'' + e.\text{D}^{n-4}.\psi'''\beta''' + \text{etc.} + b_n.\psi'^{n-1'}\beta'^{n-1'}.$$

Les développemens et les dérivations s'exécuteront par des applications faciles des règles données dans les §§. II et III.

Le problème traité dans ce numéro est, comme on voit, d'une très-grande généralité.

Exemple.

62. Pour donner un exemple compris dans le cas général que nous venons de traiter, soit

$$a + b.x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m + c.x^2(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{2m} + d.x^3(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{3m} + \text{etc.}$$

à convertir en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

En comparant avec la formule du n.° 61, on a le développement suivant:

$$\begin{array}{r|r|r|l} a + b.\beta^m.x + b.\mathrm{D}.\beta^m. & x^2 + b.\mathrm{D}^2.\beta^m & x^3 + b.\mathrm{D}^3.\beta^m & x^4 \\ + c.\beta^{2m} & + c.\mathrm{D}.\beta^{2m} & + c.\mathrm{D}^2.\beta^{2m} & + \text{etc.} \\ & + d.\beta^{3m} & + d.\mathrm{D}.\beta^{3m} & \\ & & + e.\beta^{4m}, & \end{array}$$

et pour un terme quelconque

$$A_n = b.\mathrm{D}^{n-1}.\beta^m + c.\mathrm{D}^{n-2}.\beta^{2m} + d.\mathrm{D}^{n-3}.\beta^{3m} + \text{etc.} + a_n.\beta^{nm}.$$

En développant ultérieurement par dérivation, on trouve sur-le-champ,

$$A = a,$$
$$B = b.\beta^m,$$
$$C = b.m\beta^{m-1}.\gamma + c.\beta^{2m},$$
$$D = b.(m\beta^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{1.\ 2}\beta^{m-2}.\gamma^2) + c.2m\beta^{2m-1}.\gamma + d.\beta^{3m},$$
$$E = b.(m\beta^{m-1}\varepsilon + \frac{m.m-1}{1.\ 2}\beta^{m-2}.2\gamma\delta + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\beta^{m-3}.\gamma^3)$$
$$+ c.(2m\beta^{2m-1}.\delta + \frac{2m.2m-1}{1.\ 2}\beta^{2m-2}\gamma^2) + d.3m\beta^{3m-1}.\gamma + e.\beta^{4m},$$

et ainsi de suite.

63. Il est essentiel de faire ici une observation importante, et dont l'application est très-étendue. Si on regarde a comme une fonction d'une quantité dont β^m est la dérivée, c'est-à-dire, si l'on suppose $a = \varphi\alpha$ et $\mathrm{D}.\alpha = \beta^m$; que, de plus, on considère b, c, d, etc. comme égales à $\mathrm{D}\varphi\alpha$, $\mathrm{D}^2\varphi\alpha$, $\mathrm{D}^3\varphi\alpha$, etc. : on trouvera, en suivant uniquement la règle de n.° 30, les mêmes valeurs de A, B, C, D, etc., qu'à la fin du n.° précédent; ce qu'il est facile de vérifier; et ce procédé est tout ce qu'on peut désirer de plus simple pour

pour écrire sur-le-champ le développement, en faisant dériver les termes les uns des autres. Il s'étend avec de légères modifications aux cas généraux du n.° 61.

CAS PARTICULIER.

64. Si l'on avoit

$$a + \frac{bx}{\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}} + \frac{cx^2}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^2} + \frac{dx^3}{(\beta + \gamma x + \text{etc.})^3} + \text{etc.}$$

à mettre sous la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

il suffiroit de faire $m = -1$ dans le développement ci-dessus (n.° 62); mais en mettant en usage l'observation précédente, on aura les résultats suivans, d'après la seule règle du n.° 30, savoir, en supposant $a = \varphi\alpha$ et $\text{D}.\alpha = \beta^{-1}$,

$$A = a,$$

$$B = b.\beta^{-1},$$

$$C = -b.\beta^{-2}\gamma + c.\beta^{-2},$$

$$D = b.(-\beta^{-2}\delta + \beta^{-3}\gamma^2) - c.2\beta^{-3}\gamma + d.\beta^{-3},$$

$$E = b.(-\beta^{-2}\varepsilon + \beta^{-3}2\gamma\delta - \beta^{-4}\gamma^3) + c.(-2\beta^{-3}\delta + 3\beta^{-4}\gamma^2) - d.3\beta^{-4}\gamma + e.\beta^{-4},$$

$$F = b.\{-\beta^{-2}\zeta + \beta^{-3}(2\gamma\varepsilon + \delta^2) - \beta^{-4}3\gamma^2\delta + \beta^{-5}\gamma^4\}$$
$$+ c.(-2\beta^{-3}\varepsilon + 3\beta^{-4}2\gamma\delta - 4\beta^{-1}\gamma^3) + d.(-3\beta^{-4}\delta + 6\beta^{-5}\gamma^2)$$
$$- e.4\beta^{-5}\gamma + f.\beta^{-5},$$

et ainsi de suite. On a pour un terme quelconque

$$A_n = b.\mathfrak{p}^{n-1}.\beta^{-1} + c.\mathfrak{p}^{n-2}.\beta^{-2} + d.\mathfrak{p}^{n-3}.\beta^{-3} + \text{etc.} + b_{n-1}.\beta^{-n}.$$

(III.)

65. Les substitutions des séries dans les séries offrent des exemples remarquables de la manière dont il faut considérer certaines quantités comme fonctions d'autres quantités.

PROBLÈME.

Soient proposées les trois séries

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \text{etc.},$$

$$y = \mathfrak{h}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \mathfrak{e}x^4 + \text{etc.},$$

$$x = bv + cv^2 + dv^3 + ev^4 + \text{etc.};$$

on demande à exprimer z par une série en v, de cette forme,

$$z = A + Bv + Cv^2 + Dv^3 + Ev^4 + \text{etc.}$$

Je substitue d'abord la valeur de y dans la première série, et j'ai

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d}x^2 + \text{etc.}) + \mathfrak{C}x^2(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d}x^2 + \text{etc.})^2 + \mathfrak{D}x^3(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d}x^2 + \text{etc.})^3 + \text{etc.};$$

on regardera donc $\mathfrak{B}$ comme $= \text{D}\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}$ comme fonction d'une quantité dont $\mathfrak{b}$ est la dérivée, et l'on aura (n.° 63)

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{b}.x + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}\text{D}.\mathfrak{b} \\ + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}\text{D}^2.\mathfrak{b} \\ + \mathfrak{C}\text{D}.\mathfrak{b}^2 \\ + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3\end{matrix}\right| x^3 + \text{etc.},$$

série que nous représenterons ainsi

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'.x + \mathfrak{C}'.x^2 + \mathfrak{D}'.x^3 + \text{etc.}$$

Substituant actuellement au lieu de x la série qui lui est égale, on a

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'v(b + cv + dv^2 + \text{etc.}) + \mathfrak{C}'v^2(b + cv + dv^2 + \text{etc.})^2 + \mathfrak{D}'v^3(b + cv + dv^2 + \text{etc.})^3 + \text{etc.},$$

ce qui donne encore (n.° 63)

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}'b.v + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}'\text{D}.b \\ + \mathfrak{C}b^2\end{matrix}\right| v^2 + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}'\text{D}^2.b \\ + \mathfrak{C}'\text{D}.b^2 \\ + \mathfrak{D}'b^3\end{matrix}\right| v^3 + \text{etc.}$$

De là découle la solution suivante. On cherche d'abord la valeur de B : pour cela, on se contente de substituer les premiers termes des séries de y et de x dans $\mathfrak{B}y$, et l'on trouve ainsi $\mathfrak{B}y = \mathfrak{B}\mathfrak{b}x = \mathfrak{B}\mathfrak{b}bv$; donc $B = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b$. En faisant les dérivations, il faut considérer le produit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ comme fonction d'une quantité qui a b pour dérivée ; et ensuite $\mathfrak{B}$, dans $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$, comme fonction d'une quantité dont $\mathfrak{b}$ est la dérivée,

Ces considérations et la règle du numéro 30 suffisent pour déduire les uns des autres tous les termes de la série demandée. On trouve ainsi

$$A = \mathfrak{A},$$
$$B = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b,$$
$$C = \mathfrak{B}\mathfrak{b}c + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)b^2,$$
$$D = \mathfrak{B}\mathfrak{b}d + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)2bc + (\mathfrak{B}\mathfrak{d} + \mathfrak{C}2\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3)b^3,$$
$$E = \mathfrak{B}\mathfrak{b}e + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)(2bd + c^2) + (\mathfrak{B}\mathfrak{d} + \mathfrak{C}2\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3)3b^2c + \{\mathfrak{B}\mathfrak{e} + \mathfrak{C}(2\mathfrak{b}\mathfrak{d} + \mathfrak{c}^2) + \mathfrak{D}3\mathfrak{b}^2\mathfrak{c} + \mathfrak{E}\mathfrak{b}^4\}b^4,$$

etc.

Il est facile de continuer ; mais la loi se voit mieux si l'on ne développe pas entièrement et qu'on se contente d'écrire

$B = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b$,

$C = \mathfrak{B}\mathfrak{b}\,D.b + (\mathfrak{B}D.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)\,b^2$,

$D = \mathfrak{B}\mathfrak{b}\,D^2.b + (\mathfrak{B}D.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)D.b^2 + (\mathfrak{B}D^2.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}D.\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3)\,b^3$,

$E = \mathfrak{B}\mathfrak{b}\,D^3.b + (\mathfrak{B}D.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)D^2.b^2 + (\mathfrak{B}D^2\mathfrak{b} + \mathfrak{C}D.\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3)D.b^3$
$\quad + (\mathfrak{B}D^3.\mathfrak{b} + \mathfrak{C}D^2.\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{D}D.\mathfrak{b}^3 + \mathfrak{E}\mathfrak{b}^4)\,b^4$,

etc. De là on conclud aisément la formule pour un terme quelconque A_n.

66. Soient à présent les quatre séries

$$z = \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \text{etc.},$$
$$y = \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc},$$
$$x = bv + cv^2 + dv^3 + \text{etc.},$$
$$v = \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \text{etc.},$$

et qu'on demande z exprimé en u par une série de la forme

$$z = Bu + Cu^2 + Du^3 + \text{etc.}$$

On aura $B = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b\beta$, qui sera l'origine des dérivations ; et il faudra considérer le produit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}b$ comme fonction d'une quantité dont β est la dérivée, ensuite le produit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ comme fonction d'une quantité dont b est la dérivée, et enfin $\mathfrak{B}$ comme fonction d'une quantité qui a $\mathfrak{b}$ pour dérivée. On trouvera de cette manière

$B = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b\beta$,

$C = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b\gamma + \{\mathfrak{B}\mathfrak{b}c + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)b^2\}\beta^2$,

$D = \mathfrak{B}\mathfrak{b}b\delta + \{\mathfrak{B}\mathfrak{b}c + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)b^2\}\,2\beta\gamma$
$\quad + \{\mathfrak{B}\mathfrak{b}d + (\mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b}^2)\,2bc + (\mathfrak{B}\mathfrak{d} + \mathfrak{C}\,2\mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}\mathfrak{b}^3)b^3\}\beta^3$,

etc.

Observons, et cela suit d'ailleurs de l'analyse du n.° 65, qu'un terme quelconque B_n, lorsqu'il y a quatre séries données, est formé de tous les termes B, C, D, etc. B_n pour trois séries données, ces termes étant multipliés respectivement par $D^n.\beta$, $D^{n-1}.\beta^2$, $D^{n-2}.\beta^3$, etc., β^{n+1}. Cette observation et le procédé précédent s'étendent à un nombre quelconque de séries proposées.

CAS PARTICULIER.

67. Étant donnée la série

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.},$$

on propose de substituer au lieu de x la série y elle-même pour avoir la série y'; ensuite de substituer de nouveau dans y' la série y à la place de x pour avoir la série

$$y'' = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Ce cas ne diffère pas de celui où l'on auroit les trois séries suivantes, dont les coëfficiens sont les mêmes,

$$z = by + cy^2 + dy^3 + \text{etc.},$$
$$y = bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$
$$x = bv + cv^2 + dv^3 + \text{etc.},$$

et où l'on demanderoit z exprimée en une série en v. Il n'y a donc qu'à faire dans la solution précédente (n.° 65),

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b} = b,\quad \mathfrak{C} = \mathfrak{c} = c,\quad \mathfrak{D} = \mathfrak{d} = d,\ \text{etc., et}\ v = x,$$

et l'on aura

$$B = b^3 = b^2.b,$$
$$C = b^2\text{D}.b + (b\text{D}.b + \text{D}.b.b^2)b^2,$$
$$D = b^2\text{D}^2.b + (b\text{D}.b + \text{D}.b.b^2)\text{D}.b^2 + (b\text{D}^2.b + \text{D}.b.\text{D}.b^2 + \text{D}^2.b.b^3)b^3,$$
$$E = b^2\text{D}^3.b + (b\text{D}.b + \text{D}.b.b^2)\text{D}^2.b^2 + (b\text{D}^2.b + \text{D}.b.\text{D}.b^2 + \text{D}^2.b.b^3)\text{D}.b^3$$
$$+ (b\text{D}^3.b + \text{D}.b.\text{D}^2.b^2 + \text{D}^2.b.\text{D}.b^3 + \text{D}^3.b.b^4)b^4,$$

etc., où la loi est manifeste.

(IV.)

68. Plaçons ici le problème suivant, parce que notre méthode en rend la solution très-simple, et que cette solution, comparée avec celles qui ont déjà été données du même problème, fera faire des rapprochemens intéressans.

PROBLÈME.

Etant donnée une équation d'un degré quelconque,

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{etc.} = 0, \qquad \ldots (1)$$

dont α, β, γ, δ, etc. sont les racines; on propose de trouver la somme des puissances

puissances n de ces racines immédiatement en coëfficiens de l'équation et sans passer par les sommes des puissances inférieures.

---

69. Nous établirons d'abord un lemme connu. Puisque α, β, γ, δ, etc. représentent les racines de l'équation proposée, on a, par la théorie des équations,

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{etc.} =$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\times\ldots.;$$

en faisant $x = \frac{1}{z}$, et multipliant tout par z^m, cette équation devient

$$1 + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} =$$
$$(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\times\ldots.,$$

et, en prenant de part et d'autre les logarithmes,

$$\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}) =$$
$$\log(1-\alpha z) + \log(1-\beta z) + \log(1-\gamma z) + \log(1-\delta z) + \text{etc.};$$

mais, puisqu'on a généralement (n.° 3.)

$$\log(1-mz) = -mz - \frac{m^2}{2}z^2 - \frac{m^3}{3}z^3 - \frac{m^4}{4}z^4 - \text{etc.},$$

on trouve

$$\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}) =$$
$$-(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})z$$
$$-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.})\frac{z^2}{2}$$
$$-(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.})\frac{z^3}{3}$$
$$-\text{etc.}$$

Faisant donc

$$B = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.},$$
$$C = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.},$$
$$D = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.},$$
$$\text{etc.},$$

l'équation précédente devient

$$\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}) = -Bz - \frac{C}{2}z^2 - \frac{D}{3}z^3 - \text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Le théorème que présente cette équation a été employé par Landen, *Mathematical lucubrations*, et par Lagrange, *Mémoires de Berlin, années* 1768 *et* 1769; mais ce qui suit est particulier à notre méthode.

70. Pour avoir B, C, D, etc. exprimés en coëfficiens b, c, d, etc. de l'équation proposée, il ne s'agit plus que de développer suivant les puissances de z le premier membre de l'équation (2). A cet effet, j'y mets a au lieu de 1, afin de pouvoir faire le développement avec plus de facilité (n.° 11.), sauf à remettre ensuite 1 à la place de a. J'aurai $\log a$ pour le premier terme, lequel devient $= 0$, lorsque $a = 1$, ainsi que cela doit être pour satisfaire au second membre de l'équation (2). De là on déduit (n.° 24)

$$-B = a^{-1}.b,$$

$$-\frac{C}{2} = a^{-1}.\mathrm{D}.b - \frac{a^{-2}}{2}.b^2,$$

$$-\frac{D}{3} = a^{-1}.\mathrm{D}^2.b - \frac{a^{-2}}{2}.\mathrm{D}.b^2 + \frac{a^{-3}}{3}.b^3,$$

$$-\frac{E}{4} = a^{-1}.\mathrm{D}^3.b - \frac{a^{-2}}{2}.\mathrm{D}^2.b^2 + \frac{a^{-3}}{3}.\mathrm{D}.b^3 - \frac{a^{-4}}{4}.b^4,$$

etc., et en général (n.° 20.)

$$-\frac{A_n}{n} = a^{-1}.\mathrm{D}^{n-1}.b - \frac{a^{-2}}{2}.\mathrm{D}^{n-2}.b^2 + \frac{a^{-3}}{3}.\mathrm{D}^{n-3}.b^3 - \text{etc.} \pm \frac{a^{-n}}{n}.b^n.$$

Actuellement, si on change les signes et qu'on fasse $a = 1$, on trouve

$$A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{etc.} =$$

$$-\frac{n}{1}\mathrm{D}^{n-1}.b + \frac{n}{2}\mathrm{D}^{n-2}.b^2 - \frac{n}{3}\mathrm{D}^{n-3}.b^3 + \text{etc.} \pm \frac{n}{n-1}\mathrm{D}.b^{n-1} \mp \frac{n}{n}b^n, \quad \ldots (3)$$

ou bien, en écrivant les termes dans un ordre inverse,

$$A_n = \mp \frac{n}{n}b^n \pm \frac{n}{n-1}\mathrm{D}.b^{n-1} \mp \frac{n}{n-2}\mathrm{D}^2.b^{n-2} \pm \frac{n}{n-3}\mathrm{D}^3.b^{n-3} \mp \text{etc.}$$
$$- \frac{n}{1}\mathrm{D}^{n-1}.b; \quad \ldots\ldots (4)$$

les signes supérieurs ayant lieu si n est impair, et les inférieurs, si n est pair. Voilà donc deux formules générales, (3) et (4), qui résolvent le problème de la manière la plus aisée : la première se développe par la règle du n.° 47; la seconde, par la règle du n.° 43.

Ainsi les sommes des puissances successives des racines sont

$$B = -b,$$

$$C = -\frac{2}{1}c + \frac{2}{2}b^2,$$

$$D = -\frac{3}{1}d + \frac{3}{2}2bc - \frac{3}{3}b^3,$$

$$E = -\frac{4}{1}e + \frac{4}{2}(2bd + c^2) - \frac{4}{3}3b^2c + \frac{4}{4}b^4,$$

$$F = -\frac{5}{1}f + \frac{5}{2}(2be + 2cd) - \frac{5}{3}(3b^2d + 3bc^2) + \frac{5}{4}4b^3c - \frac{5}{5}b^5,$$

etc. On peut continuer par dérivation autant qu'on voudra.

71. Si on veut avoir B, C, D, etc. en termes récurrens, on fera pour plus de facilité, $-B = \mathfrak{B}$, $-\frac{C}{2} = \mathfrak{C}$, $-\frac{D}{3} = \mathfrak{D}$, etc. ; et l'équation $-B = a^{-1}b$ ci-dessus deviendra $a\mathfrak{B} = b$, où l'on considèrera les quantités a et $\mathfrak{B}$ et leurs dérivées comme indépendantes les unes des autres ; et en faisant les dérivations par le procédé des n.ºs 8 et 13, remettant ensuite au lieu de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. leurs valeurs, et faisant $a = 1$, on aura les formules ordinaires

$$B = -b,$$
$$C = -bB - 2c,$$
$$D = -bC - cB - 3d,$$
$$E = -bD - cC - dB - 4e,$$
etc.

72. La première solution de ce problème a été donnée par Albert Girard dans son *Invention nouvelle en Algèbre*, imprimée en 1629, huit années avant la *Géométrie* de Descartes ; ses formules coïncident avec celles ci-dessus à la fin du numéro 70. Les formules en termes récurrens (n.° 71) furent publiées en 1707, sans démonstration, dans l'*Arithmétique universelle* de Newton ; on les a démontrées de plusieurs manières, et on en a fait différens usages. Depuis, Waring, Lagrange, Euler et Vandermonde ont donné des règles ou des formules générales pour calculer la somme des puissances quelconques des racines immédiatement en coëfficiens de l'équation, c'est-à-dire indépendamment des sommes des puissances inférieures. Arrêtons-nous un instant à comparer notre solution avec celles des géomètres que nous venons de nommer.

73. La règle que VANDERMONDE a donnée sans démonstration dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année* 1771, *pag.* 373, se démontre facilement par nos formules (3) ou (4). Voici cette règle, en conservant nos dénominations.

« Pour avoir A_n en $-b$, c, $-d$, e, $-f$, etc., faites avec ces dernières » quantités la fonction rationelle et entière la plus générale possible de la » dimension n, c'est-à-dire, prenez tous les différens termes de la forme » $b^p.\,c^q.\,d^r \times \ldots$. qui peuvent résulter des manières possibles de satisfaire » à l'équation

$$p + 2q + 3r + \text{etc.} = n,$$

» p, q, r, etc. étant des nombres entiers positifs ou zéro ; la valeur de A_n » contiendra tous ces termes ; et le coëfficient numérique du terme quel- » conque $b^p.c^q.d^r \times \ldots$, en supposant $p + q + r +$ etc. $= l$, sera

$$\pm \frac{n.\,1.\,2.\,3.\ldots(l-1)}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times \ldots},$$

» le signe $+$ ayant lieu si $n + l$ est pair, et le signe $-$, s'il est impair. »

En effet, prenons dans la formule (3), n.° 70, un terme quelconque $\pm \frac{n}{n-m}\,\mathfrak{p}^m.b^{n-m}$, lequel, en supposant $n - m = l$, devient $\pm \frac{n}{l}\,\mathfrak{p}^{n-l}.b^l$; il est visible, par les remarques du n.° 52, que $\mathfrak{p}^{n-l}.b^l$ développé donne tous les différens termes qu'on peut faire avec un nombre l des lettres b, c, d, etc., tels que la somme de tous les indices de ces lettres, ou, ce qui est la même chose, que $1p + 2q + 3r +$ etc. soit $= l + n - l = n$; et que le coëfficient de chaque terme $b^p.\,c^q.\,d^r \times \ldots$ soit

$$\frac{1.\;2.\;3.\ldots(l-1)\,l}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times \ldots},$$

l étant $= p + q + r +$ etc. Donc le terme $\frac{n}{l}\mathfrak{p}^{n-l}.\,b^l$ de notre formule (3) représente l'assemblage de tous ces termes, chacun ayant pour coëfficient

$$\frac{n.\,1.\,2.\,3.\ldots(l-1)\,l}{l \times 1\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times \ldots} = \frac{n.\,1.\,2.\,3\ldots(l-1)}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times \ldots}.$$

Quant au signe $+$ ou $-$, chaque terme de la formule (3) aura le signe $-$ ou $+$, suivant que l est impair ou pair, ce qui résulte de l'inspection de la formule ; mais si l'on change les signes des 1.re, 3.e, 5.e, etc. quantités de la suite b, c, d, e, etc., on voit par la nature des multiplications que le produit

produit $b^p.c^q.d^r\times\ldots$ aura le signe — ou +, suivant que $p+2q+3r$ + etc. $=n$ sera impair ou pair. Donc, dans ce cas, le signe de $b^p.c^q.d^r\times\ldots$ sera +, si n et l sont tous deux pairs ou tous deux impairs : il sera —, si des deux nombres n et l l'un est pair et l'autre impair ; c'est-à-dire, le signe sera + si $n+l$ est pair, et — si $n+l$ est impair.

De plus, dans notre formule (3) l reçoit successivement les valeurs 1, 2, 3, etc., n : ainsi la formule contient tous les termes, ayant les conditions prescrites, qu'on peut former avec une seule lettre, avec deux lettres, avec trois, etc. et avec n lettres, c'est-à-dire, tous les différens termes de la forme $b^p.c^q.d^r\times\ldots$ qui peuvent résulter des manières possibles de satisfaire à l'équation $p+2q+3r+$ etc. $=n$, les exposans p, q, r, etc. étant des nombres entiers positifs ou zéro.

74. Donnons à la formule (4), n.° 70, un premier développement en c; elle devient par là

$$A_n = \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$\mp b^n \pm n b^{n-2}.c \quad \mp n b^{n-3}.\text{D}.c \quad \pm n b^{n-4}.\text{D}^2.c \quad \mp n b^{n-5}.\text{D}^3.c \pm \text{etc.}$$

$$\mp \frac{n.n-3}{2} b^{n-4}.c^2 \pm \frac{n.n-4}{2} b^{n-5}.\text{D}.c^2 \quad \mp \frac{n.n-5}{2} b^{n-6}.\text{D}^2.c^2 \pm \text{etc.}$$

$$\pm \frac{n.n-4.n-5}{2.\ \ 3} b^{n-6}.c^3 \quad \mp \frac{n.n-5.n-6}{2.\ \ 3.} b^{n-7}.\text{D}.c^3 \pm \text{etc.}$$

$$\mp \frac{n.n-5.n-6.n-7}{2.\ \ 3.\ \ 4.} b^{n-8}.c^4 \pm \text{etc.},$$

les signes supérieurs étant pour n impair, les inférieurs pour n pair.

75. Maintenant, si l'on distingue les termes de la série (5) en différens ordres ; que le terme $\mp b^n$ seul forme le premier ordre ; que les autres termes de la première ligne horizontale forment le second ordre ; ceux de la seconde ligne horizontale, le troisième ordre ; ceux de la troisième ligne, le quatrième ordre, et ainsi de suite ; il est clair par nos notations qu'on aura, pour les termes de l'ordre quelconque $\lambda+1$,

$$\mp \frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots\ldots(n-2\lambda+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\lambda} b^{n-2\lambda}.\,O$$

$$\pm \frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\ldots\ldots(n-2\lambda)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\lambda} b^{n-2\lambda-1}.\,P$$

$$\mp \frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\ldots\ldots(n-2\lambda-1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ldots\ldots\lambda} b^{n-2\lambda-2}.\,Q$$

$$\pm \text{etc.},$$

en continuant jusqu'à ce qu'on arrive à des puissances négatives de b, et en prenant les signes tels qu'ils sont pour $\lambda + 1$ impair, et les signes contraires pour $\lambda + 1$ pair; les valeurs de O, P, Q, etc. étant telles que l'on ait

$$O + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \text{etc.} = (c + dz + ez^2 + fz^3 + \text{etc.})^\lambda.$$

C'est la loi donnée par Euler dans le tome XV des *nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, *pag.* 57, loi qu'il a tirée par induction des formules de Newton (n.° 71).

76. Si l'on suppose

$$X = -cx^{-2} - dx^{-3} - ex^{-4} - \text{etc.},$$

on aura, (Voyez plus bas le n.° 83.)

$$X^2 = c^2x^{-4} + \text{D}.c^2.x^{-5} + \text{D}^2.c^2.x^{-6} + \text{D}^3.c^2.x^{-7} + \text{etc.},$$

$$X^3 = -c^3x^{-6} - \text{D}.c^3.x^{-7} - \text{D}^2.c^3.x^{-8} - \text{D}^3.c^3.x^{-9} - \text{etc.},$$

et il est visible que les termes du second ordre (n.os 74 et 75) seront représentés par nXx^n, pourvu qu'on mette $-b$ à la place de x; et l'on voit également, et très-clairement, que les termes du troisième ordre seront représentés par $\frac{n}{2}\frac{d(X^2x^{n+1})}{dx}$, en mettant de même $-b$ à la place de x après la différentiation; que, sous la même condition, les termes du quatrième ordre seront représentés par $\frac{n}{3}\frac{d^2(X^3x^{n+2})}{1.\ 2.\ dx^2}$, et ainsi de suite : de sorte qu'on aura

$$A_n = x^n + nXx^n + \frac{n}{2}\frac{d(X^2x^{n+1})}{dx} + \frac{n}{3}\frac{d^2(X^3x^{n+2})}{1.\ 2\ dx^2} + \text{etc.},$$

pourvu qu'on regarde x comme la seule variable, et dx comme constante; qu'on ait soin de rejeter les termes qui contiendroient des puissances négatives de x, et qu'après les différentiations on change x en $-b$.

C'est la formule à laquelle Lagrange est parvenu, d'une manière différente, dans les *Mémoires de Berlin*, *année* 1768, *pag.* 261.

77. Si l'on ordonne le développement en c du n.° 74 suivant les puissances de b, la formule prend cette forme

$$\begin{aligned} A_n = & \mp b^n \pm nb^{n-2}.c \mp nb^{n-3}.\text{D}.c \\ & \pm nb^{n-4}.\left\{\text{D}^2.c - \frac{n-3}{2}c^2\right\} \mp nb^{n-5}\left\{\text{D}^3.c - \frac{n-4}{2}\text{D}.c^2\right\} \\ & \pm nb^{n-6}\left\{\text{D}^4.c - \frac{n-3}{2}\text{D}^2.c^2 + \frac{n-4.\ n-5}{2.\ \ 3}c^3\right\} \end{aligned}$$

$$\mp nb^{n-7}\left\{\mathrm{D}^5.c - \frac{n-6}{2}\mathrm{D}^3.c^2 + \frac{n-5.\,n-6}{2.\ 3}\mathrm{D}.c^3\right\}$$
$$\pm nb^{n-8}\left\{\mathrm{D}^6.c - \frac{n-7}{2}\mathrm{D}^4.c^2 + \frac{n-6.\,n-7}{2.\ 3}\mathrm{D}^2.c^3 - \frac{n-5.\,n-6.\,n-7}{2.\ 3.\ 4}c^4\right\}$$
$$\mp nb^{n-9}\left\{\mathrm{D}^7.c - \frac{n-8}{2}\mathrm{D}^5.c^2 + \frac{n-7.\,n-8}{2.\ 3}\mathrm{D}^3.c^3 - \frac{n-6.\,n-7.\,n-8}{2.\ 3.\ 4}\mathrm{D}.c^4\right\}$$
$$\pm \text{etc.} \pm nb^0\{\mathrm{D}^{n-2}.c \mp \text{etc.}\};$$

où la loi est facile à saisir, et où les signes supérieurs ou inférieurs ont lieu suivant que n est un nombre impair ou pair. Mais il y a de remarquable que, si l'on fait attention qu'il ne faut ajouter une puissance nouvelle de c qu'aux quantités qui multiplient les puissances de b de rang pair, on déduit très-facilement les quantités polynomiales, exprimées en c, les unes des autres, par dérivation, en suivant la règle du n.° 30; et qu'on peut ainsi continuer sans peine la série développée et réduite : on s'arrêtera aux termes qui contiendroient des puissances négatives de b.

En développant les quantités en c, la formule précédente devient la série que Waring a donnée au commencement de ses *Meditationes algebraicæ*. Il l'a tirée des formules de Newton. La règle qu'il donne pour la former est fondée sur les combinaisons, et ne diffère pas au fond de celle de Vandermonde, à laquelle elle peut être ramenée; ainsi nous ne nous y arrêterons pas. La solution de Waring a été publiée la première; elle se trouve déjà dans les *Miscellanea analytica* de cet auteur, imprimés en 1762.

Remarquons qu'on peut aussi ordonner suivant les puissances descendantes de c le développement de la formule générale $\mathrm{D}^n.\varphi\alpha$, et y appliquer les observations précédentes. Nous laissons au lecteur à faire ce développement.

Problème.

78. Résolvons à présent le problème inverse : connoissant les sommes des puissances des racines d'une équation quelconque, exprimer un coëfficient quelconque de l'équation en sommes de ces puissances.

Si l'on fait $1 = a$, et $\log a = A$, l'équation (2) du n.° 69, savoir,
$$\log(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}) = A - Bz - \frac{C}{2}z^2 - \frac{D}{3}z^3 - \text{etc.},$$
donne, en prenant les exponentielles de part et d'autre, e étant le nombre dont le logarithme hyberbolique est l'unité,
$$a + bz + cz^3 + dz^3 + \text{etc.} = e^{A - Bz - \frac{C}{2}z^2 - \frac{D}{3}z^3 - \text{etc.}};$$

ainsi tout se réduit à développer le second membre suivant les puissances de z. Or on a (n.° 30)

$$a = e^A,$$
$$b = -e^A.B,$$
$$c = -e^A.\frac{C}{2} + \frac{e^A}{1.2}.B^2,$$
$$d = -e^A.\frac{D}{3} + \frac{e^A}{1.2}.2B\frac{C}{2} - \frac{e^A}{1.2.3}.B^3,$$
etc.;

il est donc visible qu'en prenant positivement tous les B, $\frac{C}{2}$, $\frac{D}{3}$, etc., mettant $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. à leur place, et faisant $A = 0$, on a (n.° 20) pour un coëfficient quelconque de l'équation (1) du n.° 68,

$$a_n = -\mathfrak{D}^{n-1}.\mathfrak{b} + \frac{1}{1.2}\mathfrak{D}^{n-2}.\mathfrak{b}^2 - \frac{1}{1.2.3}\mathfrak{D}^{n-3}.\mathfrak{b}^3 + \text{etc.} \mp \frac{1}{1.2\ldots n}\mathfrak{b}^n;$$

ou bien, en écrivant les termes dans un ordre inverse,

$$a_n = \mp \frac{1}{1.2\ldots n}\mathfrak{b}^n \pm \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\mathfrak{D}.\mathfrak{b}^{n-1} \mp \frac{1}{1.2\ldots(n-2)}\mathfrak{D}^2.\mathfrak{b}^{n-2}$$
$$\pm \frac{1}{1.2\ldots(n-3)}\mathfrak{D}^3.\mathfrak{b}^{n-3} \mp \text{etc.} + \frac{1}{1.2}\mathfrak{D}^{n-2}.\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{D}^{n-1}.\mathfrak{b}.$$

Les signes supérieurs ont lieu si n est impair, les inférieurs, si n est pair.

Ces formules, dont la loi est fort simple, se développent par les règles des numéros 47 et 43. WARING a aussi donné pour la solution de ce problème, une formule qu'il forme par les combinaisons, et qui s'accorde avec les nôtres; elle se trouve dans ses *Meditationes algebraicæ*, *cap. I*, *probl. III*, *coroll.*, ainsi que dans son premier ouvrage de 1762.

(V.)

79. Nous rassemblons ici plusieurs remarques, utiles dans différentes occasions, et qui servent à donner plus d'étendue à la méthode.

Si on ne vouloit pas ordonner le développement de

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})$$

suivant les puissances de x, mais par rapport aux quantités $\varphi\alpha$, $\mathfrak{D}\varphi\alpha$, $\mathfrak{D}^2\varphi\alpha$, etc., on trouveroit

$$\varphi\alpha + \mathfrak{D}\varphi\alpha.\{\beta.x + \mathfrak{D}.\beta.x^2 + \mathfrak{D}^2.\beta.x^3 + \mathfrak{D}^3.\beta.x^4 + \text{etc.}\}$$
$$+ \mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\{\beta^2.x^2 + \mathfrak{D}.\beta^2.x^3 + \mathfrak{D}^2.\beta^2.x^4 + \mathfrak{D}^3.\beta^2.x^5 + \text{etc.}\}$$
$$+ \mathfrak{D}^3\varphi\alpha.\{\beta^3.x^3 + \mathfrak{D}.\beta^3.x^4 + \mathfrak{D}^2.\beta^3.x^5 + \mathfrak{D}^3.\beta^3.x^6 + \text{etc.}\}$$
$$+ \text{etc.},$$

développement

développement qui se trouve en même temps ordonné par rapport aux dimensions des lettres β, γ, δ, etc., et où les quantités placées dans la même ligne horizontale dérivent les unes des autres avec la plus grande facilité au moyen de nos règles.

On peut parvenir bien simplement à l'expression précédente, car il suffit de faire $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. $= \pi$, et, après avoir développé $\varphi(\alpha + \pi)$, de mettre à la place de π, π^2, π^3, etc. leurs valeurs en séries. Ce développement a de l'analogie avec celui des numéros 75 et 76.

80. On n'a considéré jusqu'ici que des polynomes de la forme

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}; \qquad \ldots.(a)$$

il convient de faire quelques remarques sur les cas où les exposans des puissances de x dans le polynome ne suivent pas la série des nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc.

Si l'on a

$$\varphi(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.}) \qquad \ldots.(b)$$

à développer, il suffit de faire $x = 1$, dans la série du n.° 33, et les règles des §§. II et III s'appliquent à ce cas; ou bien, si on veut ordonner le développement suivant les dimensions des lettres β, γ, δ, etc., on fera $x = 1$ dans la formule du n.° 79.

81. Si les exposans de x dans le polynome de

$$\varphi(\alpha x^p + \beta x^q + \gamma x^r + \delta x^s + \text{etc.}) \qquad \ldots.(c)$$

sont quelconques et qu'ils ne suivent aucune loi, on pourra faire le développement de la manière suivante. On fera $\alpha x^p = a$, $\beta x^q = b$, $\gamma x^r = c$, etc., et l'on développera $\varphi(a + b + c +$ etc.), ce qui ramène ce cas au précédent; après le développement, exécuté par la règle du n.° 30, on remettra pour a, b, c, etc. leurs valeurs. Si l'on veut ordonner la série suivant les dimensions des lettres β, γ, δ, etc., on développera $\varphi(a + b + c +$ etc.) d'après la formule du n.° 79, et l'on remettra de même pour a, b, c, etc. leurs valeurs.

On voit que dans ces cas la série ne sera pas ordonnée suivant les puissances de x.

82. Examinons quelques cas particuliers. Supposons d'abord qu'on ait

$$\varphi(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}); \qquad \ldots.(d)$$

on fera $\beta x = a$, $\gamma x^2 = b$, $\delta x^3 = c$, etc., et après le développement on

remettra au lieu de a, b, c, etc. leurs valeurs; ou bien, en regardant x comme invariable, et β, γ, δ, etc. comme variables et tels que $\text{D}.\beta = \gamma x$, $\text{D}.\gamma = \delta x$, $\text{D}.\delta = \varepsilon x$, etc., on aura, de l'une et de l'autre manière (n.° 30),

$$\varphi\beta x + \text{D}\varphi\beta x.\gamma x^2 + \text{D}\varphi\beta x.\delta x^3 + \text{D}\varphi\beta x.\varepsilon x^4$$
$$+ \text{D}^2\varphi\alpha x.\gamma^2 x^4 + \text{D}^2\varphi\beta x.2\gamma\delta x^5 + \text{etc.}$$
$$+ \text{D}^3\varphi\beta x.\gamma^3 x^6$$

Les termes de la série ne sont pas ordonnés suivant les puissances de x; ils le deviennent cependant si la fonction φ indique une puissance quelconque, et ils le deviennent encore, au premier terme près, lorsque la fonction φ indique un logarithme, car alors, le premier terme étant log βx, le second sera $\frac{\gamma x^2}{\beta x} = \beta^{-1}\gamma x$.

83. Si les exposans des puissances de x dans le polynome forment une progression équi-différente ou arithmétique, comme dans

$$\varphi(\alpha + \beta x^p + \gamma x^{2p} + \delta x^{3p} + \text{etc.}), \quad \ldots.(e)$$

quel que soit p, mais le premier terme α étant sans x; on développera encore comme à l'ordinaire (n.° 30), et la série résultante sera ordonnée par rapport aux puissances de x; elle aura cette forme

$$A + Bx^p + Cx^{2p} + Dx^{3p} + \text{etc.}$$

Pour s'en convaincre on n'a qu'à faire $x^p = y$, et alors ce cas rentre dans le cas ordinaire; on remettra ensuite x_p, au lieu de y, dans le résultat. Nous avons mis la condition que l'exposant de x soit zéro dans le premier terme α du polynome; autrement, x entreroit dans les quantités affectées de la fonction φ dans le développement.

Dans le cas particulier, cependant, où il s'agit d'élever le polynome à une puissance quelconque m, le premier terme α peut aussi être multiplié par une puissance quelconque de x. Ainsi, s'il faut développer

$$(\alpha x^p + \beta x^{p+q} + \gamma x^{p+2q} + \delta x^{p+3q} + \text{etc.})^m, \quad \ldots.(f)$$

où les exposans forment une progression équi-différente quelconque, on n'a qu'à développer tout de même que si l'on avoit

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})^m:$$

la série résultante aura cette forme

$$Ax^{mp} + Bx^{mp+q} + Cx^{mp+2q} + Dx^{mp+3q} + \text{etc.},$$

et les valeurs de A, B, C, D, etc. seront les mêmes que l'on auroit obtenues

en développant $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})^m$; car l'expression (f) est égale à celle-ci

$$x^{mp}(\alpha + \beta x^q + \gamma x^{2q} + \delta x^{3q} + \text{etc.})^m,$$

laquelle, en faisant $x^q = y$, devient

$$x^{mp}(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.})^m.$$

Ainsi, si l'on demandoit le terme sans x, c'est-à-dire affecté de x^0, dans

$$\left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \gamma + \delta x + \varepsilon x^2\right)^m;$$

puisque cette formule est la même chose que celle-ci

$$x^{-2m}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)^m,$$

il suffiroit de prendre le terme affecté de x^{2m} dans

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)^m,$$

c'est-à-dire de développer, à la manière ordinaire, $\text{D}^{2m}.\alpha^m$.

84. Dans les cas où les coëfficiens du polynome sont affectés de dénominateurs numériques ou autres, dont chacun est composé d'un facteur de plus que le précédent, comme dans ce polynome

$$p + \frac{q}{m'}x + \frac{r}{m'm''}x^2 + \frac{s}{m'm''m'''}x^3 + \text{etc.}, \qquad \ldots.(g)$$

on peut, pour développer une fonction quelconque d'un tel polynome, comparer la fonction à la formule générale

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

et, après avoir développé cette dernière, substituer p, $\frac{q}{m'}$, $\frac{r}{m'm''}$, $\frac{s}{m'm''m'''}$ etc. à la place de α, β, γ, δ, etc. respectivement. Mais on peut aussi se passer de ces substitutions et faciliter le développement par le procédé suivant.

On fera les dérivations à la manière ordinaire n.° 30, comme s'il n'y avoit pas de dénominateurs au-dessous de q, r, s, etc.; on aura soin seulement, toutes les fois qu'il faudra changer une des lettres p, q, r, s, etc. dans la suivante, de ne faire ce changement qu'en donnant à cette dernière lettre un facteur au dénominateur, ce facteur étant toujours le dernier de ceux qui divisent la lettre dans le polynome. Ainsi on changera p en $\frac{q}{m'}$, q en $\frac{r}{m''}$, r en $\frac{s}{m'''}$, etc.

En effet, on voit, avec un peu d'attention, que ce procédé doit mener aux mêmes résultats que les substitutions.

Ainsi $\phi(a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$ se développe par la règle du n.° 30, pourvu qu'en changeant les lettres on change a en b, b en $\frac{c}{2}$, c en $\frac{d}{3}$, d en $\frac{e}{4}$, etc.

Pareillement $\phi(\frac{a}{2} + \frac{b}{2.3}x + \frac{c}{2.3.4}x^2 + \frac{d}{2.3.4.5}x^3 + \text{etc.})$ se développe par la même règle, pourvu qu'en changeant les lettres on change a en $\frac{b}{3}$, b en $\frac{c}{4}$, c en $\frac{d}{5}$, etc.

Réciproquement, s'il falloit changer une des lettres p, q, r, etc. en celle qui la précède, comme au n.° 36, il ne faudroit pas changer, par exemple, s en r, mais en $m'''r$; on changeroit de même r en $m''q$, q en $m'p$.

Nous aurons occasion de faire usage de ces observations.

La forme (g) revient souvent dans la théorie des suites, aussi bien que celle-ci

$$p + m'q.x + m'm''r.x^2 + m'm''m'''s.x^3 + \text{etc.} \quad \ldots.(h)$$

Si l'on avoit à développer une fonction quelconque d'un polynome pareil, on pourroit, ou la comparer avec la formule

$$\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

et, après avoir développé cette dernière, substituer p, $m'q$, $m'm''r$, etc. à la place de α, β, γ, etc. respectivement; ou, ce qui est plus simple, faire les dérivations par les règles données dans le §. II, comme si q, r, s, etc. n'étoient pas multipliés par des facteurs m', m'', m''', etc., en observant seulement que, quand on change une lettre dans celle qui suit, il faut changer p non en q, mais en $m'q$, q en $m''r$, r en $m'''s$, et ainsi de suite.

Réciproquement, si, pour prendre une dérivée inverse, il faut changer une lettre dans celle qui la précède, on changera s en $\frac{r}{m'''}$, r en $\frac{q}{m''}$, q en $\frac{p}{m'}$.

Ainsi, on développera facilement la fonction

$$\phi(a + bx + 1.2cx^2 + 1.2.3dx^3 + 1.2.3.4ex^4 + \text{etc.}).$$

ARTICLE

ARTICLE SECOND.

Développemens en séries des fonctions de deux ou de plusieurs polynomes ordonnés suivant les puissances d'une même lettre.

85. Dans les développemens que nous avons exécutés par la méthode simplifiée, nous avons considéré des quantités fonctions d'autres quantités; il convient à présent de nous occuper plus particulièrement des fonctions de quantités indépendantes les unes des autres, et de donner, pour développer ces fonctions, des méthodes de dérivation simplifiées, telles que l'on puisse écrire sur le champ le développement tout réduit et en trouver immédiatement un terme quelconque.

Avant de résoudre le problème général, nous allons nous arrêter à des cas moins étendus, qu'il est avantageux de traiter séparément, tant parce qu'ils se présentent très-souvent, que parce que leur solution sert à faciliter celle du cas général.

§. I.er

Des produits de plusieurs polynomes et de plusieurs fonctions de polynomes.

PROBLÈME.

86. On propose de convertir en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

le produit d'un nombre quelconque de polynomes indépendans, ordonnés chacun suivant les puissances de x.

Pour résoudre ce problème, nous passerons du cas le plus simple, où l'on n'a que deux polynomes, aux cas, plus composés, où l'on a trois, quatre, etc. polynomes à multiplier entre eux.

Supposons donc qu'il faille convertir le produit

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) \times (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})$$

en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

J'effectue la multiplication à la manière ordinaire, en ordonnant suivant les puissances de x, et je trouve

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
a\alpha + a\beta & x + a\gamma & x^2 + a\delta & x^3 + a\varepsilon & x^4 \\
+ b\alpha & + b\beta & + b\gamma & + b\delta & \\
 & + c\alpha & + c\beta & + c\gamma & + \text{etc.}\,; \\
 & & + d\alpha & + d\beta & \\
 & & & + e\alpha &
\end{array}$$

la loi des quantités qui multiplient chaque puissance de x est des plus simples, de sorte qu'on peut en conclure le coëfficient d'un terme quelconque affecté de x^n.

Pour ramener cette solution aux dérivations, j'observe que l'on a $b = \mathrm{D}.a$, $c = \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a$, $d = \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a$, etc., $\beta = \mathrm{D}.\alpha$, $\gamma = \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\alpha$, $\delta = \underset{c}{\mathrm{D}}^3.\alpha$, etc.; $A = a\alpha$, qui est l'origine des dérivations; $B = \mathrm{D}.(a\alpha)$, $C = \underset{c}{\mathrm{D}}^2.(a\alpha)$; $D = \underset{c}{\mathrm{D}}^3.(a\alpha)$, etc. : ainsi, en exprimant les coëfficiens précédens en dérivées, on aura

$$A = a\alpha,$$
$$B = \mathrm{D}.(a\alpha) = a.\mathrm{D}.\alpha + \mathrm{D}.a.\alpha,$$
$$C = \underset{c}{\mathrm{D}}^2.(a\alpha) = a.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.\alpha + \mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a.\alpha,$$
$$D = \underset{c}{\mathrm{D}}^3.(a\alpha) = a.\underset{c}{\mathrm{D}}^3.\alpha + \mathrm{D}.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a.\mathrm{D}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a.\alpha,$$
$$E = \underset{c}{\mathrm{D}}^4.(a\alpha) = a.\underset{c}{\mathrm{D}}^4.\alpha + \mathrm{D}.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^3.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a.\mathrm{D}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^4.a.\alpha,$$

et ainsi de suite. De là résulte la proposition suivante.

THÉORÈME.

87. Si les deux quantités a et α sont indépendantes l'une de l'autre, ainsi que leurs dérivées, la dérivée divisée de l'ordre n du produit $a\alpha$ sera donnée par cette formule

$$\underset{c}{\mathrm{D}}^n.(a\alpha) = a.\underset{c}{\mathrm{D}}^n.\alpha + \mathrm{D}.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-1}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-2}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-3}.\alpha + \text{etc.} + \underset{c}{\mathrm{D}}^{n-1}a.\mathrm{D}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^n.a.\alpha,$$

où chaque terme n'a d'autre coëfficient numérique que l'unité, abstraction faite de ceux qui sont indiqués par les c au-dessous du signe D.

---

88. Changeons n en $n+1$, la formule précédente devient

$$\underset{c}{\mathrm{D}}^{n+1}.(a\alpha) = a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n+1}.\alpha + \mathrm{D}.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^n.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-1}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-2}.\alpha + \text{etc.} + \underset{c}{\mathrm{D}}^{n-1}.a.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^n.a.\mathrm{D}.\alpha + \underset{c}{\mathrm{D}}^{n+1}.a.\alpha:$$

si l'on compare cette formule avec la précédente, on en conclud cette régle de dérivation.

RÈGLE.

Pour déduire le développement de la dérivée divisée $\mathfrak{D}^{n+1}.(a\alpha)$ de celui de $\mathfrak{D}^{n}.(a\alpha)$ qu'on suppose donné, a et α étant des quantités indépendantes; 1.° dans chaque terme ne faites varier que α ou sa dérivée, et prenez-en la dérivée divisée suivante, laissez a et ses dérivées telles qu'elles se trouvent. 2.° dans le terme seul qui renferme α et la plus haute dérivée de a, faites encore varier la dérivée de a, et prenez-en la dérivée divisée suivante, en laissant le facteur α tel qu'il est.

Au moyen de cette règle on tire successivement et sur-le-champ, de $A = a\alpha$,

$$B = a\beta + b\alpha,$$
$$C = a\gamma + b\beta + c\alpha,$$
$$D = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha,$$
$$E = a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha,$$
$$F = a\zeta + b\varepsilon + c\delta + d\gamma + e\beta + f\alpha,$$

etc., comme n.° 86.

89. Le théorème et la règle précédentes suffisent pour développer le produit ou un terme quelconque du produit de tant de polynomes qu'on voudra. Pour le faire voir, nous allons les appliquer aux produits de trois et de quatre polynomes.

Proposons-nous donc de convertir le produit des trois polynomes

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.},$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.},$$

en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Le terme sans x est $A = \mathfrak{a}a\alpha$, c'est l'origine des dérivations : je considère le produit $\mathfrak{a}a$ comme une quantité simple p, de sorte que j'aie $A = p\alpha$, ce qui ramène le problème au précédent ; j'aurai donc, par le théorème du n.° 87,

$$A_n = \mathfrak{D}^n.(\mathfrak{a}a\alpha) = \mathfrak{D}^n.(p\alpha) =$$
$$\mathfrak{a}a.\mathfrak{D}^n.\alpha + \text{D}.(\mathfrak{a}a).\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha + \mathfrak{D}^2.(\mathfrak{a}a).\mathfrak{D}^{n-2}.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{n-1}.(\mathfrak{a}a).\text{D}.\alpha + \mathfrak{D}^n(\mathfrak{a}a).\alpha,$$

où l'on observera que les quantités entre parenthèses sont elles-mêmes sujettes à la règle du n.° 88.

Le développement des termes successifs de la série se fait par dérivation avec la plus grande facilité, et l'on trouve ainsi sur-le-champ

$$A = \mathfrak{a}a.\alpha,$$
$$B = \mathfrak{a}a.\beta + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\alpha,$$
$$C = \mathfrak{a}a.\gamma + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\beta + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}a)\alpha,$$
$$D = \mathfrak{a}a.\delta + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\gamma + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}a)\beta + (\mathfrak{a}d + \mathfrak{b}c + \mathfrak{c}b + \mathfrak{d}a)\alpha,$$
$$E = \mathfrak{a}a.\varepsilon + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\delta + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}a)\gamma + (\mathfrak{a}d + \mathfrak{b}c + \mathfrak{c}b + \mathfrak{d}a)\beta$$
$$+ (\mathfrak{a}e + \mathfrak{b}d + \mathfrak{c}c + \mathfrak{d}b + \mathfrak{e}a)\alpha,$$

etc.

Il est visible que pour déduire E de D, par exemple, il suffit de changer dans D les quantités $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ en $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta$ respectivement, et de faire une dérivation sur la seule quantité $(\mathfrak{a}d + \mathfrak{b}c + \mathfrak{c}b + \mathfrak{d}a)$ qui multiplie α.

90. Développons à présent le produit des quatre polynomes

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.},$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.},$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.},$$

en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

L'origine des dérivations est $A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$, que je partage en ces deux facteurs $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a$ et α; et, considérant $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a$ comme une quantité simple, le théorème précédent donne

$$\mathfrak{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\mathfrak{D}^n.\alpha + \text{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha + \mathfrak{D}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\mathfrak{D}^{n-2}.\alpha + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{D}_n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\alpha,$$

où l'on développera $\text{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, $\mathfrak{D}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, etc. comme au n.° précédent.

On trouvera par dérivation les coëfficiens des termes successifs de la série ainsi qu'il suit,

$$A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha,$$
$$B = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\beta + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + \text{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).a\}\alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\beta + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a\}\alpha,$$
$$C = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\gamma + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a\}\beta + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a\}\alpha,$$
$$D = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\delta + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a\}\gamma + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a\}\beta$$
$$+ \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}.d + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})a\}\alpha,$$

etc., et, en faisant attention aux emboîtemens, on continuera avec la plus grande facilité autant qu'on voudra.

Ne

Ne négligeons pas d'observer qu'on peut aussi partager $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$ en ces deux facteurs $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et $a\alpha$; et qu'alors le développement, quoique différent du précédent pour la forme, sera cependant le même pour le fond; et qu'on trouvera par dérivation

$$A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.\,a\alpha,$$
$$B = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a\alpha,$$
$$C = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\gamma + b\beta + c\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})(a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a\alpha,$$
$$D = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})(a\gamma + b\beta + c\alpha)$$
$$+ (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})(a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})a\alpha,$$

etc.

On peut partager $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$ en facteurs de trois manières, et l'on aura

$$A_n = \mathfrak{p}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha) = \mathfrak{p}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.a\alpha) = \mathfrak{p}^n.(\mathfrak{A}.\mathfrak{a}a\alpha)$$
$$= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a\,\mathfrak{p}^n.\alpha + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\mathfrak{p}^{n-1}.\alpha + \mathfrak{p}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\mathfrak{p}^{n-2}.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{p}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\alpha,$$
$$= \mathfrak{A}\mathfrak{a}.\mathfrak{p}^n.(a\alpha) + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\mathfrak{p}^{n-1}.(a\alpha) + \mathfrak{p}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\mathfrak{p}^{n-2}.(a\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{p}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).a\alpha,$$
$$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{p}^n.(\mathfrak{a}a\alpha) + \mathrm{D}.\mathfrak{A}.\mathfrak{p}^{n-1}.(\mathfrak{a}a\alpha) + \mathfrak{p}^2.\mathfrak{A}.\mathfrak{p}^{n-2}.(\mathfrak{a}a\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{p}^n.\mathfrak{A}.\mathfrak{a}a\alpha.$$

91. Rien n'est plus facile que de calculer un terme quelconque indépendamment des précédens. Donnons-en un exemple.

On demande le 5.ᵉ terme du produit des polynomes

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} +$ etc., $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} +$ etc., $a + b + c +$ etc., $\alpha + \beta + \gamma +$ etc.

L'origine est $A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$, et le 5.ᵉ terme sera indiqué par $\mathfrak{p}^4.\,\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$.

On fait un premier développement, qui donne

$$A_4 = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\varepsilon + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\delta + \mathfrak{p}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\gamma + \mathfrak{p}^3.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\beta + \mathfrak{p}^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a).\alpha;$$

on calcule présentement, en les faisant dériver les uns des autres, les développemens de $\mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, $\mathfrak{p}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, etc., ce qui se fait facilement ainsi qu'il suit,

$$\mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a,$$
$$\mathfrak{p}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a,$$
$$\mathfrak{p}^3.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.d + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})a,$$
$$\mathfrak{p}^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.e + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})d + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})b$$
$$+ (\mathfrak{A}\mathfrak{e} + \mathfrak{B}\mathfrak{d} + \mathfrak{C}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}\mathfrak{b} + \mathfrak{E}\mathfrak{a})a.$$

Ainsi on trouve pour A_4, tout developpé,

$$A_4 = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\varepsilon + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a\}\delta + \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a\}\gamma$$
$$+ \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}d + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})a\}\beta$$
$$+ \{\mathfrak{A}\mathfrak{a}e + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})d + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})b$$
$$+ (\mathfrak{A}\mathfrak{e} + \mathfrak{B}\mathfrak{d} + \mathfrak{C}\mathfrak{c} + \mathfrak{D}\mathfrak{b} + \mathfrak{E}\mathfrak{a})a\}\alpha.$$

92. Il suit encore des formules générales des n.ºs 87, et 88 que pour déduire une dérivée divisée de la dérivée divisée de l'ordre immédiatement supérieur, on a la règle suivante.

RÈGLE.

Pour remonter du développement donné de $\mathfrak{D}^n.(a\alpha)$ *à celui de* $\mathfrak{D}^{n-1}.(a\alpha)$, *rejetez le terme où se trouve* α *multiplié par la plus haute dérivée divisée de* a; *changez dans les autres termes chaque dérivée divisée de* α *en sa dérivée divisée inverse.*

Cette règle, convenablement étendue, s'applique aux dérivées d'un produit composé d'un nombre quelconque de facteurs, comme on peut le voir en examinant sur les cas des n.ºs 89 et 90 de quelle manière chacune des quantités A, B, C, D, etc. dérive de celle qui la suit.

93. Le cas suivant est remarquable, principalement par les notations auxquelles il conduit : nous prendrons un exemple particulier, car on verra aisément que le procédé est général. Supposons qu'on ait à multiplier entre eux cinq binomes de la forme $a + x$, et à ordonner leur produit

$$(a+x)(a'+x)(a''+x)(a'''+x)(a^{\text{iv}}+x),$$

suivant les puissances de x; le résultat aura cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

et l'on sait par la théorie des équations, que $A = aa'a''a'''a^{\text{iv}}$, que B, C, D, E sont respectivement les sommes des produits des cinq quantités a, a', a'', a''', a^{iv}, prises quatre à quatre, trois à trois, deux à deux, une à une, et que $F = 1$.

D'un autre côté, $A = aa'a''a'''a^{\text{iv}}$ est l'origine des dérivations; les premières dérivées des quantités simples a, a', a'', etc. étant égales à l'unité, seront désignées par $\text{D}a$, $\text{D}a'$, etc., sans point après le D, et leurs dérivées des ordres supérieurs au premier seront toutes égales à zéro. Donc il faudra aussi désigner les dérivées successives divisées de $aa'a''a'''a^{\text{iv}}$ par $\text{D}(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$, $\mathfrak{D}^2(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$, etc. sans point après le D. On aura ainsi

$\text{D}(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$ = la somme des produits des cinq quantités prises quatre à quatre,
$\mathfrak{D}^2(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$ = la somme des produits de ces quantités prises trois à trois,
$\mathfrak{D}^3(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$ = la somme des produits de ces quantités prises deux à deux,
$\mathfrak{D}^4(aa'a''a'''a^{\text{iv}})$ = la somme des cinq quantités,
$\mathfrak{D}^5(aa'a''a'''a^{\text{iv}}) = 1$.

De là on conclud en général qu'en exprimant par $a a' a'' a''' \times \ldots a^{m-1}$ le produit de m quantités différentes, l'expression

$$\mathfrak{D}^{m-r}(a a' a'' a''' \times \ldots . a^{m-1})$$

désigne la somme de tous les produits différens de ces m quantités prises r à r: où l'on peut remarquer que le nombre r des quantités qui entrent dans chaque produit, est toujours égal au nombre m de toutes les quantités moins l'indice de D; car, en supposant cet indice $= n$, on a $n = m - r$, et $r = m - n$. Cette expression sert non-seulement à indiquer d'une manière abrégée la somme des produits, mais elle renferme encore la loi du développement, c'est-à-dire, la manière de former tous ces produits.

94. En effet, si par exemple on vouloit calculer immédiatement la somme des produits de cinq quantités prises trois à trois, il faudroit développer $\mathfrak{D}^{5 \cdot 3}(a a' a'' a''' a^{\text{iv}}) = \mathfrak{D}^{2}(a a' a'' a''' a^{\text{iv}})$. En faisant attention qu'ici $\mathfrak{D}^{2}a$, $\mathfrak{D}^{3}a$, etc. $\mathfrak{D}^{2}a'$, etc. $= 0$, on aura (n.° 87)

$$\mathfrak{D}^{2}(a a' a'' a''' a^{\text{iv}}) = \mathrm{D}(a a' a'' a''').\mathrm{D}a^{\text{iv}} + \mathfrak{D}^{2}(a a' a'' a''').a^{\text{iv}}; \quad \ldots\ldots (1)$$

mais on a aussi

$$\mathrm{D}(a a' a'' a''') = a a' a'' \mathrm{D}a''' + \mathrm{D}(a a' a'').a''',$$

et $\mathrm{D}(a a' a'') = a a' \mathrm{D}a'' + \mathrm{D}(a a').a''$;

donc $\mathrm{D}(a a' a'' a''') = a a' a'' \mathrm{D}a''' + [a a' \mathrm{D}a'' + (a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')a''].a'''$,

et de là, par dérivation,

$$\mathfrak{D}^{2}(a a' a'' a''') = [a a' \mathrm{D}a'' + (a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')a'']\mathrm{D}a''' + [(a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')\mathrm{D}a'' + \mathrm{D}a.\mathrm{D}a'.a''].a'''$$

et mettant ces développemens dans la formule (1), elle devient

$$\mathfrak{D}^{2}(a a' a'' a''' a^{\text{iv}}) = \quad \ldots . (2)$$

$$\{a a' a'' \mathrm{D}a''' + [a a' \mathrm{D}a'' + (a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')a''].a'''\}\mathrm{D}a^{\text{iv}}$$
$$+ \{[a a' \mathrm{D}a'' + (a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')a'']\mathrm{D}a''' + [(a \mathrm{D}a' + \mathrm{D}a.a')\mathrm{D}a'' + \mathrm{D}a.\mathrm{D}a'.a''].a'''\}a^{\text{iv}}.$$

Si à présent l'on met partout dans (2) l'unité à la place de $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}a'$, $\mathrm{D}a''$, $\mathrm{D}a'''$, $\mathrm{D}a^{\text{iv}}$, que nous n'avons conservées sous cette forme que pour faciliter les dérivations; la formule (2) devient la somme de tous les produits de cinq lettres prises trois à trois.

Pour développer $\mathfrak{D}^{m-r}(a a' a'' \ldots a^{m-1})$, on peut partager le produit $a a' a'' \ldots a^{m-1}$ en facteurs de différentes manières, ce qui donne des développemens de formes différentes et conduit à des théorèmes sur les combinaisons que nous

ne pourrions placer ici qu'en nous écartant trop de notre objet principal. Revenons aux polynomes.

95. Si au lieu des dérivées divisées de $a\alpha$ (n.° 87), on veut avoir une dérivée non divisée, d'un ordre quelconque, $\mathrm{D}^n.(a\alpha)$; il est clair qu'il suffira de multiplier tous les termes de la dérivée divisée du même ordre n, par $1.2.3\ldots n$. Mais, r étant supposé $< n$, puisqu'un terme quelconque de la dérivée divisée $\mathfrak{D}^n.(a\alpha)$ est

$$\mathfrak{D}^r.a.\mathfrak{D}^{n-r}.\alpha = \frac{1}{1.2.3\ldots r \times 1.2.3\ldots(n-r)}\,\mathrm{D}^r.a.\mathrm{D}.^{n-r}.\alpha\,;$$

il est visible que ce terme, étant multiplié par $1.2.3\ldots n$, devient

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}\,\mathrm{D}^r.a.\mathrm{D}^{n-r}.\alpha\,,$$

où le coëfficient numérique devant $\mathrm{D}^r.a.\mathrm{D}^{n-r}.\alpha$ est le même que celui de $a^r\alpha^{n-r}$ dans le développement de $(\alpha + a)^n$. On aura donc, pour la dérivée non divisée, la formule

$$\mathrm{D}^n.(a\alpha) = a.\mathrm{D}^n.\alpha + n\mathrm{D}.a.\mathrm{D}^{n-1}.\alpha + \frac{n.n-1}{1.2}\mathrm{D}^2.a.\mathrm{D}^{n-2}.\alpha + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\mathrm{D}^3.a.\mathrm{D}^{n-3}.\alpha$$
$$+ \text{etc.} + n\mathrm{D}^{n-1}.a.\mathrm{D}.\alpha + \mathrm{D}^n.a.\alpha\,,$$

les coëfficiens numériques étant les mêmes que ceux de la puissance n du binome $\alpha + a$.

On voit de plus, qu'on obtient la même formule pour $\mathfrak{D}^n.(a\alpha)$, en développant $(\alpha + a)^n$, pourvu qu'après le développement on change généralement a^r en $\mathrm{D}^r.a$, α^s en $\mathrm{D}^s.\alpha$, et a^0 en $\mathrm{D}^0.a = a$, α^0 en $\mathrm{D}^0.\alpha = \alpha$.

96. Puisqu'un terme quelconque de la dérivée divisée $\mathfrak{D}^n.(\mathrm{a}a\alpha)$ est

$$\mathfrak{D}^r.\mathrm{a}.\mathfrak{D}^s.a.\mathfrak{D}^{n-r-s}.\alpha = \frac{\mathrm{D}^r.\mathrm{a}.\mathrm{D}^s a.\mathrm{D}^{n-r-s}.\alpha}{1.2\ldots r \times 1.2\ldots s \times 1.2\ldots(n-r-s)},$$

et que, pour avoir la dérivée non divisée $\mathrm{D}^n.(\mathrm{a}a\alpha)$, il faut multiplier tous les termes par $1.2.3\ldots n$; le terme précédent multiplié par ce produit sera

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots(n-r-s+1)}{1.2\ldots\ldots r \times 1.2\ldots\ldots s}\,\mathrm{D}^r.\mathrm{a}.\mathrm{D}^s.a.\mathrm{D}^{n-r-s}.\alpha\,,$$

où le coëfficient numérique est le même que celui du terme $\mathrm{a}^r a^s \alpha^{n-r-s}$ dans le développement de la puissance du trinome $(\mathrm{a} + a + \alpha)^n$.

En continuant ces raisonnemens, il est visible qu'on a généralement

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3\ldots(n-p-q-r-s-\text{etc.}+1)}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r \times 1.2\ldots s \times \ldots}$$

pour

pour le coëfficient de $\mathrm{D}^p.a.\mathrm{D}^q.a'.\mathrm{D}^r.a''.\mathrm{D}^s.a'''.\times\ldots.$ dans le développement de $\mathrm{D}^n.(aa'a''a'''\ldots.)$, coëfficient numérique qui est aussi celui du terme $a^p.a'^q.a''^r.a'''^s\times\ldots.$ de la puissance $(a+a'+a''+a'''+\text{etc.})^n$.

Puisque l'on a d'un côté, en regardant $a\alpha$ comme une quantité simple,

$$\mathrm{D}^n.(\mathrm{a}a\alpha)=\mathrm{D}^n.\mathrm{a}.a\alpha+n\mathrm{D}^{n-1}.\mathrm{a}.\mathrm{D}.(a\alpha)+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\mathrm{D}^{n-2}.\mathrm{a}.\mathrm{D}^2.(a\alpha)+\text{etc.}$$
$$+\mathrm{a}\mathrm{D}^n.(a\alpha);$$

et que, d'un autre côté, on a pour la puissance n du trinome $\mathrm{a}+a+\alpha$,

$$(\mathrm{a}+a+\alpha)^n=\mathrm{a}^n(a+\alpha)^0+n\mathrm{a}^{n-1}(a+\alpha)^1+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\mathrm{a}^{n-2}(a+\alpha)^2+\text{etc.}$$
$$+\mathrm{a}^0(a+\alpha)^n;$$

que d'ailleurs, n.° précédent, $(a+\alpha)^r$ développé donne $\mathrm{D}^r.(a\alpha)$, en changeant les exposans en signes dérivatifs du même ordre ; il s'ensuit que l'on aura le développement de $\mathrm{D}^n.(\mathrm{a}a\alpha)$ en développant $(\mathrm{a}+a+\alpha)^n$ comme n.° 31, pourvu qu'après le développement on change les exposans en signes dérivatifs D affectés d'indices égaux à ces exposans, et qu'on ait soin de changer aussi a^0, a^0, α^0 en $\mathrm{D}^0.\mathrm{a}$, $\mathrm{D}^0.a$, $\mathrm{D}^0.\alpha$, c'est-à-dire, en a, a, α ; ou, ce qui revient au même, pourvu qu'on donne trois facteurs à chaque terme, en suppléant à ceux qui manquent par celles des lettres a, a, α dont les dérivées n'entrent pas dans le terme. Ainsi puisque, n.° 31, on a

$$(\mathrm{a}+a+\alpha)^n=$$
$$\mathrm{a}^n+n\mathrm{a}^{n-1}a\quad+n\mathrm{a}^{n-1}\alpha\quad+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\mathrm{a}^{n-2}.2a\alpha$$
$$+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\mathrm{a}^{n-2}a^2\quad+\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{a}^{n-3}a^3\quad+\text{etc.},$$

on aura aussi

$$\mathrm{D}^n.(\mathrm{a}a\alpha)=$$
$$\mathrm{D}^n.\mathrm{a}.a\alpha+n\mathrm{D}^{n-1}.\mathrm{a}.\mathrm{D}.a.\alpha+n\mathrm{D}^{n-1}.\mathrm{a}.\mathrm{D}.\alpha.a+\frac{n.n-1.}{1.\ 2}\mathrm{D}^{n-2}.\mathrm{a}.2\mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\alpha$$
$$+\frac{n.n-1}{1.\ 2}\mathrm{D}^{n-2}.\mathrm{a}.\mathrm{D}^2.a.\alpha+\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}\mathrm{D}^{n-3}.\mathrm{a}.\mathrm{D}^3.a.\alpha\quad+\text{etc.}$$

Nous venons de faire voir que la correspondance qui existe entre les puissances des trinomes et les dérivées du produit de trois quantités, a lieu par cela même qu'elle a lieu entre les puissances des binomes et les dérivées du produit de deux quantités : de là on conclud, en suivant la même marche, qu'elle a encore lieu entre les puissances du quadrinome et les dérivées du produit de quatre quantités ; et partant, qu'elle a lieu généralement pour un nombre quelconque de termes dans le polynome d'une part, et de l'autre, pour un même nombre quelconque de quantités multipliées entre elles.

Donc on aura le développement de $\mathrm{D}^n.(a a' a'' \ldots . a^{\mu \cdot 1})$ en développant $(a + a' + a'' + \text{etc.} + a^{\mu \cdot 1})^n$ comme n.° 31, pourvu qu'après le développement on change toutes les puissances en dérivées du même ordre, et qu'on donne à chaque terme le même nombre μ de facteurs, en suppléant à ceux qui manquent par celles des lettres a, a', a'', etc. dont les dérivées n'entrent pas dans le terme.

La démonstration que nous venons de donner de ces homologies, nous paroît simple et rigoureuse : notre objet n'étant pas d'en traiter ici, il suffit d'avoir montré comment on y est conduit par notre calcul.

Problème.

97. On propose de développer le produit de deux fonctions quelconques de polynomes,

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) \times \psi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Première solution. Il suffira de mettre φa à la place de a et $\psi \alpha$ à la place de α dans la solution du n.° 86, et l'on aura par le théorème du n.° 87, pour le coëfficient d'un terme quelconque affecté de x^n,

$$A_n = \mathfrak{d}^n.(\varphi a.\psi\alpha) = \varphi a.\mathfrak{d}^n.\psi\alpha + \mathrm{D}.\varphi a.\mathfrak{d}^{n-1}.\psi\alpha + \mathfrak{d}^2.\varphi a.\mathfrak{d}^{n-2}.\psi\alpha + \mathfrak{d}^3.\varphi a.\mathfrak{d}^{n-3}.\psi\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{d}^n.\varphi a.\psi\alpha.$$

Rien n'est plus aisé que de développer cette formule, d'après le n.° 49 et les règles des n.ºs 30 et 36, et par conséquent de calculer un terme quelconque du développement indépendamment des autres.

La règle du n.° 88, jointe à celle du n.° 30, donne le moyen de faire dériver les coëfficiens des termes successifs les uns des autres, et l'on trouve

$$A = \varphi a \times \psi\alpha,$$

$$B = \varphi a \times \mathrm{D}\psi\alpha.\beta + \mathrm{D}\varphi a.b \times \psi\alpha,$$

$$C = \varphi a \times (\mathrm{D}\psi\alpha.\gamma + \mathfrak{d}^2\varphi\alpha.\beta^2) + \mathrm{D}\varphi a.b \times \mathrm{D}\psi\alpha.\beta + (\mathrm{D}\varphi a.c + \mathfrak{d}^2\varphi a.b^2) \times \psi\alpha,$$

$$D = \varphi a \times (\mathrm{D}\psi\alpha.\delta + \mathfrak{d}^2\varphi\alpha.2\beta\gamma + \mathfrak{d}^3\varphi\alpha.\beta^3) + \mathrm{D}\varphi a.b \times (\mathrm{D}\psi\alpha.\gamma + \mathfrak{d}^2\psi\alpha.\beta^2) + (\mathrm{D}\varphi a.c + \mathfrak{d}^2\varphi a.b^2) \times \mathrm{D}\psi\alpha.\beta + (\mathrm{D}\varphi a.d + \mathfrak{d}^2\varphi a.2bc + \mathfrak{d}^3\varphi a.b^3) \times \psi\alpha,$$

etc.

98. S'il s'agit de développer le produit de trois fonctions de polynomes,

$$\chi(\mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2 + \text{etc.}) \times \varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times \psi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.});$$

on mettra pareillement χa, φa, $\psi\alpha$ à la place de a, a, α respectivement, dans la solution du n.° 89, et l'on aura

$$A_n = \mathfrak{d}^n.(\chi a.\varphi a.\psi\alpha) =$$

$$\chi a.\varphi a.\mathfrak{d}^n.\psi\alpha + \text{D}.(\chi a.\varphi a).\mathfrak{d}^{n-1}.\psi\alpha + \mathfrak{d}^2.(\chi a.\varphi a).\mathfrak{d}^{n-2}.\psi\alpha + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{d}^n.(\chi a.\varphi a).\psi\alpha,$$

où l'on développera $\text{D}.(\chi a.\varphi a)$, $\mathfrak{d}^2.(\chi a.\varphi a)$, etc., comme on vient de développer $\text{D}.(\varphi a.\psi\alpha)$, $\mathfrak{d}^2.(\varphi a.\psi\alpha)$, etc.

On voit ce qu'il y auroit à faire si l'on vouloit développer le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de fonctions de polynomes.

Appliquons tout de suite cette solution à un exemple.

EXEMPLE.

99. Développer le produit des puissances quelconques r et s de deux polynomes, $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^r \times (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})^s$, en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

On fera, n.° 97, $\varphi a = a^r$ et $\psi\alpha = \alpha^s$, et l'on aura, pour le coëfficient de x^n,

$$A_n = \mathfrak{d}^n.(a^r\alpha^s) = a^r.\mathfrak{d}^n.\alpha^s + \text{D}.a^r.\mathfrak{d}^{n-1}.\alpha^s + \mathfrak{d}^2.a^r.\mathfrak{d}^{n-2}.\alpha^s + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{d}^{n-1}.a^r.\text{D}.\alpha^s + \mathfrak{d}^n.a^r.\alpha^s,$$

où il n'y a plus qu'à effectuer les dérivations indiquées, au moyen des règles des numéros 30 et 36.

Si on veut déduire les uns des autres les coëfficiens successifs A, B, C, D, etc., on y parviendra, par les règles des n.ºs 88 et 30, comme il suit.

$$A = a^r.\alpha^s,$$

$$B = a^r.s\alpha^{s-1}\beta + ra^{r-1}b.\alpha^s,$$

$$C = a^r(s\alpha^{s-1}\gamma + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}\beta^2) + ra^{r-1}b.s\alpha^{s-1}\beta + (ra^{r-1}c + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}b^2)\alpha^s,$$

$$D = a^r(s\alpha^{s-1}\delta + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}2\beta\gamma + \frac{s.s-1.s-2}{1.2.3}\alpha^{s-3}\beta^3)$$
$$+ ra^{r-1}b(s\alpha^{s-1}\gamma + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}\beta^2) + (ra^{r-1}c + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}b^2)s\alpha^{s-1}\beta$$
$$+ (ra^{r-1}d + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}2bc + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}a^{r-3}b^3)\alpha^s,$$

$$E = a^r\{s\alpha^{s-1}\varepsilon + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{s.s-1.s-2}{1.2.3}\alpha^{s-3}3\beta^2\gamma + \frac{s.s-1\ldots s-3}{1.2.3.4}\alpha^{s-4}\beta^4\}$$

$$+ ra^{r-1}b(s\alpha^{s-1}\delta + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}2\zeta\gamma + \frac{s.s-1.s-2}{1.2.3}\alpha^{s-3}\zeta^3)$$
$$+ (ra^{r-1}c + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}b^2)(s\alpha^{s-1}\gamma + \frac{s.s-1}{1.2}\alpha^{s-2}\zeta^2)$$
$$+ (ra^{r-1}d + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}2bc + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}a^{r-3}b^3)s\alpha^{s-1}\zeta$$
$$+ \{ra^{r-1}e + \frac{r.r-1}{1.2}a^{r-2}(2bd + c^2) + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}a^{r-3}3b^2c + \frac{r.r-1...r-3}{1.2.3.4}a^{r-4}b^4\}\alpha^s,$$

et ainsi de suite.

Si l'on veut le développement du produit de trois puissances de polynomes, $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \text{etc.})^r \times (a + bx + cx^2 + \text{etc.})^s \times (\alpha + \zeta x + \gamma x^2 + \text{etc.})^t$; on aura $A = \mathfrak{a}^r a^s \alpha^t$, le coëfficient du terme affecté de x^n sera

$$A_n = \mathrm{D}^n.(\mathfrak{a}^r a^s \alpha^t) = \mathfrak{a}^r a^s.\mathrm{D}^n.\alpha^t + \mathrm{D}.(\mathfrak{a}^r a^s).\mathrm{D}^{n-1}.\alpha^t + \mathrm{D}^2.(\mathfrak{a}^r a^s).\mathrm{D}^{n-2}.\alpha^t$$
$$+ \text{etc.} \quad + \mathrm{D}^n.(\mathfrak{a}^r a^s).\alpha^t,$$

et les coëfficiens développés des premiers termes seront

$$A = \mathfrak{a}^r a^s.\alpha^t,$$
$$B = \mathfrak{a}^r a^s.t\alpha^{t-1}\zeta + (\mathfrak{a}^r.sa^{s-1}b + r\mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{b}.a^s)\alpha^t,$$
$$C = \mathfrak{a}^r a^s(t\alpha^{t-1}\gamma + \frac{t.t-1}{1.2}\alpha^{t-2}\zeta^2) + (\mathfrak{a}^r.sa^{s-1}b + r\mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{b}.a^s)t\alpha^{t-1}\zeta +$$
$$\{\mathfrak{a}^r(sa^{s-1}c + \frac{s.s-1}{1.2}a^{s-2}b^2) + r\mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{b}.sa^{s-1}b + (r\mathfrak{a}^{r-1}\mathfrak{c} + \frac{r.r-1}{1.2}\mathfrak{a}^{r-2}\mathfrak{b}^2)a^s\}\alpha^t,$$

et ainsi de suite, par dérivation.

100. De la solution du numéro 97 on peut encore déduire deux autres solutions du même problème, où les développemens prennent d'autres formes.

Seconde solution. Si dans la solution du n.° 97 on donne un premier développement en b aux quantités $\mathrm{D}.\phi a$, $\mathrm{D}^2.\phi a$, $\mathrm{D}^3.\phi a$, etc., sans développer $\mathrm{D}.\psi\alpha$, $\mathrm{D}^2.\psi\alpha$, $\mathrm{D}^3.\psi\alpha$, etc.; on aura

$$A = \phi a \times \psi\alpha,$$
$$B = \phi a \times \mathrm{D}.\psi\alpha + \mathrm{D}\phi a.b \times \psi\alpha,$$
$$C = \phi a \times \mathrm{D}^2.\psi\alpha + \mathrm{D}\phi a.b \times \mathrm{D}.\psi\alpha + (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}.b + \mathrm{D}^2\phi a.b^2) \times \psi\alpha,$$
$$D = \phi a \times \mathrm{D}^3.\psi\alpha + \mathrm{D}\phi a.b \times \mathrm{D}^2.\psi\alpha + (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}.b + \mathrm{D}^2\phi a.b^2) \times \mathrm{D}.\psi\alpha$$
$$+ (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^2.b + \mathrm{D}^2\phi a.\mathrm{D}.b^2 + \mathrm{D}^3\phi a.b^3) \times \psi\alpha,$$
$$E = \phi a \times \mathrm{D}^4.\psi\alpha + \mathrm{D}\phi a.b \times \mathrm{D}^3.\psi\alpha + (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}.b + \mathrm{D}^2\phi a.b^2) \times \mathrm{D}^2.\psi\alpha$$
$$+ (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^2.b + \mathrm{D}^2\phi a.\mathrm{D}.b^2 + \mathrm{D}^3\phi a.b^3) \times \mathrm{D}.\psi\alpha$$
$$+ (\mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^3.b + \mathrm{D}^2\phi a.\mathrm{D}^2.b^2 + \mathrm{D}^3\phi a.\mathrm{D}.b^3 + \mathrm{D}^4\phi a.b^4) \times \psi\alpha,$$

etc.

Mais,

Mais, avec une légère attention, on verra qu'en ordonnant ces développemens suivant φa, $\text{D}\varphi a$, $\text{D}^2\varphi a$, etc., on pourra les mettre sous cette forme

$$B = \varphi a \times \text{D}.\psi\alpha + \text{D}\varphi a \times b.\psi\alpha,$$
$$C = \varphi a \times \text{D}^2.\psi\alpha + \text{D}\varphi a \times \text{D}.(b.\psi\alpha) + \text{D}^2\varphi a \times b^2.\psi\alpha,$$
$$D = \varphi a \times \text{D}^3.\psi\alpha + \text{D}\varphi a \times \text{D}^2.(b.\psi\alpha) + \text{D}^2\varphi a \times \text{D}.(b^2.\psi\alpha) + \text{D}^3\varphi a \times b^3.\psi\alpha,$$
$$E = \varphi a \times \text{D}^4.\psi\alpha + \text{D}\varphi a \times \text{D}^3.(b.\psi\alpha) + \text{D}^2\varphi a \times \text{D}^2.(b^2.\psi\alpha) + \text{D}^3\varphi a \times \text{D}.(b^3.\psi\alpha) + \text{D}^4\varphi a \times b^4.\psi\alpha,$$

etc.; et, comme il est clair que la loi s'observe dans les termes suivans, on a pour un terme quelconque

$$A_n = \text{D}^n.(\varphi a \times \psi\alpha) =$$
$$\varphi a \times \text{D}^n.\psi\alpha + \text{D}\varphi a \times \text{D}^{n-1}.(b.\psi\alpha) + \text{D}^2\varphi a \times \text{D}^{n-2}.(b^2.\psi\alpha) + \text{D}^3\varphi a \times \text{D}^{n-3}.(b^3.\psi\alpha) + \text{etc.} + \text{D}^{n-1}\varphi a \times \text{D}.(b^{n-1}.\psi\alpha) + \text{D}^n\varphi a \times b^n.\psi\alpha.$$

Il est aisé de continuer les développemens des dérivées indiquées, sur-tout si l'on écrit les termes de cette formule dans un ordre inverse. On remarque que quand on fait dériver les termes successifs les uns des autres, tout se réduit ici à partager le terme $\text{D}\varphi a.b.\psi\alpha$ dans l'expression de B, dans les deux facteurs $\text{D}\varphi a$ et $b.\psi\alpha$, et d'en agir de même toutes les fois qu'on forme une nouvelle puissance de b.

101. *Troisième solution.* Tâchons actuellement de séparer entièrement des quantités polynomiales les quantités affectées des signes de fonction φ et ψ. A cet effet, donnons un premier développement, en b, aux quantités $\text{D}.\varphi a$, $\text{D}^2.\varphi a$, $\text{D}^3.\varphi a$, etc., et un premier développement, en β, aux quantités $\text{D}.\psi\alpha$, $\text{D}^2.\psi\alpha$, $\text{D}^3.\psi\alpha$, etc. que l'on auroit par la première solution n.° 97; et nous aurons

$$A = \varphi a.\psi\alpha,$$
$$B = \varphi a.\ \text{D}\psi\alpha.\beta + \text{D}\varphi a.b.\psi\alpha,$$
$$C = \varphi a.(\text{D}\psi\alpha.\text{D}.\beta + \text{D}^2\psi\alpha.\beta^2) + \text{D}\varphi a.b.\text{D}\psi\alpha.\beta + (\text{D}\varphi a.\text{D}.b + \text{D}^2\varphi a.b^2).\psi\alpha,$$
$$D = \varphi a.(\text{D}\psi\alpha.\text{D}^2.\beta + \text{D}^2\psi\alpha.\text{D}.\beta^2 + \text{D}^3\psi\alpha.\beta^3) + \text{D}\varphi a.b.(\text{D}\psi\alpha.\text{D}.\beta + \text{D}^2\psi\alpha.\beta^2) + (\text{D}\varphi a.\text{D}.b + \text{D}^2\varphi a.b^2).\text{D}\psi\alpha.\beta + (\text{D}\varphi a.\text{D}^2.b + \text{D}^2\varphi a.\text{D}.b^2 + \text{D}^3\varphi a.b^3)\psi\alpha,$$
$$E = \varphi a(\text{D}\psi\alpha.\text{D}^3.\beta + \text{D}^2\psi\alpha.\text{D}^2.\beta^2 + \text{etc.}) + \text{etc.},$$

etc. Si l'on ordonne chacun de ces développemens par rapport aux puissances et aux produits de β et b, ils prennent la forme suivante,

$$
\begin{aligned}
A &= \varphi a . \psi \alpha , \\
B &= \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \beta \\
&\quad + \mathrm{D} \varphi a . \psi \alpha . b , \\
C &= \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathrm{D} . \beta + \varphi a . \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . \beta^2 \\
&\quad + \mathrm{D} \varphi a . \psi \alpha . \mathrm{D} . b + \mathrm{D} \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . b \beta \\
&\quad\quad + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \psi \alpha . b^2 , \\
D &= \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathfrak{D}^2 . \beta + \varphi a . \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . \mathrm{D} . \beta^2 + \varphi a . \mathfrak{D}^3 \psi \alpha . \beta^3 \\
&\quad + \mathrm{D} \varphi a . \psi \alpha . \mathfrak{D}^2 . b + \mathrm{D} \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathrm{D} . (b \beta) + \mathrm{D} \varphi a \ \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . b \beta^2 \\
&\quad\quad + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \psi \alpha . \mathrm{D} . b^2 + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . b^2 \beta \\
&\quad\quad\quad + \mathfrak{D}^3 \varphi a . \psi \alpha . b^3 , \\
E &= \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathfrak{D}^3 . \beta + \varphi a . \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . \mathfrak{D}^2 . \beta^2 + \varphi a . \mathfrak{D}^3 \psi \alpha . \mathrm{D} . \beta^3 + \varphi a . \mathfrak{D}^4 \psi \alpha . \beta^4 \\
&\quad + \mathrm{D} \varphi a . \psi \alpha . \mathfrak{D}^3 . b + \mathrm{D} \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathfrak{D}^2 . (b \beta) + \mathrm{D} \varphi a . \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . \mathrm{D} . (b \beta^2) + \mathrm{D} \varphi a . \mathfrak{D}^3 \psi \alpha . b \beta^3 \\
&\quad\quad + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \psi \alpha . \mathfrak{D}^2 . b^2 + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathrm{D} . (b^2 \beta) + \mathfrak{D}^2 \varphi a . \mathfrak{D}^2 \psi \alpha . b^2 \beta^2 \\
&\quad\quad\quad + \mathfrak{D}^3 \varphi a . \psi \alpha . \mathrm{D} . b^3 + \mathfrak{D}^3 \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . b^3 \beta \\
&\quad\quad\quad\quad + \mathfrak{D}^4 \varphi a . \psi \alpha . b^4 ,
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite. Ces développemens sont symétriques, et il est aisé d'en saisir la loi ; car il est visible que, dans les colonnes verticales, les produits des β et b suivent la même loi que dans les puissances correspondantes du binome $\beta + b$, et que les indices des D qui affectent $\psi\alpha$ et φa sont réglés sur les exposans de β et de b.

On pourroit même, avec un léger changement dans les coëfficiens numériques, donner aux termes en β et b les coëfficiens numériques des puissances du binome $\beta + b$; car la troisième colonne verticale de E, par exemple, peut aussi s'écrire de cette manière

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1.2.3}\{ &\varphi a . \mathrm{D}^3 \psi \alpha . \mathrm{D} . \beta^3 + \mathrm{D} \varphi a . \mathrm{D}^2 \psi \alpha . \mathrm{D} . (3 b \beta^2) + \mathrm{D}^2 \varphi a . \mathrm{D} \psi \alpha . \mathrm{D} . (3 b^2 \beta) \\
&+ \mathrm{D}^3 \varphi a . \psi \alpha . \mathrm{D} . b^3 \}.
\end{aligned}
$$

102. De là il est facile de conclure la formule du terme général, et, en y réunissant celles des n.ºs 97 et 100, on a ce théorème.

THÉORÈME.

Le coëfficient du terme quelconque affecté de x^n dans le développement de

$$\varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times \psi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}),$$

est donné par l'une de ces trois formules

I.... $$A_n = \mathfrak{D}^n.(\varphi a.\psi\alpha) =$$
$$\varphi a.\mathfrak{D}^n.\psi\alpha + \mathrm{D}.\varphi a.\mathfrak{D}^{n-1}.\psi\alpha + \mathfrak{D}^2.\varphi a.\mathfrak{D}^{n-2}.\psi\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^n.\varphi a.\psi\alpha.$$

II.... $$A_n = \mathfrak{D}^n.(\varphi a.\psi\alpha) =$$
$$\varphi a.\mathfrak{D}^n.\psi\alpha + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{n-1}.(b.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{n-2}.(b^2.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}^{n-3}.(b^3.\psi\alpha)$$
$$+ \text{etc.} + \mathfrak{D}^n\varphi a.b^n.\psi\alpha.$$

III.... $$A_n = \mathfrak{D}^n.(\varphi a.\psi\alpha) =$$
$$\begin{array}{lll}
\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta & + \varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^2 & + \varphi a.\mathfrak{D}^3\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^3 \\
+ \mathrm{D}\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-1}.b & + \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-2}.(b\beta) & + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-3}.(b\beta^2) \\
 & + \mathfrak{D}^2\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-2}.b^2 & + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-3}.(b^2\beta) \\
 & & + \mathfrak{D}^3\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{n-3}.b^3 \\
 & & + \varphi a.\mathfrak{D}^n\psi\alpha.\beta^n \\
 & + \text{etc.} & + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{n-1}\psi\alpha.b'\beta^{n-1} \\
 & & + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{n-2}\psi\alpha.b^2\beta^{n-2} \\
 & & + \text{etc.} \\
 & & + \mathfrak{D}^n\varphi a.\psi\alpha.b^n
\end{array}$$

---

103. Considérons encore la série que donne la troisième solution. Il est visible, n.° 101, que la règle nécessaire pour déduire un coëfficient quelconque de cette série du précédent, comme E de D, se réduit à prendre dans chaque colonne verticale de D la dérivée divisée des quantités polynomiales exprimées en β et b, et de prendre de plus dans la dernière colonne la dérivée divisée des quantités en α, et en outre celle de la dernière quantité en a de cette même colonne.

104. La régularité des expressions du n.° 101 fait connoître comment la loi du développement s'étend à un nombre quelconque de fonctions de polynomes multipliées entre elles : car, si l'on a le produit de trois fonctions, $\chi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \text{etc.}) \times \varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times \psi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, il est facile de voir que dans les colonnes verticales les puissances et les produits des β, b, $\mathfrak{b}$ suivront la même loi que dans les puissances du trinome $\beta + b + \mathfrak{b}$, et que les indices des D qui affecteront $\psi\alpha$, φa, $\chi\mathfrak{a}$, se règleront sur les exposans de β, b, $\mathfrak{b}$. Si l'on avoit quatre fonctions, les quantités polynomiales suivroient la loi des termes des puissances du quadrinome, et ainsi de suite.

105. Donnons à présent quelques exemples qui reviennent souvent dans l'analyse.

EXEMPLE I.er

On propose de convertir la fraction

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}$$

en une série de cette forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

I. On a $A = a\alpha^{-1}$, d'où l'on déduit, par dérivation (n.° 97.),

$$B = -a.\alpha^{-2}\beta + b.\alpha^{-1},$$
$$C = a(-\alpha^{-2}\gamma + \alpha^{-3}\beta^2) - b.\alpha^{-2}\beta + c.\alpha^{-1},$$
$$D = a(-\alpha^{-2}\delta + \alpha^{-3}2\beta\gamma - \alpha^{-4}\beta^3) + b(-\alpha^{-2}\gamma + \alpha^{-3}\beta^2) - c.\alpha^{-2}\beta + d.\alpha^{-1},$$
$$E = a\{-\alpha^{-2}\varepsilon + \alpha^{-3}(2\beta\delta + \gamma^2) - \alpha^{-4}3\beta^2\gamma + \alpha^{-5}\beta^4\}$$
$$+ b(-\alpha^{-2}\delta + \alpha^{-3}2\beta\gamma - \alpha^{-4}\beta^3) + c(-\alpha^{-2}\gamma + \alpha^{-3}\beta^2) - d.\alpha^{-2}\beta + e.\alpha^{-1},$$

et ainsi de suite ; et pour le coëfficient du terme quelconque affecté de x^n, on aura la formule

$$A_n = \mathfrak{D}^n.(a\alpha^{-1}) = a\mathfrak{D}^n.\alpha^{-1} + b\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha^{-1} + c\mathfrak{D}^{n-2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + a_n.\alpha^{-1},$$

qui donne ce théorème. « Le coëfficient du terme affecté de x^n est formé » de la somme des $n + 1$ premiers termes de la puissance -1 du polynome » $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. multipliés respectivement par les coëfficiens » a, b, c, d, etc., a_n du numérateur de la fraction génératrice, écrits dans » l'ordre renversé. »

II. On peut aussi ordonner les parties suivant les puissances négatives de α, et on aura ainsi par la seconde solution du problème, n.° 100,

$$A = \alpha^{-1}a,$$
$$B = \alpha^{-1}.b - \alpha^{-2}.\beta a,$$
$$C = \alpha^{-1}.c - \alpha^{-2}(\beta b + \gamma a) + \alpha^{-3}.\beta^2 a,$$
$$D = \alpha^{-1}.d - \alpha^{-2}(\beta c + \gamma b + \delta a) + \alpha^{-3}(\beta^2 b + 2\beta\gamma a) - \alpha^{-4}.\beta^3 a,$$
$$E = \alpha^{-1}.e - \alpha^{-2}(\beta d + \gamma c + \delta b + \varepsilon a) + \alpha^{-3}\{\beta^2 c + 2\beta(\gamma b + \delta a) + \gamma^2 a\}$$
$$- \alpha^{-4}(\beta^3 b + 3\beta^2\gamma a) + \alpha^{-5}.\beta^4 a,$$

etc. Cette solution coïncide, quant au fond, avec la précédente, mais elle en diffère pour la forme. On trouve pour un terme quelconque

A_n

$$A_n = \mathfrak{D}^n.(\alpha^{-1}a) = \alpha^{-1}.\mathfrak{D}^n.a - \alpha^{-2}.\mathfrak{D}^{n-1}.(\beta a) + \alpha^{-3}.\mathfrak{D}^{n-2}.(\beta^2 a) - \alpha^{-4}.\mathfrak{D}^{n-3}.(\beta^3 a) + \text{etc.} \pm \alpha^{-n-1}.\beta^n a.$$

III. Si on veut disposer les parties de termes comme dans le développement du n.° 101, on aura par dérivation, n.° 103,

$$A = a\alpha^{-1}, \quad B = -a\alpha^{-2}.\beta + 1.\alpha^{-1}.b, \qquad C = -a\alpha^{-2}.\gamma + a\alpha^{-3}.\beta^2 + 1.\alpha^{-1}.c - 1.\alpha^{-2}.b\beta,$$

$$D = -a\alpha^{-2}.\delta + a\alpha^{-3}.2\beta\gamma - a\alpha^{-4}.\beta^3 + 1\,\alpha^{-1}.d - 1.\alpha^{-2}.\left\{\begin{matrix} b\gamma \\ +c\beta \end{matrix}\right\} + 1.\alpha^{-3}.b\beta^2,$$

$$E = -a\alpha^{-2}.\varepsilon + a\alpha^{-3}.\left\{\begin{matrix} 2\beta\delta \\ +\gamma^2 \end{matrix}\right\} - a\alpha^{-4}.3\beta^2\gamma + a\alpha^{-5}.\beta^4 + 1.\alpha^{-1}.e - 1.\alpha^{-2}.\left\{\begin{matrix} b\delta \\ +c\gamma \\ +d\beta \end{matrix}\right\} + 1.\alpha^{-3}.\left\{\begin{matrix} b2\beta\gamma \\ +c\beta^2 \end{matrix}\right\} - 1.\alpha^{-4}b\beta^3,$$

etc. Cette solution ne diffère des deux précédentes que par l'arrangement des parties, ainsi qu'il est facile de le vérifier. Je supprime la formule pour le terme général, parce qu'elle se conclud aisément de la loi qui règne dans les termes.

Nous ne nous sommes tant arrêtés à cet exemple que parce que les solutions que nous venons d'en donner renferment une solution du problème : Trouver immédiatement un terme quelconque d'une série récurrente dont on connoît l'échelle de relation ou la fraction génératrice ; solution qui a l'avantage de n'exiger aucune décomposition en facteurs, et par conséquent de n'être point arrêtée par les difficultés que présente la résolution des équations des degrés supérieurs. Nous reviendrons sur ce sujet, pour le traiter avec détail.

IV. Enfin, si on vouloit avoir un des coëfficiens B, C, D, etc. en termes récurrens, on mettroit $A = a\alpha^{-1}$ sous cette forme $A\alpha = a$, et l'on auroit, pour l'équation qui donne le coëfficient de x^n, $\mathfrak{D}^n.(A\alpha) = \mathfrak{D}^n.a$, où il suffira de développer le premier membre par le théorème du n.° 87. Si l'on demandoit par exemple le coëfficient de x^6, on trouveroit sur-le-champ l'équation

$$A\eta + B\zeta + C\varepsilon + D\delta + E\gamma + F\beta + G\alpha = g,$$

d'où il vient pour le coëfficient demandé

$$G = \frac{1}{\alpha}(g - F\beta - E\gamma - D\delta - C\varepsilon - B\zeta - A\eta).$$

EXEMPLE II.

106. Convertir la fraction

$$\frac{(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^r}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})^s}$$

en une série ordonnée suivant les puissances de x.

Le premier terme sera $a^r \alpha^{-s}$; il suffira donc, pour avoir une première solution, de faire s négatif dans l'exemple n.° 99. Contentons-nous de donner les expressions du coëfficient du terme général affecté de x^n; elles sont, en conséquence des trois solutions du problème (n.° 102),

$$\text{I. } A_n = a^r.\mathfrak{p}^n.\alpha^{-s} + \text{D}.a^r.\mathfrak{p}^{n-1}.\alpha^{-s}. + \mathfrak{p}^2.a^r.\mathfrak{p}^{n-2}.\alpha^{-s} + \text{etc.} + \mathfrak{p}^{n-1}.a^r.\text{D}.\alpha^{-s} + \mathfrak{p}^n.a^r.\alpha^{-s},$$

$$\text{II. } A_n = \alpha^{-s}\mathfrak{p}^n.a^r + \text{D}\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-1}.(\beta a^r) + \mathfrak{p}^2\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-2}.(\beta^2 a^r) + \mathfrak{p}^3\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-3}.(\beta^3 a^r) + \text{etc.} + \mathfrak{p}^n\alpha^{-s}.\beta^n a^r,$$

$$\begin{aligned}\text{III. } A_n = {} & a^r.\text{D}\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-1}.\beta + a^r.\mathfrak{p}^2\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-2}.\beta^2 + \text{etc.} + a^r.\mathfrak{p}^n\alpha^{-s}.\beta^n \\ & + \text{D}a^r.\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-1}.b + \text{D}a^r.\text{D}\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-2}.(b\beta) + \text{etc.} + \text{D}a^r.\mathfrak{p}^{n-1}\alpha^{-s}.b\beta^{n-1} \\ & + \mathfrak{p}^2 a^r.\alpha^{-s}.\mathfrak{p}^{n-2}.b^2 + \text{etc.} + \mathfrak{p}^2 a^r.\mathfrak{p}^{n-2}\alpha^{-s}.b^2\beta^{n-2} \\ & + \text{etc.} \\ & + \mathfrak{p}^n a^r.\alpha^{-s}.b^n;\end{aligned}$$

les développemens ultérieurs des quantités affectées de D s'effectuent sans difficulté.

EXEMPLE III.

107. Convertir la fonction algébrique $\frac{b + ax}{\gamma + \beta x + \alpha x^2}$ en une série descendante de cette forme

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.}$$

La fonction proposée peut s'écrire ainsi $\frac{ax + b}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$; le premier terme sera $a\alpha^{-1}.x^{-1}$, donc $A = a\alpha^{-1}$: de là on tire par dérivation les valeurs de B, C, D, etc., en se rappelant l'observation du n.° 83; et, en faisant attention que b et γ sont des derniers termes, dont les dérivées sont zéro, la série sera (n.° 100)

$$\alpha^{-1}a.x^{-1} + (\alpha^{-1}b - \alpha^{-2}.\beta a)x^{-2} + \{-\alpha^{-2}(\beta b + \gamma a) + \alpha^{-3}.\beta^2 a\}x^{-3}$$

$$+ \{ -\alpha^{-2}.\gamma b + \alpha^{-3}(\beta^2 b + 2\beta\gamma a) - \alpha^{-4}.\beta^3 a \} x^{-4}$$
$$+ \{ \alpha^{-3}(2\beta\gamma b + \gamma^2 a) - \alpha^{-4}(\beta^3 b + 3\beta^2\gamma a) + \alpha^{-5}.\beta^4 a \} x^{-5} + \text{etc.}$$

EXEMPLE IV.

108. Développer suivant les puissances de x l'expression

$$\frac{1}{(\mathrm{a}-x)^r(a-x)^s(\alpha-x)^t}.$$

On a pour le premier terme $A = \mathrm{a}^{-r}a^{-s}\alpha^{-t}$, et $\mathrm{D}\mathrm{a} = -1$, $\mathrm{D}a = -1$, $\mathrm{D}\alpha = -1$; ainsi on aura par dérivation

$$B = \mathrm{a}^{-r}a^{-s}.t\alpha^{-t-1} + (\mathrm{a}^{-r}.sa^{-s-1} + r\mathrm{a}^{-r-1}.a^{-s})\alpha^{-t},$$

$$C = \mathrm{a}^{-r}a^{-s}.\frac{t.t+1}{1.2}\alpha^{-t-2} + (\mathrm{a}^{-r}.sa^{-s-1} + r\mathrm{a}^{-r-1}.a^{-s})t\alpha^{-t-1}$$
$$+ (\mathrm{a}^{-r}.\frac{s.s+1}{1.2}a^{-s-2} + r\mathrm{a}^{-r-1}.sa^{-s-1} + \frac{r.r+1}{1.2}\mathrm{a}^{-r-2}.a^{-s})\alpha^{-t},$$

et ainsi de suite. Le coëfficient du terme quelconque affecté de x^n est indiqué par $\mathfrak{D}^n(\mathrm{a}^{-r}a^{-s}\alpha^{-t})$, $\mathrm{D}\mathrm{a}$, $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}\alpha$ étant $= -1$, formule qui se développe avec la plus grande facilité.

On peut appliquer ce procédé au cas où le dénominateur auroit un nombre quelconque de facteurs pareils, et l'étendre à celui où les facteurs du dénominateur seroient des puissances de polynomes.

EXEMPLE V.

109. Développer la fraction

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{etc.}}{\alpha x + \beta}$$

en une série descendante de cette forme

$$Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \text{etc.}$$

On a $A = a\alpha^{-1}$, et (n.° 83) $B = \mathrm{D}.(a\alpha^{-1})$, $C = \mathfrak{D}^2.(a\alpha^{-1})$, etc., et le coëfficient du terme affecté de x^{m-n} sera $\mathfrak{D}^{n-1}.(a\alpha^{-1})$, où $\mathrm{D}.\alpha = \beta$ et $\mathrm{D}.\beta = \mathfrak{D}^2.\alpha = 0$; et l'on aura par dérivation, pour les coëfficiens développés des premiers termes,

$A = a\alpha^{-1}$,
$B = -a\alpha^{-2}\beta + b\alpha^{-1}$,
$C = a\alpha^{-3}\beta^2 - b\alpha^{-2}\beta + c\alpha^{-1}$,
$D = -a\alpha^{-4}\beta^3 + b\alpha^{-3}\beta^2 - c\alpha^{-2}\beta + d\alpha^{-1}$,
etc.

On voit comment au moyen des dérivations on auroit sur-le-champ les termes si le numérateur de la fraction proposé se trouvoit divisé par $(\alpha x + \beta)^2$, ou en général par $(\alpha x + \beta)^r$, ou par le produit de deux ou de plusieurs facteurs simples $\alpha x + \beta$, $a x + b$, etc., ou par le produit de plusieurs polynomes. Ainsi le terme affecté de x^{m-r-n} dans

$$\frac{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \text{etc.}}{(\alpha x + \beta)^r}$$

aura pour coëfficient le développement de $\mathrm{D}^n.(a\alpha^{-r})$, $\mathrm{D}.\alpha$ étant $= \beta$ et $\mathrm{D}^2.\alpha = 0$.

Il se présente ici une foule d'exemples utiles sur-tout dans la théorie des équations. Mais en voilà assez pour montrer comment les dérivations conduisent d'ordinaire aux résultats demandés, de la manière la plus naturelle et la plus facile, et comment elles les expriment par des formules très-simples, qu'on emploie ensuite avec le plus grand avantage, soit dans les démonstrations, soit dans des recherches ultérieures.

Exemple VI.

110. Soit X une fonction rationnelle sans diviseur de x, de cette forme

$$X = \mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \text{etc.} + \mathfrak{D}x^{m-n} + \mathfrak{P}x^{m-n-1} + \mathfrak{Q}x^{m-n-2} + \text{etc.}; \quad \ldots(1)$$

on demande le coëfficient de x^{m-n} dans la série résultante du développement de $\frac{X}{(a-x)^r}$.

En faisant attention que $\mathrm{D}a = -1$ et $\mathrm{D}^2 a = 0$, on a

$$(a-x)^{-r} = a^{-r} + \mathrm{D}a^{-r}.x + \mathrm{D}^2 a^{-r}.x^2 + \mathrm{D}^3 a^{-r}.x^3 + \text{etc.}; \quad \ldots.(2)$$

donc, en multipliant par cette série la valeur de X, on trouve

$$\begin{array}{rl|rl|r|r|l}
 & & & & \mathfrak{A}a^{-r} & x^m \quad + \mathfrak{B}a^{-r} & x^{m-1} \quad + \mathfrak{C}a^{-r} \Big| x^{m-2} \\
 & & \mathfrak{A}\mathrm{D}a^{-r} & x^{m+1} \quad + \mathfrak{B}\mathrm{D}a^{-r} & + \mathfrak{C}\mathrm{D}a^{-r} & + \mathfrak{D}\mathrm{D}a^{-r} & \\
\mathfrak{A}\mathrm{D}^2 a^{-r} & x^{m+2} \quad + \mathfrak{B}\mathrm{D}^2 a^{-r} & & + \mathfrak{C}\mathrm{D}^2 a^{-r} & + \mathfrak{D}\mathrm{D}^2 a^{-r} & + \mathfrak{E}\mathrm{D}^2 a^{-r} & + \text{etc.} \quad ..(3) \\
+ \text{etc.} & + \text{etc.} & & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} &
\end{array}$$

Il résulte de là que le coëfficient de x^{m-n} peut être exprimé par $\mathrm{D}^n.(a^{-r}.\mathfrak{A})$, pourvu qu'on fasse $\mathrm{D}a = -1$, et de plus, à cause que la série (1) est descendante tandis que la série (2) est ascendante, pourvu qu'on suppose que $\mathrm{D}^{n-1}.\mathfrak{A}$, $\mathrm{D}^{n-2}.\mathfrak{A}$, etc., au lieu de désigner les lettres qui précèdent $\mathrm{D}^n.\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$, désignent celles qui suivent $\mathfrak{D}$, savoir $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, etc.; ou, ce qui revient au même, pourvu qu'on écrive $\mathrm{D}^{n+1}.\mathfrak{A}$, $\mathrm{D}^{n+2}.\mathfrak{A}$, etc., au lieu de $\mathrm{D}^{n-1}.\mathfrak{A}$. $\mathrm{D}^{n-2}.\mathfrak{A}$, etc.

De

De cette manière le coëfficient de x^{m-n} sera $\mathrm{D}^n.(a^{-r}.\mathfrak{A}) =$
$\mathrm{D}^n.\mathfrak{A}.a^{-r} + \mathrm{D}^{n+1}.\mathfrak{A}.\mathrm{D}a^{-r} + \mathrm{D}^{n+2}.\mathfrak{A}.\mathrm{D}^2a^{-r} + \mathrm{D}^{n+3}.\mathfrak{A}.\mathrm{D}^3a^{-r} + \text{etc.} =$
$$\mathfrak{O}.a^{-r} + \mathfrak{P}.ra^{-r-1} + \mathfrak{Q}.\frac{r.r+1}{1.\ 2}a^{-r-2} + \mathfrak{R}.\frac{r.r+1.r+2}{1.\ 2.\ 3}a^{-r-3} + \text{etc.}$$
On aura pareillement pour le coëfficient de x^m, où $n = o$,
$\mathrm{D}^0.(a^{-r}.\mathfrak{A}) = \mathrm{D}^0.\mathfrak{A}.a^{-r} + \mathrm{D}^1.\mathfrak{A}.\mathrm{D}a^{-r} + \mathrm{D}^2.\mathfrak{A}.\mathrm{D}^2a^{-r} + \mathrm{D}^3.\mathfrak{A}.\mathrm{D}^3a^{-r} + \text{etc.}$

Si, X étant la même série que ci-dessus, on demande le coëfficient de x^{m-n} dans le développement de $\frac{X}{(a-x)^r(a-x)^s(\alpha-x)^t}$; on aura, en observant que $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}\alpha = -1$, et sous les mêmes conditions que ci-dessus,
$$\mathrm{D}^n.(a^{-r}a^{-s}\alpha^{-t}.\mathfrak{A}) =$$
$\mathrm{D}^n.\mathfrak{A}.a^{-r}a^{-s}\alpha^{-t} + \mathrm{D}^{n+1}.\mathfrak{A}.\mathrm{D}(a^{-r}a^{-s}\alpha^{-t}) + \mathrm{D}^{n+2}.\mathfrak{A}.\mathrm{D}^2(a^{-r}a^{-s}\alpha^{-t}) + \text{etc.},$
formule dont le développement ultérieur n'a plus de difficulté.

LAGRANGE a aussi donné pour la solution de cet exemple des formules élégantes, exprimées en différentielles, dans le tome V des *Mélanges de Turin*, pages 207 et 219.

§. II.

Des fonctions quelconques de deux ou de plusieurs polynomes.

111. Comme nous avons à traiter de quantités indépendantes, comprises dans la même expression, dont les unes varient tandis que les autres demeurent constantes; nous avons besoin de notations qui indiquent ces variations partielles, et nous allons fixer le sens des signes que nous emploîrons à cet usage.

$\mathrm{D}^m.\varphi(a,\alpha)$, sans virgule à l'indice de D, désigne toujours m dérivations *totales*, c'est-à-dire, des dérivations où a et α varient à la fois, ainsi que leurs dérivées.

$\mathrm{D}^{m,n}.\varphi(a,\alpha)$, avec une virgule entre les indices de D, désigne des dérivations *partielles*, savoir m dérivations où a seul et ses dérivées varient, α demeurant constant, et de plus n dérivations où α seul varie avec ses dérivées.

$\mathrm{D}^{0,n}.\varphi(a,\alpha)$, ou simplement $\mathrm{D}^{,n}.\varphi(a,\alpha)$, indique n dérivations partielles, la seule lettre α, qui dans $\varphi(a,\alpha)$ est après la virgule, variant ainsi que ses dérivées.

$\mathrm{D}^{m,0}.\varphi(a,\alpha)$, ou $\mathrm{D}^{m,}.\varphi(a,\alpha)$, indique m dérivations par rapport à a seul et à ses dérivées.

$D^{m,n}\varphi(a,\alpha)$, sans point après le D, marque, comme n.° 11, que $Da = 1$ et $D\alpha = 1$; ainsi cette expression dénote la même chose que $\frac{d^{m+n}\varphi(a,\alpha)}{da^m . d\alpha^n}$.

Quant aux dérivées divisées, nous dénoterons par $D^{m,n}.\varphi(a,\alpha)$ l'expression $\frac{D^{m,n}.\varphi(a,\alpha)}{1.2.3...m \times 1.2.3...n}$, et par $D^{l,m,n}.\varphi(a,a,\alpha)$ l'expression $\frac{D^{l,m,n}.\varphi(a,a,\alpha)}{1.2..l \times 1.2..m \times 1.2..n}$.

On voit, sans que j'en avertisse, que $D^{m,}.D^{,n}.\varphi(a,\alpha)$ est la même chose que $D^{m,n}.\varphi(a,\alpha)$, et qu'on peut se servir également des deux expressions : nous préférons la dernière, comme plus simple. Pareillement, $D^{l,,}.D^{,m,}.D^{,,n}.\varphi(a,a,\alpha)$ est la même chose que $D^{l,m,n}.\varphi(a,a,\alpha)$; les virgules aux indices servant toujours à distinguer les dérivées partielles tant les unes des autres que des dérivées totales.

PROBLÈME.

112. Soit proposée une fonction quelconque de deux polynomes, savoir

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}, \ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}); \quad ...(1)$$

on demande à la développer en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

et à calculer immédiatement un terme quelconque du développement.

C'est là le cas général que nous avons promis de traiter, n.° 85, et qui ne nous paroît pas l'avoir été jusqu'à présent.

Si l'on n'a que la fonction $\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}, \alpha)$ où α est constant, son développement, par ce qui a été dit dans l'article premier, peut être indiqué de cette manière,

$$\varphi(a,\alpha) + D^{1,}.\varphi(a,\alpha).x + D^{2,}.\varphi(a,\alpha).x^2 + D^{3,}.\varphi(a,\alpha).x^3 + \text{etc.}, \quad ...(2)$$

où les indices de D sont suivis d'une virgule pour marquer que dans $\varphi(a,\alpha)$ c'est a seul placé avant la virgule qui varie, α demeurant constant.

Maintenant, si l'on met $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$ à la place de α dans les quantités $\varphi(a,\alpha)$, $D^{1,}.\varphi(a,\alpha)$, $D^{2,}.\varphi(a,\alpha)$, etc., elles se développeront d'une manière pareille, savoir, a étant constant et α variable,

$\varphi(a,\alpha)$ en $\varphi(a,\alpha) + D^{,1}.\varphi(a,\alpha).x + D^{,2}.\varphi(a,\alpha).x^2 + D^{,3}.\varphi(a,\alpha).x^3 + \text{etc.}$,

$D^{1,}.\varphi(a,\alpha)$ en $D^{1,}.\varphi(a,\alpha) + D^{1,1}\varphi(a,\alpha).x + D^{1,2}.\varphi(a,\alpha).x^2 + \text{etc.}$,

$D^{2,}.\varphi(a,\alpha)$ en $D^{2,}.\varphi(a,\alpha) + D^{2,1}.\varphi(a,\alpha).x + D^{2,2}.\varphi(a,\alpha).x^2 + \text{etc.}$,

etc.

Donc, en mettant ces valeurs dans la formule (2), et en ordonnant suivant les puissances de x, on aura

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) =$$

$$\varphi(a,\alpha) + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,1}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{1,}.\varphi(a,\alpha) \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,2}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{1,1}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{2,}.\varphi(a,\alpha) \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,3}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{1,2}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{2,1}.\varphi(a,\alpha) \\ + \mathfrak{D}^{3,}.\varphi(a,\alpha) \end{array}\right| x^3 + \text{etc.} \quad \ldots(3)$$

Si l'on fait attention à la loi qui règne dans les termes, on en conclura facilement que le coëfficient du terme quelconque de la série affecté de x^n pourra s'exprimer par cette formule

$$A_n = \mathfrak{D}^n.\varphi(a,\alpha) =$$

$$\mathfrak{D}^{,n}.\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{1,n-1}.\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{2,n-2}.\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{3,n-3}.\varphi(a,\alpha) + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{D}^{n-1,1}.\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{n,}.\varphi(a,\alpha). \quad \ldots.(4)$$

113. L'analyse précédente ne donne qu'un commencement de développement; pour parvenir au développement complet et réduit, tâchons de séparer les quantités polynomiales de celles qui doivent demeurer affectées de la fonction φ.

Faisons, à cet effet, dans la fonction proposée (1), n.° 112,

$$b + cx + dx^2 + \text{etc.} = p, \text{ et } \beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.} = \pi; \quad \ldots.(5)$$

la fonction proposée deviendra

$$\varphi(a + px, \alpha + \pi x),$$

qu'il s'agit de développer. Or je remarque que dans ce cas $\mathfrak{D}^{,s}.\varphi(a,\alpha)$ devient $\mathfrak{D}^{,s}\varphi(a,\alpha).\pi^s$, n.° 3, que $\mathfrak{D}^{r,}.\varphi(a,\alpha)$ devient $\mathfrak{D}^{r,}\varphi(a,\alpha).p^r$, et que $\mathfrak{D}^{r,s}.\varphi(a,\alpha)$ devient $\mathfrak{D}^{r,s}\varphi(a,\alpha).p^r\pi^s$: ainsi la formule (3) devient

$$\varphi(a + px, \alpha + \pi x) =$$

$$\varphi(a,\alpha) + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,1}\varphi(a,\alpha).\pi \\ + \mathfrak{D}^{1,}\varphi(a,\alpha).p \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,2}\varphi(a,\alpha).\pi^2 \\ + \mathfrak{D}^{1,1}\varphi(a,\alpha).p\pi \\ + \mathfrak{D}^{2,}\varphi(a,\alpha).p^2 \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}^{,3}\varphi(a,\alpha).\pi^3 \\ + \mathfrak{D}^{1,2}\varphi(a,\alpha).p\pi^2 \\ + \mathfrak{D}^{2,1}\varphi(a,\alpha).p^2\pi \\ + \mathfrak{D}^{3,}\varphi(a,\alpha).p^3 \end{array}\right| x^3 + \text{etc.} \quad ..(6)$$

114. A présent, à cause des valeurs de p et π, on a généralement $p^r = (b + cx + dx^2 + \text{etc.})^r$, $\pi^s = (\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^s$; ainsi

$$p' = b' + \mathrm{D}.b'.x + \mathfrak{D}^2.b'.x^2 + \mathfrak{D}^3.b'.x^3 + \text{etc.},$$

$$\varpi' = \beta' + \mathrm{D}.\beta'.x + \mathfrak{D}^2.\beta'.x^2 + \mathfrak{D}^3.\beta'.x^3 + \text{etc.},$$

$$p'\varpi' = b'\beta' + \mathrm{D}.(b'\beta').x + \mathfrak{D}^2.(b'\beta').x^2 + \mathfrak{D}^3.(b'\beta').x^3 + \text{etc.}$$

Mettant donc les valeurs de p, ϖ et celles des puissances et des produits de ces quantités dans la formule (6), ordonnant par rapport à x, et mettant, pour abréger, A à la place de $\phi(a, \alpha)$; la formule (6) devient

$$\phi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) =$$

$$A + \left.\begin{array}{l} \mathrm{D}^{,1}A.\beta \\ + \mathrm{D}^{1,}A.b \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} \mathrm{D}^{,1}A.\mathrm{D}.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\beta^2 \\ + \mathrm{D}^{1,}A.\mathrm{D}.b + \mathfrak{D}^{1,1}A.b\beta \\ + \mathfrak{D}^{2,}A.b^2 \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} \mathrm{D}^{,1}A.\mathfrak{D}^2.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathrm{D}.\beta^2 + \mathfrak{D}^{,3}A.\beta^3 \\ + \mathrm{D}^{1,}A.\mathfrak{D}^2.b + \mathfrak{D}^{1,1}A.\mathrm{D}.(b\beta) + \mathfrak{D}^{1,2}A.b\beta^2 \\ + \mathfrak{D}^{2,}A.\mathrm{D}.b^2 + \mathfrak{D}^{2,1}A.b^2\beta \\ + \mathfrak{D}^{3,}A.b^3 \end{array}\right| x^3$$

$$+ \left.\begin{array}{l} \mathrm{D}^{,1}A.\mathfrak{D}^3.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathfrak{D}^2.\beta^2 + \mathfrak{D}^{,3}A.\mathrm{D}.\beta^3 + \mathfrak{D}^{,4}A.\beta^4 \\ + \mathrm{D}^{1,}A.\mathfrak{D}^3.b + \mathfrak{D}^{1,1}A.\mathfrak{D}^2.(b\beta) + \mathfrak{D}^{1,2}A.\mathrm{D}.(b\beta^2) + \mathfrak{D}^{1,3}A.b\beta^3 \\ + \mathfrak{D}^{2,}A.\mathfrak{D}^2.b^2 + \mathfrak{D}^{2,1}A.\mathrm{D}.(b^2\beta) + \mathfrak{D}^{2,2}A.b^2\beta^2 \\ + \mathrm{D}^{3,}A.\mathrm{D}.b^3 + \mathfrak{D}^{3,1}A.b^3\beta \\ + \mathfrak{D}^{4,}A.b^4 \end{array}\right| x^4 + \text{etc.} \quad \ldots.(7)$$

La loi des termes est facile à saisir; on en tire la proposition suivante.

Théorème.

115. Si l'on a une fonction quelconque de deux polynomes,

$$\phi(a + bx + cx^2 + \text{etc.}, \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}),$$

le coëfficient du terme quelconque affecté de x^n dans le développement est, en mettant A au lieu de $\phi(a, \alpha)$,

$$A_n = \mathfrak{D}^n.\phi(a, \alpha) = \quad \ldots.(8)$$

$$\mathfrak{D}^{,n}.A + \mathfrak{D}^{1,n-1}.A + \mathfrak{D}^{2,n-2}.A + \mathfrak{D}^{3,n-3}.A + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{n-1,1}.A + \mathfrak{D}^{n,}.A =$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}^{,1}A.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathrm{D}^{n-2}.\beta^2 + \mathfrak{D}^{,3}A.\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^3 + \mathfrak{D}^{,4}A.\mathfrak{D}^{n-4}.\beta^4 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{,n}A.\beta^n \\ + \mathrm{D}^{1,}A.\mathfrak{D}^{n-1}.b + \mathfrak{D}^{1,1}A.\mathfrak{D}^{n-2}.(b\beta) + \mathfrak{D}^{1,2}A.\mathfrak{D}^{n-3}.(b\beta^2) + \mathfrak{D}^{1,3}A.\mathfrak{D}^{n-4}(b\beta^3) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{1,n-1}A.b\beta^{n-1} \\ + \mathfrak{D}^{2,}A.\mathfrak{D}^{n-2}.b^2 + \mathfrak{D}^{2,1}A.\mathfrak{D}^{n-3}(b^2\beta) + \mathfrak{D}^{2,2}A.\mathfrak{D}^{n-4}(b^2\beta^2) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{2,n-2}A.b^2\beta^{n-2} \\ + \mathfrak{D}^{3,}A.\mathfrak{D}^{n-3}.b^3 + \mathfrak{D}^{3,1}A.\mathfrak{D}^{n-4}(b^3\beta) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{3,n-3}A.b^3\beta^{n-3} \\ + \mathfrak{D}^{4,}A.\mathfrak{D}^{n-4}.b^4 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{4,n-4}A.b^4\beta^{n-4} \\ + \text{etc.} \\ + \mathfrak{D}^{n,}A.b^n, \end{array}$$

où

où $\mathrm{D}^{,1}A$, $\mathrm{D}^{1,}A$, $\mathrm{D}^{,2}A$, $\mathrm{D}^{1,1}A$, $\mathrm{D}^{2,}A$, etc. sont la même chose respectivement que $\frac{dA}{d\alpha}$, $\frac{dA}{da}$, $\frac{d^2A}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2A}{da\,d\alpha}$, $\frac{d^2A}{da^2}$, etc., et où les b et β doivent être considérés comme des premiers termes de polynomes.

---

116. Si on considère la loi des termes de la formule (7), n.° 114, on en voit découler la règle suivante, pour faire dériver un terme quelconque de la série, du terme précédent, c'est-à-dire, $\mathfrak{D}^{n+1}.\varphi(a,\alpha)$ de $\mathfrak{D}^{n}.\varphi(a,\alpha)$.

RÈGLE.

Le développement de $\mathfrak{D}^{n}.\varphi(a,\alpha)$ étant donné et disposé par colonnes verticales; pour en déduire celui de $\mathfrak{D}^{n+1}.\varphi(a,\alpha)$, 1.° dans chaque colonne faites une nouvelle dérivation totale et divisée sur les quantités polynomiales, c'est-à-dire, composées de b, β et des lettres suivantes; 2.° dans la dernière colonne, prenez de plus dans chaque terme la dérivée divisée suivante de $\varphi(a,\alpha)$, par rapport à α seulement, et en outre la dérivée divisée de $\varphi(a,\alpha)$ par rapport à a, mais seulement dans le dernier terme de la dernière colonne, c'est-à-dire, dans la plus haute dérivée de $\varphi(a,\alpha)$ partielle par rapport à a.

117. Par cette règle, et en développant les quantités polynomiales par les numéros 30 et 99, on déduit les uns des autres les coëfficiens des termes de la série, tout développés et réduits, ainsi qu'il suit,

$$A = \varphi(a,\alpha), \quad B = \mathrm{D}^{,1}A.\beta$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}A.b,$$

$$C = \mathrm{D}^{,1}A.\gamma + \mathfrak{D}^{,2}A.\beta^2$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}A.c + \mathfrak{D}^{1,1}A.b\beta$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}A.b^2,$$

$$D = \mathrm{D}^{,1}A.\delta + \mathfrak{D}^{,2}A.\,2\beta\gamma + \mathfrak{D}^{,3}A.\beta^3$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}A.d + \mathfrak{D}^{1,1}A.(b\gamma + c\beta) + \mathfrak{D}^{1,2}A.b\beta^2$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}A.\,2bc + \mathfrak{D}^{2,1}A.b^2\beta$$
$$+ \mathfrak{D}^{3,}A.b^3,$$

$$E = \mathrm{D}^{,1}A.\varepsilon + \mathfrak{D}^{,2}A.(2\beta\delta + \gamma^2) + \mathfrak{D}^{,3}A.\,3\beta^2\gamma + \mathfrak{D}^{,4}A.\beta^4$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}A.e + \mathfrak{D}^{1,1}A.(b\delta + c\gamma + d\beta) + \mathfrak{D}^{1,2}A.(b\,2\beta\gamma + c\beta^2) + \mathrm{D}^{1,3}A.b\beta^3$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}A.(2bd + c^2) + \mathfrak{D}^{2,1}A.(b^2\gamma + 2bc\beta) + \mathfrak{D}^{2,2}A.b^2\beta^2$$
$$+ \mathfrak{D}^{3,}A.\,3b^2c + \mathfrak{D}^{3,1}A.b^3\beta$$
$$+ \mathfrak{D}^{4,}A.b^4,$$

A a

$$
\begin{aligned}
F = {} & \\
& \mathrm{D}^{,1}A.\zeta + \mathfrak{D}^{,2}A.\{2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta\} + \mathfrak{D}^{,3}A.\{3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2\} \quad \mathfrak{D}^{,4}A.4\beta^3\gamma + \mathfrak{D}^{,5}A.\beta^5 \\
& + \mathrm{D}^{1,}A.f + \mathfrak{D}^{1,1}A.\left\{\begin{matrix} b\varepsilon + c\delta + \\ d\gamma + e\beta \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{1,2}A.\left\{\begin{matrix} b(2\beta\delta + \gamma^2) \\ + c2\beta\gamma + d\beta^2 \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{1,3}A.\left\{\begin{matrix} b3\beta^2\gamma \\ + c\beta^3 \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{1,4}A.b\beta^4 \\
& + \mathfrak{D}^{2,}A.\{2be + 2cd\} + \mathfrak{D}^{2,1}A.\left\{\begin{matrix} b^2\delta + 2bc\gamma + \\ (2bd + c^2)\beta \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{2,2}A.\left\{\begin{matrix} b^2 2\beta\gamma \\ + 2bc\beta^2 \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{2,3}A.b^2\beta^3 \\
& + \mathfrak{D}^{3,}A.\{3b^2d + 3bc^2\} + \mathfrak{D}^{3,1}A.\left\{\begin{matrix} b^3\gamma + \\ 3b^2c\beta \end{matrix}\right\} + \mathfrak{D}^{3,2}A.b^3\beta^2 \\
& + \mathfrak{D}^{4,}A.4b^3c + \mathfrak{D}^{4,1}A.b^4\beta \\
& + \mathfrak{D}^{5,}A.b^5,
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite. Il est aisé de continuer aussi loin qu'on voudra. Nous nous sommes servis, pour développer les quantités polynomiales, du procédé de la première solution du problème du n.° 97; on peut aussi y appliquer les procédés de la seconde et de la troisième solution du même problème.

118. Il seroit inutile d'expliquer la manière de calculer un terme quelconque indépendamment des autres, soit en écrivant dans l'ordre inverse les colonnes de la formule générale du théorème précédent, soit en les laissant telles qu'elles se trouvent; on pourra appliquer aux développemens des quantités polynomiales les règles et les observations du §. III de l'art. I, et les solutions du problème du n.° 97. Après tout ce qui a été dit jusqu'ici, ces développemens n'ont plus de difficulté. Il faut observer que dans toutes les formules précédentes de cet article les b et β doivent être considérés comme des premiers termes de polynomes, ce qui résulte des analyses des problèmes que nous avons résolus.

PROBLÈME.

119. Soit proposée une fonction quelconque de trois polynomes,

$$\varphi(\mathrm{a} + \mathrm{b}x + \mathrm{c}x^2 + \text{etc.},\ a + bx + cx^2 + \text{etc.},\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.});$$

on demande à la développer en une série de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

Si l'on compare la solution que nous venons de donner, n.° 114, pour une fonction de deux polynomes, avec celle, n.° 21, pour une fonction d'un

seul polynome, on en conclura facilement que les premiers termes du développement demandé seront tels qu'ils suivent, en mettant, pour plus de simplicité, A au lieu de $\varphi(\mathfrak{a}, a, \alpha)$.

$$
\begin{array}{r|l r|l r r|l}
A + \mathrm{D}^{,,1}A.\beta & x & + \mathrm{D}^{,,1}A.\mathrm{D}.\beta & + \mathrm{p}^{,,2}A.\beta^2 \; x^2 & + \mathrm{D}^{,,1}A.\mathrm{p}^2.\beta \quad + \mathrm{p}^{,,2}A.\mathrm{D}.\beta^2 & + \mathrm{p}^{,,3}A.\beta^3 & x^3 \\
+ \mathrm{D}^{,1,}A.b & & + \mathrm{D}^{,1,}A.\mathrm{D}.b & + \mathrm{p}^{,1,1}A.b\beta & + \mathrm{D}^{,1,}A.\mathrm{p}^2.b + \mathrm{p}^{,1,1}A.\mathrm{D}.(b\beta) & + \mathrm{p}^{,1,2}A.b\beta^2 & \\
+ \mathrm{D}^{1,,}A.\mathfrak{b} & & + \mathrm{D}^{1,,}A.\mathrm{D}.\mathfrak{b} & + \mathrm{p}^{,2,}A.b^2 & + \mathrm{D}^{1,,}A.\mathrm{p}^2.\mathfrak{b} \quad + \mathrm{p}^{,2,}A.\mathrm{D}.b^2 & + \mathrm{p}^{,2,1}A.b^2\beta & \\
& & & + \mathrm{p}^{1,,1}A.\mathfrak{b}\beta & + \mathrm{p}^{1,,1}A.\mathrm{D}.(\mathfrak{b}\beta) & + \mathrm{p}^{,3,}A.b^3 & \\
& & & + \mathrm{p}^{1,1,}A.\mathfrak{b}b & + \mathrm{p}^{1,1,}A.\mathrm{D}.(\mathfrak{b}b) & + \mathrm{p}^{1,,2}A.\mathfrak{b}\beta^2 & \\
& & & + \mathrm{p}^{2,,}A.\mathfrak{b}^2 & + \mathrm{p}^{2,,}A.\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2 & + \mathrm{p}^{1,1,1}A.\mathfrak{b}b\beta & + \text{etc.} \\
& & & & & + \mathrm{p}^{2,,1}A.\mathfrak{b}^2\beta & \\
& & & & & + \mathrm{p}^{1,2,}A.\mathfrak{b}b^2 & \\
& & & & & + \mathrm{p}^{2,1,}A.\mathfrak{b}^2 b & \\
& & & & & + \mathrm{p}^{3,,}A.\mathfrak{b}^3 &
\end{array}
$$

De même que dans le développement de la fonction de deux polynomes les quantités polynomiales exprimées en β et b, n.° 114, suivent la loi des termes des puissances du binome $\beta + b$; ici les quantités polynomiales placées dans les lignes verticales et exprimées en β, b, $\mathfrak{b}$, suivent la loi des termes des puissances du trinome $\beta + b + \mathfrak{b}$, en supprimant les coëfficiens numériques de ces termes; et les indices des D qui affectent A sont réglés sur les exposans de β, de b et de $\mathfrak{b}$. De là il s'ensuit que dans la fonction de quatre polynomes les quantités polynomiales suivent la loi des termes des puissances du quadrinome, et ainsi de suite.

Il est facile de conclure de la loi qui règne dans les termes précédens la forme du terme général affecté de x^n, ainsi que la règle de dérivation pour déduire le coëfficient de chaque terme de celui du terme précédent.

120. Si l'on avoit à développer une fonction quelconque de deux autres fonctions de polynomes,

$$\varphi\{\mathrm{F}(a + bx + cx^2 + \text{etc.}),\ \mathrm{f}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})\},$$

il suffiroit de faire dans le n.° 117, $a = \mathrm{F}a$, $b = \mathrm{D}.\mathrm{F}a$, $c = \mathrm{p}^2.\mathrm{F}a$, etc., $\alpha = \mathrm{f}\alpha$, $\beta = \mathrm{D}.\mathrm{f}\alpha$, $\gamma = \mathrm{p}^2.\mathrm{f}\alpha$, etc., et de développer ces expressions par la règle du n.° 30. Ce cas ne présente aucune nouvelle difficulté.

§. III.

Applications et remarques.

Nous avons réservé pour ce paragraphe quelques observations que nous n'avons pas cru devoir présenter plus tôt, pour ne pas interrompre l'ordre des objets que nous venons de traiter.

(I.)

121. Donnons d'abord des procédés abrégés pour les équations dérivées. Si l'on a une équation entre plusieurs quantités ou fonctions de quantités indépendantes, mêlées ensemble d'une manière quelconque, et qu'on demande à prendre de cette équation, soit l'équation dérivée qui suit immédiatement, soit l'équation dérivée d'un ordre quelconque, il faut, avant de faire les dérivations, avoir soin de tout ramener aux lettres initiales, ce qui introduira des coëfficiens numériques nécessaires pour l'exactitude du résultat. En faisant usage de cette observation, on peut déduire sur-le-champ d'une équation en termes récurrens celle d'où l'on tire le coëfficient d'un terme quelconque du développement; on abrègera ainsi et on étendra en même temps la manière de trouver les termes de la série du développement en termes récurrens, manière dont nous avons donné des applications dans les n.os 13, 15, 17, 18. Éclaircissons la chose par des exemples.

Prenons le cas du n.° 18, où l'on a eu, pour trouver le second terme de la série, l'équation

$$\alpha B = m\beta A;$$

supposons qu'on demande en termes récurrens le coëfficient du 5.e terme de la série, affecté de x^4. Il faudra prendre la dérivée troisième de cette équation, ou développer les deux membres de

$$\text{D}^3.(\alpha B) = m\,\text{D}^3.(\beta A).$$

Mais ici on ne peut pas considérer B et β comme des premiers termes de polynomes; il faut donc tout ramener aux lettres initiales α et A, ce qu'on obtient en donnant à l'équation précédente cette forme

$$\text{D}^3.(\alpha\,\text{D}.A) = m\,\text{D}^3.(\text{D}.\alpha.A).$$

Développant à présent par le théorème du n.° 87, on trouve, à cause que $\text{D}^3.\text{D}.A = 4\,\text{D}^4.A$, $\text{D}^2.\text{D}.A = 3\,\text{D}^3.A$, $\text{D}.\text{D}.A = 2\,\text{D}^2.A$, et ainsi des autres,

$$\alpha.4\,\text{D}^4.A + \text{D}\alpha.3\,\text{D}^3.A + \text{D}^2.\alpha.2\,\text{D}^2.A + \text{D}^3.\alpha.\text{D}.A =$$
$$m(\text{D}.\alpha.\text{D}^3.A + 2\,\text{D}^2.\alpha.\text{D}^2.A + 3\,\text{D}^3.\alpha.\text{D}.A + 4\,\text{D}^4.\alpha.A),$$

où

où l'on voit qu'on introduit ainsi les coëfficiens numériques 2, 3, 4, nécessaires pour l'exactitude du résultat. Si on met à présent au lieu des dérivées indiquées leurs valeurs, on a, en transposant,

$$4\alpha E = (m-3)\beta D + (2m-2)\gamma C + (3m-1)\delta B + 4m\varepsilon A,$$

de même que n.° 18.

122. On peut abréger le calcul par le procédé suivant. Si dans l'équation proposée il n'entre que des B, b, β avec des A, a, α; on mettra 1 devant chaque B, b, β; ensuite, pour prendre une dérivée quelconque de l'équation, on fera les dérivations à l'ordinaire; mais toutes les fois qu'on changera une lettre provenant des $1B$, $1b$, 1β, en celle qui suit immédiatement, on changera aussi son coëfficient en l'augmentant de l'unité; et s'il faut changer une de ces lettres dans la 2ᵉ, 3ᵉ, etc. de celles qui la suivent, on augmentera son coëfficient de 2, de 3, etc. unités respectivement.

Soit pris l'exemple du n.° 106, où l'on a eu $A = a^r\alpha^{-s}$; on en tire $B = -a^r.s\alpha^{-s-1}\beta + ra^{r-1}b.\alpha^{-s}$, et en multipliant par $a\alpha$ et mettant A au lieu de $a^r\alpha^{-s}$, on a l'équation

$$a\alpha B + (sa\beta - rb\alpha)A = 0,$$

laquelle donne le coëfficient de x dans le développement n.° 106. Si l'on veut en déduire l'équation qui donne lo coëfficient de x^3, on écrira

$$a\alpha.1B + (sa.1\beta - r.1b\alpha)A = 0;$$

en prenant la dérivée seconde de chaque terme considéré comme origine particulière de dérivation, on trouve sur-le-champ, par le procédé que nous venons d'indiquer et par le n.° 87,

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha.3D + (a\beta + b\alpha)2C + (a\gamma + b\beta + c\alpha)1B \\ \quad + (sa1\beta - r1b\alpha)C + \left\{\begin{array}{l} s(a2\gamma + b1\beta) \\ -r(1b\beta + 2c\alpha) \end{array}\right\}B + \left\{\begin{array}{l} s(a3\delta + b2\gamma + c1\beta) \\ -r(1b\gamma + 2c\beta + 3d\alpha) \end{array}\right\}A \end{array}\right\} = 0.$$

123. Si, outre les A, a, α et B, b, β, il entre des C, c, γ dans l'équation dont il faut prendre la dérivée d'un ordre quelconque, on mettra 1 devant les B, b, β, et le produit des deux facteurs 1.2 devant chaque C, c, γ, en conservant cependant l'égalité entre les membres de l'équation; puis, pour prendre la dérivée de l'ordre n de l'équation, on appliquera à chaque terme les règles du §. I.ᵉʳ, article II, en considérant chaque terme comme une origine particulière de dérivation, et toutes les fois qu'on changera une lettre dans

une des suivantes, on augmentera chaque facteur numérique qui affecte la lettre d'un nombre d'unités égal à l'indice de la dérivation que l'on effectue sur la lettre, ou, ce qui est la même chose, du nombre qui marque la distance entre la lettre et celle en laquelle on la change.

S'il entroit aussi des D, d, δ dans l'équation proposée, on mettroit devant chaque D, d, δ le produit $1.2.3$, et devant chaque E, e, ε le produit $1.2.3.4$, et ainsi des autres.

Prenons pour exemple l'équation du n.° 17; on l'écrira ainsi

$$1\beta.1.2C - 1.2\gamma.1B + (1\beta)^3.A = 0:$$

pour en prendre la dérivée troisième, on aura sur-le-champ, par le procédé que nous venons d'indiquer,

$$\left.\begin{array}{l} 1\beta.4.5F + 2\gamma.3.4E + 3\delta.2.3D + 4\varepsilon.1.2C \\ \quad - 1.2\gamma.4E - 2.3\delta.3D - 3.4\varepsilon.2C \quad - 4.5\zeta.1B \\ \qquad + (1\beta)^3.D + 3(1\beta^2)2\gamma.C + \left\{\begin{array}{l}3(1\beta)^2 3\delta + \\ 3(1\beta)(2\gamma)^2\end{array}\right\}B + \left\{\begin{array}{l}3(1\beta)^2 4\varepsilon + \\ 3(1\beta)2.2\gamma 3\delta \\ \quad + (2\gamma)^3\end{array}\right\}A \end{array}\right\} = 0,$$

équation qui donne la valeur de F en termes récurrens.

La démonstration se tire de ce que, l'équation proposée étant mise sous la forme

$$\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}^2.A - \mathrm{D}^2.\alpha.\mathrm{D}.A + (\mathrm{D}.\alpha)^3.A = 0,$$

pour en prendre la dérivée troisième divisée, il faut développer séparément

$$\mathfrak{D}^3.\{\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}^2.A\}, \quad \mathfrak{D}^3.\{\mathrm{D}^2.\alpha.\mathrm{D}.A\}, \quad \mathfrak{D}^3.\{(\mathrm{D}.\alpha)^3.A\}:$$

or $\mathfrak{D}^3.\{\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}^2.A\} = \mathrm{D}.\alpha\,\mathfrak{D}^3.\mathrm{D}^2.A + \mathrm{D}.\mathrm{D}.\alpha.\,\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}^2.A + \mathfrak{D}^2.\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}.\mathrm{D}^2.A + \mathfrak{D}^3.\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}.A$;
mais $\mathfrak{D}^3.\mathrm{D}^2.A = 4.5\,\mathfrak{D}^5.A$, $\mathrm{D}.\mathrm{D}.\alpha = 2\,\mathfrak{D}^2.\alpha$, $\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}^2.A = 3.4\,\mathfrak{D}^4.A$, etc.

Nos règles et nos notations sont très-utiles dans la méthode des coëfficiens indéterminés, où elles servent soit à abréger les calculs, soit à donner des expressions générales; et l'on sait que la méthode des coëfficiens indéterminés est un des moyens les plus étendus et les plus féconds de l'analyse.

(II.)

124. Les formules que nous avons trouvées n.os 93 et 94, offrent des moyens de soumettre au calcul les combinaisons ordinaires, et de parvenir ainsi facilement à plusieurs théorèmes généraux, dont nous ne donnerons que les suivans, qui sont déjà connus d'ailleurs et que nous ne mettons ici que par forme d'exemples de notre manière de procéder.

Puisque, $\mathfrak{D}a$, $\mathfrak{D}a'$, etc. $\mathfrak{D}a^{m-\text{I}}$ étant $= 1$, on a, n.° 93,

$$\mathfrak{D}^{m-1-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{II}}.a^{m-\text{I}}) = \mathfrak{D}^{m-1-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{II}}).a^{m-\text{I}} + \mathfrak{D}^{m-2-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{II}}),$$

$$\mathfrak{D}^{m-2-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{II}}) = \mathfrak{D}^{m-2-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{III}}).a^{m-\text{II}} + \mathfrak{D}^{m-3-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{III}}),$$

$$\mathfrak{D}^{m-3-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{III}}) = \mathfrak{D}^{m-3-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{IV}}).a^{m-\text{III}} + \mathfrak{D}^{m-4-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{IV}}),$$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au terme

$$\mathfrak{D}^{0}(aa'a''\ldots a^{\text{n}}) = aa'a''\ldots a^{\text{n}-\text{I}}.a^{\text{n}};$$

en substituant ces valeurs les unes dans les autres, on trouve

$$\mathfrak{D}^{m-1-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{I}}) =$$
$$\mathfrak{D}^{m-1-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{II}}).a^{m-\text{I}} + \mathfrak{D}^{m-2-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{III}}).a^{m-\text{II}} + \mathfrak{D}^{m-3-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{IV}}).a^{m-\text{III}}$$
$$+ \mathfrak{D}^{m-4-r}(aa'a''\ldots a^{m-\text{V}}).a^{m-\text{IV}} + \text{etc.} + aa'a''\ldots a^{\text{n}-\text{I}}.a^{\text{n}}.$$

Si l'on désigne généralement par $[m|a]^r$ la somme de tous les produits qu'on peut former avec m lettres différentes dont a est la première, en les prenant r à r; la formule précédente peut être traduite dans la suivante, (n.° 93)

$$[m|a]^{r+1} =$$
$$[m-1|a]^r.a^{m-\text{I}} + [m-2|a]^r.a^{m-\text{II}} + [m-3|a]^r.a^{m-\text{III}} + [m-4|a]^r.a^{m-\text{IV}} + \text{etc.}$$
$$+ [r|a]^r.a^{\text{n}};$$

ce qui donne cette règle. « Pour déduire de la somme des produits de m » quantités différentes prises r à r, la somme de ces mêmes quantités prises » $r+1$ à $r+1$; multipliez par la dernière $a^{m-\text{I}}$ tous les produits r à r où » $a^{m-\text{I}}$ n'entre pas, ensuite par $a^{m-\text{II}}$ tous les produits r à r où n'entre ni » $a^{m-\text{I}}$ ni $a^{m-\text{II}}$, ensuite par $a^{m-\text{III}}$ tous les produits qui ne contiennent ni » $a^{m-\text{I}}$ ni $a^{m-\text{II}}$ ni $a^{m-\text{III}}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que vous arriviez au » produit $aa'a''\ldots a^{\text{n}-\text{I}}$, que vous multiplierez par a^{n}. »

Au moyen de cette règle, en partant de la somme de m quantités,

$$a + a' + a'' + a''' + \text{etc.} + a^{m-\text{I}},$$

on formera successivement tous les produits de ces quantités prises deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

De cette règle on peut aussi conclure l'inverse. « Pour déduire des produits » de m quantités prises $r+1$ à $r+1$ tous les produits de ces mêmes quantités » prises r à r; divisez par la dernière $a^{m-\text{I}}$ tous les produits $r+1$ à $r+1$ où » $a^{m-\text{I}}$ entre; ensuite divisez par $a^{m-\text{II}}$ tous les produits $r+1$ à $r+1$ où » entre $a^{m-\text{II}}$ avec $a^{m-\text{I}}$; ensuite divisez par $a^{m-\text{III}}$ tous les produits $r+1$ à $r+1$ » où entre $a^{m-\text{III}}$, mais où entrent aussi toutes les lettres suivantes $a^{m-\text{II}}$, $a^{m-\text{I}}$, et

» ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez divisé par a^{m-n-1} le produit
» $a^{m-n-1}a^{m-n}\ldots\ldots a^{m-2}a^{m-1}$. »

125. Partageons le produit de m quantités $aa'a''\ldots a^{m-1}$ en ces deux facteurs $aa'a''\ldots a^{p-1}$, et $a^p a^{p+1}\ldots a^{m-1}$, p étant $< m$; et prenons la dérivée $\mathfrak{D}^{m-r}$ du produit par le théorème du n.° 78; nous aurons

$$\mathfrak{D}^{m-r}(aa'a''\ldots a^{m-1}) =$$

$$(aa'\ldots a^{p-1}).\mathfrak{D}^{m-r}(a^p a^{p+1}\ldots a^{m-1}) + \mathrm{D}(aa'\ldots a^{p-1}).\mathfrak{D}^{m-1-r}(a^p a^{p+1}\ldots a^{m-1})$$
$$+ \mathfrak{D}^2(aa'\ldots a^{p-1}).\mathfrak{D}^{m-2-r}(a^p a^{p+1}\ldots a^{m-1}) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-r}(aa'\ldots a^{p-1}).(a^p a^{p+1}\ldots a^{m-1}),$$

formule qui se traduit en celle-ci (n.° 93),

$$[m|a]^r =$$

$$[p|a]^p.[m-p|a^p]^{r-p} + [p|a]^{p-1}.[m-p|a^p]^{r-p+1} + [p|a]^{p-2}.[m-p|a^p]^{r-p+2} + \text{etc.}$$
$$+ [p|a]^{r-m+p+1}.[m-p|a^p]^{m-p-1} + [p|a]^{r-m+p}.[m-p|a^p]^{m-p}.$$

Cette formule a lieu si r est plus grand que p et en même temps plus grand que $m-p$; mais si l'on a au contraire $p > r$ et $m-p > r$, alors, puisque $[p|a]^0 = 1$ et $[m-p|a^p]^0 = 1$, et qu'il faut rejeter les expressions où l'indice seroit négatif, la formule précédente devient

$$[m|a]^r =$$

$$[p|a]^r.1 + [p|a]^{r-1}.[m-p|a^p]^1 + [p|a]^{r-2}.[m-p|a^p]^2 + [p|a]^{r-3}.[m-p|a^p]^3$$
$$+ \text{etc.} + [p|a]^1.[m-p|a^p]^{r-1} + 1.[m-p|a^p]^r,$$

comme il est aisé de le voir, en supposant par exemple dans la formule précédente $p = r + 2$.

Outre le théorème (*) que renferment les deux dernières formules, on peut tirer de ces principes différentes autres conséquences, en partageant, par exemple, $aa'a''\ldots a^{m-1}$ en trois ou quatre facteurs, etc.

(III.)

126. Donnons à présent une expression de terme général qui mérite d'être remarquée à cause de sa forme.

Si l'on a le produit

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) \times (a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})$$

(*) On peut aussi parvenir à ce théorème en considérant une équation du degré m, comme résultant du produit de deux équations, l'une du degré p, l'autre du degré $m-p$, et en comparant les termes.

à

à convertir en une série qui procède suivant les puissances de x, on aura (n.° 100) pour le coëfficient de x^n

$$A_n = \mathfrak{D}^n.(\varphi\alpha.a) = \qquad \ldots(1)$$
$$\varphi\alpha.\mathfrak{D}^n.a + \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a) + \mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a) + \mathfrak{D}^3\varphi\alpha.\mathfrak{D}^{n-3}.(\varsigma^3 a) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^n\varphi\alpha.\varsigma^n a;$$

actuellement, on peut transformer les quantités $\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a)$, $\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a)$, $\mathfrak{D}^{n-3}.(\varsigma^3 a)$, etc., de manière qu'elles soient toutes exprimées en α et a et que les dérivations indiquées par $\mathfrak{D}$ soient toutes du même ordre n.

A cet effet, supposons, dans la formule précédente, $\varphi\alpha$ successivement égale à α, α^2, α^3, α^4, etc., en observant que $\mathfrak{D}^2\alpha$, $\mathfrak{D}^3\alpha^2$, $\mathfrak{D}^4\alpha^3$, etc. $=0$, elle nous donnera

1.° $\mathfrak{D}^n.(\alpha a) = \alpha\mathfrak{D}^n.a + \mathrm{D}\alpha.\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a)$,

d'où il vient, à cause de $\mathrm{D}\alpha = 1$,

$\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a) = \mathfrak{D}^n.(\alpha a) - \alpha\mathfrak{D}^n.a.$

2.° La formule donne en second lieu

$\mathfrak{D}^n.(\alpha^2 a) = \alpha^2\mathfrak{D}^n.a + 2\alpha\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a) + 1.\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a)$;

mettant pour $\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a)$ sa valeur ci-dessus et transposant, on a

$\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a) = \mathfrak{D}^n.(\alpha^2 a) - 2\alpha\mathfrak{D}^n.(\alpha a) + \alpha^2\mathfrak{D}^n.a.$

3.° La formule donne, en faisant $\varphi\alpha = \alpha^3$,

$\mathfrak{D}^n.(\alpha^3 a) = \alpha^3\mathfrak{D}^n.a + 3\alpha^2\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a) + 3\alpha\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a) + 1\mathfrak{D}^{n-3}.(\varsigma^3 a)$,

d'où l'on tire, en mettant pour $\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a)$ et $\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a)$ leurs valeurs précédentes,

$\mathfrak{D}^{n-3}.(\varsigma^3 a) = \mathfrak{D}^n.(\alpha^3 a) - 3\alpha\mathfrak{D}^n.(\alpha^2 a) + 3\alpha^2\mathfrak{D}^n.(\alpha a) - \alpha^3\mathfrak{D}^n.a.$

4.° En continuant ainsi, on trouvera

$\mathfrak{D}^{n-4}.(\varsigma^4 a) = \mathfrak{D}^n.(\alpha^4 a) - 4\alpha\mathfrak{D}^n.(\alpha^3 a) + 6\alpha^2\mathfrak{D}^n.(\alpha^2 a) - 4\alpha^3\mathfrak{D}^n.(\alpha a) + \alpha^4\mathfrak{D}^n.a$,

et en général

$$\mathfrak{D}^{n-r}.(\varsigma^r a) = \mathfrak{D}^n.(\alpha^r a) - r\alpha\mathfrak{D}^n.(\alpha^{r-1} a) + \frac{r.r-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathfrak{D}^n.(\alpha^{r-2} a) - \frac{r.r-1.r-2}{1.\ 2.\ 3}\alpha^3\mathfrak{D}^n.(\alpha^{r-3} a) + \text{etc.} \pm \alpha^r\mathfrak{D}^n.a.$$

Si dans cette dernière formule on suppose $r = n$, elle donne

$$\varsigma^n a = \mathfrak{D}^n.(\alpha^n a) - n\alpha\mathfrak{D}^n.(\alpha^{n-1} a) + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathfrak{D}^n.(\alpha^{n-2} a) - \text{etc.} \pm \alpha^n\mathfrak{D}^n.a.$$

127. Si présentement on substitue ces valeurs de $\mathfrak{D}^{n-1}.(\varsigma a)$, $\mathfrak{D}^{n-2}.(\varsigma^2 a)$, etc. dans l'expression (1) ci-dessus, on aura l'expression suivante,

$$A_n = \mathrm{D}^n.(\varphi\alpha.a) =$$

$$\begin{aligned}
&\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^n.a \\
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha a) - \alpha\mathrm{D}^n.a\} \\
&+ \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha^2 a) - 2\alpha\mathrm{D}^n.(\alpha a) + \alpha^2\mathrm{D}^n.a\} \\
&+ \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha^3 a) - 3\alpha\mathrm{D}^n.(\alpha^2 a) + 3\alpha^2\mathrm{D}^n.(\alpha a) - \alpha^3\mathrm{D}^n.a\} \\
&+ \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha^4 a) - 4\alpha\mathrm{D}^n.(\alpha^3 a) + 6\alpha^2\mathrm{D}^n.(\alpha^2 a) - 4\alpha^3\mathrm{D}^n.(\alpha a) + \alpha^4\mathrm{D}^n.a\} \\
&+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathrm{D}^r\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha^r a) - r\alpha\mathrm{D}^n.(\alpha^{r-1}a) + \frac{r.r-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathrm{D}^2.(\alpha^{r-2}a) - \text{etc.} \pm \alpha_r\mathrm{D}^n.a\} \\
&+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathrm{D}^n\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.(\alpha^n a) - n\alpha\mathrm{D}^n.(\alpha^{n-1}a) + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathrm{D}^n.(\alpha^{n-2}a) - \text{etc.} \pm \alpha^n\mathrm{D}^n.a\};
\end{aligned}$$

où toutes les dérivations indiquées sont du même ordre n.

Si l'on avoit à développer

$$\varphi(\alpha + \text{ϐ}x + \gamma x^2 + \text{etc.}) \times \psi(a + bx + cx^2 + \text{etc.}),$$

il suffiroit de mettre ψa au lieu de a dans la formule précédente.

128. En faisant $a = 1$ et b, c, d, etc. $= 0$, la fonction à développer deviendroit

$$\varphi(\alpha + \text{ϐ}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

ce qui est le cas traité dans l'article I.er. Faisant donc $a = 1$ dans l'expression précédente n.° 127, on trouve pour le coëfficient de x^n,

$$A_n = \mathrm{D}^n.\varphi\alpha =$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\varphi\alpha.\,\mathrm{D}^n.\alpha \\
&+ \mathrm{D}^2\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.\alpha^2 - 2\alpha\mathrm{D}^n.\alpha\} \\
&+ \mathrm{D}^3\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.\alpha^3 - 3\alpha\mathrm{D}^n.\alpha^2 + 3\alpha^2\mathrm{D}^n.\alpha\} \\
&+ \mathrm{D}^4\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.\alpha^4 - 4\alpha\mathrm{D}^n.\alpha^3 + 6\alpha^2\mathrm{D}^n.\alpha^2 - 4\alpha^3\mathrm{D}^n.\alpha\} \\
&+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \mathrm{D}^n\varphi\alpha.\{\mathrm{D}^n.\alpha^n - n\alpha\mathrm{D}^n.\alpha^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathrm{D}^n.\alpha^{n-2} - \text{etc.} \pm n\alpha^{n-1}\mathrm{D}^n.\alpha\};
\end{aligned}$$

où l'on a généralement pour la quantité polynomiale $\mathrm{D}^{n-r}.\text{ϐ}^r$ l'expression

$$\mathrm{D}^n.\alpha^r - r\alpha\mathrm{D}^n.\alpha^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.\ 2}\alpha^2\mathrm{D}^n.\alpha^{r-2} - \frac{r.r-1.r-2}{1.\ 2.\ 3}\alpha^3\mathrm{D}^n.\alpha^{r-3} + \text{etc.} \pm r\alpha^{r-1}\mathrm{D}^n.\alpha.$$

En joignant à la formule que nous venons de trouver celle du n.° 20, et en formant celle qui est indiquée à la fin du n.° 77, on aura trois formules différentes pour développer $\mathrm{D}^n.\varphi\alpha$ par dérivation.

ARTICLE TROISIÈME.

Développemens des fonctions d'un ou de plusieurs polynomes ordonnés par rapport aux puissances et aux produits de deux ou de plusieurs lettres différentes, en séries ordonnées de la même manière.

129. Nous nommerons, pour abréger, polynomes *doubles*, ceux qui sont ordonnés suivant les puissances et les produits de deux lettres x et y, tels que

$$\begin{array}{llllll} a + bx & + cx^3 & + dx^3 & + \text{etc.} \\ + b'y & + c'xy & + d'x^2y & + \text{etc.} \\ & + c''y^2 & + d''xy^2 & + \text{etc.} \\ & & d'''y^3 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.}; \end{array}$$

nous nommerons polynomes *triples* ceux qui sont ordonnés par rapport aux puissances et aux produits de trois lettres x, y, z. Nous appellerons aussi séries *doubles*, *triples*, les séries qui résultent du développement des fonctions de polynomes doubles, triples, et en général toutes les séries qui sont ordonnées suivant les puissances et les produits de deux ou de trois lettres différentes.

§. I.er

Des fonctions d'un seul polynome double ou triple.

130. Comme nous avons à faire varier les quantités de deux manières, par rapport aux x, et par rapport aux y, nous emploîrons le signe D sans accent pour marquer les dérivations qui se rapportent aux x, et le signe D', avec l'accent, pour marquer celles qui se rapportent aux y. Dans les dérivations indiquées par D, lorsqu'il faut changer une lettre dans la suivante, on lui laissera l'accent ou le nombre d'accens qu'elle avoit; ainsi on changera b en c, b' en c'; c'' en d'', etc. Dans les dérivations indiquées par D', au contraire, lorsqu'il faut changer une lettre dans la suivante, il faut aussi augmenter de l'unité le nombre de ses accens; ainsi a se changera en b', b' en c'', c'' en d''', etc.

*

Lorsque deux signes $\mathrm{D}\,\mathrm{D}'$ se suivent, le dernier à gauche affecte toujours tout ce qui vient après lui : ainsi, dans $\underset{c}{\mathrm{D}}^m.\underset{c}{\mathrm{D}}'^n.\varphi a$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^m$ affecte toute la quantité $\underset{c}{\mathrm{D}}'^n.\varphi a$. On voit par là que $\mathrm{D}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.a = \mathrm{D}.\mathrm{D}'.b' = \mathrm{D}.c'' = d''$, et qu'en général le coëfficient de $x^m y^n$ dans le polynome sera désigné par $\underset{c}{\mathrm{D}}^m.\underset{c}{\mathrm{D}}'^n.a$. Donc

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{D}.a = b, & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.a = c, & \underset{c}{\mathrm{D}}^3.a = d, & \underset{c}{\mathrm{D}}^4.a = e, \text{ etc.} \\
\mathrm{D}'.a = b', & \mathrm{D}.\mathrm{D}'.a = c', & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\mathrm{D}'.a = d', & \underset{c}{\mathrm{D}}^3.\mathrm{D}'.a = e', \text{ etc.} \\
 & \underset{c}{\mathrm{D}}'^2.a = c'', & \mathrm{D}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.a = d'', & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.a = e'', \text{ etc.} \\
 & & \underset{c}{\mathrm{D}}'^3.a = d''', & \mathrm{D}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^3.a = e''', \text{ etc.} \\
 & & & \underset{c}{\mathrm{D}}'^4.a = e^{IV}, \text{ etc.}
\end{array}$$

Mais, si on regarde b et b' comme les premiers termes des polynomes doubles suivans

$$\begin{array}{llllll}
b + cx + dx^2 & + ex^3 & + \text{ etc.} & b' + c'x + d'x^2 & + e'x^3 & + \text{ etc.} \\
+ c'y + d'xy & + e'x^2y & + \text{ etc.} & + c''y + d''xy & + e''x^2y & + \text{ etc.} \\
d''y^2 & + e''xy^2 & + \text{ etc.} & + d'''y^2 & + e'''xy^2 & + \text{ etc.} \\
 & + e'''y^3 & + \text{ etc.} & & + e^{IV}y^3 & + \text{ etc.} \\
 & & + \text{ etc.}, & & & + \text{ etc.};
\end{array}$$

on aura

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{D}.b = c, & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.b = d, & \underset{c}{\mathrm{D}}^3.b = e, \text{ etc.} & \mathrm{D}.b' = c', & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.b' = d', & \underset{c}{\mathrm{D}}^3.b' = e', \text{ etc.} \\
\mathrm{D}'.b = c', & \mathrm{D}.\mathrm{D}'.b = d', & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\mathrm{D}'.b = e', & \mathrm{D}'.b' = c'', & \mathrm{D}.\mathrm{D}'.b' = d'', & \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\mathrm{D}'.b' = e'', \\
 & \underset{c}{\mathrm{D}}'^2.b = d'', & \mathrm{D}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.b = e'', & & \underset{c}{\mathrm{D}}'^2.b' = d''', & \mathrm{D}.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.b' = e''', \\
 & & \underset{c}{\mathrm{D}}'^3.b = e''', & & & \underset{c}{\mathrm{D}}'^3.b' = e^{IV}.
\end{array}$$

Nous faisons cette observation principalement pour que, quand les D et D' affectent des lettres simples, on ne soit pas embarrassé par les coëfficiens numériques indiqués par les c qui se mettent au-dessous des caractéristiques D et D'.

Quand il faut désigner d'une manière générale les coëfficiens des produits des puissances de x et de y, nous employons des lettres ou des nombres inférieurs : ainsi, pour désigner le coëfficient de $x^m y^n$ dans le polynome du numéro précédent, nous écrivons $a_{m,n}$; l'indice inférieur m,n indique la $(m+n)^{\text{ième}}$ lettre après a dans l'ordre alphabétique, et comme l'indice n est précédé de la virgule, il marque que cette lettre est en outre affectée de n accens. De cette manière, $\underset{c}{\mathrm{D}}^3.\underset{c}{\mathrm{D}}'^2.a = a_{3,2} = f''$; $\underset{c}{\mathrm{D}}^2.\underset{c}{\mathrm{D}}'^3.a = a_{2,3} = f'''$;

$\underset{c}{\mathrm{D}}^4.\underset{c}{\mathrm{D}}'^3.b$

$\text{D}^4.\text{D}'^3.b = b_{4,3} = i'''$; $A_{m,n} = \text{D}^m.\text{D}'^n.A$, etc. Nous employons les accens pour nous conformer à l'usage reçu.

PROBLÈME.

131. Développer une fonction quelconque de polynome double,

$$\varphi\left\{\begin{array}{r} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} \\ + b'y + c'xy + d'x^2y + e'x^3y + \text{etc.} \\ + c''y^2 + d''xy^2 + e''x^2y^2 + \text{etc.} \\ + d'''y^3 + e'''xy^3 + \text{etc.} \\ + e^{IV}y^4 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}, \quad \ldots(1)$$

en une série de la forme

$$\begin{array}{r} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + D'x^2y + E'x^3y + \text{etc.} \\ + C''y^2 + D''xy^2 + E''x^2y^2 + \text{etc.} \\ + D'''y^3 + E'''xy^3 + \text{etc.} \\ E^{IV}y^4 + \text{etc.} \\ + \text{etc.}, \end{array} \quad \ldots(2)$$

et calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

La solution de ce problème fait l'objet principal de ce paragraphe; nous allons y procéder par degrés, et recueillir les théorêmes qui s'offriront sur notre route.

(I.)

132. Cherchons d'abord à exprimer en signes de dérivation les coëfficiens de la série (2), sans les développer.

Supposons qu'on ait simplement la fonction

$$\varphi(a + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + \text{etc.})\,; \quad \ldots\ldots(3)$$

elle donnera, par l'article premier et le n.° 130, pour la série résultante de son développement,

$$\varphi a + \text{D}'.\varphi a.y + \text{D}'^2.\varphi a.y^2 + \text{D}'^3.\varphi a.y^3 + \text{etc.} \quad \ldots(4)$$

Actuellement, si l'on change a en $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$, b' en $b' + c'x + d'x^2 + \text{etc.}$, c'' en $c'' + d''x + \text{etc.}$, d''' en $d''' + e'''x + \text{etc.}$, etc.;

la fonction (3) devient la fonction proposée (1), et φa, $\text{D}'.\varphi a$, $\mathfrak{D}'^2.\varphi a$, etc. dans la série (4) se changent, savoir,

φa en $\varphi a + \text{D}.\varphi a.x + \mathfrak{D}^2.\varphi a.x^2 + \mathfrak{D}^3.\varphi a.x^3 + \text{etc.}$,

$\text{D}'.\varphi a$ en $\text{D}'.\varphi a + \text{D}.\text{D}'.\varphi a.x + \mathfrak{D}^2.\text{D}'.\varphi a.x^2 + \mathfrak{D}^3.\text{D}'.\varphi a.x^3 + \text{etc.}$,

$\mathfrak{D}'^2.\varphi a$ en $\mathfrak{D}'^2.\varphi a + \text{D}.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.x + \mathfrak{D}^2.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.x^2 + \mathfrak{D}^3.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.x^3 + \text{etc.}$,

etc.; les D sans accent s'étendant à tout ce qui suit jusqu'au point après la lettre a.

Mettant ces expressions dans la série (4), la fonction proposée (1) devient, en ordonnant suivant les puissances et les produits de x et de y,

$$\begin{array}{llllll}
\varphi a + \text{D}.\varphi a.x & + \mathfrak{D}^2.\varphi a.x^2 & + \mathfrak{D}^3.\varphi a.x^3 & + \mathfrak{D}^4.\varphi a.x^4 & + \text{etc.} & \\
\quad + \text{D}'.\varphi a.y & + \text{D}.\text{D}'.\varphi a.xy & + \mathfrak{D}^2.\text{D}'.\varphi a.x^2y & + \mathfrak{D}^3.\text{D}'.\varphi a.x^3y & + \text{etc.} & \\
 & + \mathfrak{D}'^2.\varphi a.y^2 & + \text{D}.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.xy^2 & + \mathfrak{D}^2.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.x^2y^2 & + \text{etc.} & \\
 & & + \mathfrak{D}'^3.\varphi a.y^3 & + \text{D}.\mathfrak{D}'^3.\varphi a.xy^3 & + \text{etc.} & \ldots(5) \\
 & & & + \mathfrak{D}'^4.\varphi a.y^4 & + \text{etc.} & \\
 & & & & + \text{etc.} &
\end{array}$$

d'où l'on conclud que le coëfficient du terme quelconque affecté de $x^m y^n$ dans la série (2) sera exprimé par $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a = \dfrac{\text{D}^m.\text{D}'^n.\varphi a}{1.2..m \times 1.2...n}$.

133. On pourroit aussi supposer d'abord que la fonction proposée soit simplement

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}),$$

et, en changeant ensuite a en $a + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + \text{etc.}$, b en $b + c'y + d''y^2 + \text{etc.}$, c en $c + d'y + e''y^2 + \text{etc.}$, d en $d + e'y + \text{etc.}$, etc., en raisonnant et procédant d'une manière semblable à ce que nous venons de faire, il est visible qu'on trouveroit, pour la série résultante de la fonction proposée (1),

$$\begin{array}{llllll}
\varphi a + \text{D}.\varphi a.x & + \mathfrak{D}^2.\varphi a.x^2 & + \mathfrak{D}^3.\varphi a.x^3 & + \text{D}^4.\varphi a.x^4 & + \text{etc.} & \\
\quad + \text{D}'.\varphi a.y & + \text{D}'.\text{D}.\varphi a.xy & + \text{D}'.\mathfrak{D}^2.\varphi a.x^2y & + \text{D}'.\mathfrak{D}^3.\varphi a.x^3y & + \text{etc.} & \\
 & + \mathfrak{D}'^2.\varphi a.y^2 & + \mathfrak{D}'^2.\text{D}.\varphi a.xy^2 & + \mathfrak{D}'^2.\mathfrak{D}^2.\varphi a.x^2y^2 & + \text{etc.} & \\
 & & + \mathfrak{D}'^3.\varphi a.y^3 & + \mathfrak{D}'^3.\text{D}.\varphi a.xy^3 & + \text{etc.} & \ldots(6) \\
 & & & + \mathfrak{D}'^4.\varphi a.y^4 & + \text{etc.} & \\
 & & & & + \text{etc.,} &
\end{array}$$

et en général le coëfficient de $x^m y^n$ seroit $\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}^m.\varphi a$.

Puisque les deux séries (5) et (6) doivent être égales entre elles pour toutes les valeurs possibles de x et de y, il s'ensuit que les coëfficiens des mêmes puissances et produits de x et y doivent séparément être égaux entre eux dans les deux séries, et qu'ainsi on a généralement $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a = \mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}^m.\varphi a$; d'où l'on conclud qu'on aura toujours le même résultat final, quel que soit l'ordre dans lequel on fasse sur φa les dérivations indiquées par D et par D'.

134. Actuellement, pour développer les coëfficiens de la série (5), on pourroit effectuer les dérivations indiquées par D' et D au moyen de la méthode non simplifiée du §. Ier de l'article premier, et en suivant l'esprit des règles ordinaires du calcul différentiel; on trouveroit ainsi

$$\mathrm{D}.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.a,$$

$$\mathrm{D}'.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}'.a,$$

$$\mathfrak{D}^2.\varphi a = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.(\mathrm{D}.a)^2,$$

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\varphi a = \mathrm{D}.(\mathrm{D}'.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a + \mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.a.\mathrm{D}'.a,$$

$$\mathfrak{D}'^2.\varphi a = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}'.(\mathrm{D}'.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.(\mathrm{D}'.a)^2,$$

$$\mathfrak{D}^3.\varphi a = \tfrac{1}{3}\mathrm{D}.(\mathfrak{D}^2.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^3.a + \mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{3}\mathrm{D}.a.\mathfrak{D}^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.\tfrac{2}{3}\mathrm{D}.a.\mathrm{D}^2.a$$
$$+ \mathfrak{D}^3\varphi a.(\mathrm{D}.a)^3, \text{ et en réduisant,}$$
$$= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^3.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.2\mathrm{D}.a.\mathfrak{D}^2.a + \mathfrak{D}^3\varphi a.(\mathrm{D}.a)^3,$$

$$\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.\varphi a = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a$$
$$+ \mathrm{D}^2\varphi a.(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.a.\mathrm{D}\,\mathrm{D}'.a + \mathfrak{D}^2.a.\mathrm{D}'.a) + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^3\varphi a.(\mathrm{D}.a)^2\mathrm{D}'.a, \text{ et en réduisant,}$$
$$= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2\mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a + 2\mathfrak{D}^2.a.\mathrm{D}'.a) + \mathfrak{D}^3\varphi a.3(\mathrm{D}.a)^2\mathrm{D}'.a,$$

$$\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.\varphi a = \mathrm{D}.(\mathfrak{D}'^2.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.a + \mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.a.\mathfrak{D}'^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.2\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a$$
$$+ 3\mathfrak{D}^3\varphi a.\mathrm{D}.a.(\mathrm{D}'.a)^2, \text{ et en réduisant,}$$
$$= \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2\mathrm{D}.a.\mathfrak{D}'^2.a + 2\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a) + \mathfrak{D}^3\varphi a.3\mathrm{D}.a.(\mathrm{D}'.a)^2$$

$$\mathfrak{D}'^3.\varphi a = \tfrac{1}{3}\mathrm{D}'.(\mathfrak{D}'^2.\varphi a) = \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^3a + \mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{3}\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}'^2.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.\tfrac{2}{3}\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}'^2.a$$
$$+ \mathfrak{D}^3\varphi a.(\mathrm{D}'.a)^3, \text{ et en réduisant,}$$
$$= \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^3.a + \mathfrak{D}^2\varphi a.2\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}'^2.a + \mathfrak{D}^3\varphi a.(\mathrm{D}'.a)^2,$$

et ainsi de suite. Si l'on mettoit à la place des a affectés de signes de dérivation les lettres respectives qu'ils désignent (n.° 130), on auroit les premiers termes de la série tout développés. Voyez plus bas, n.° 157.

Mais cette manière de faire les développemens des coëfficiens de la série a l'inconvénient d'exiger des réductions, parce qu'elle fait trouver plusieurs fois des termes composés des mêmes lettres; elle ne donneroit d'ailleurs

que par un calcul fort long le développement d'un coëfficient quelconque indépendamment des précédens : aussi l'abandonnerons-nous. Nous allons donner deux méthodes qui feront trouver sur-le-champ, et tout réduits, les développemens des coëfficiens de la série, soit en déduisant chaque coëfficient du précédent, soit en le calculant isolément.

(II.)

Première solution du problème précédent.

135. Pour parvenir à trouver sur-le-champ le développement réduit du coëfficient d'un terme quelconque de la série indépendamment des autres, ainsi que pour déduire ces coëfficiens les uns des autres d'une manière simple; donnons un premier développement en b et b' à l'expression générale $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a$, afin de séparer par là les quantités polynomiales de celles qui demeurent affectées du signe de fonction φ.

A cet effet, je commence par développer $\mathfrak{D}'^n.\varphi a$ par le théorème du n.° 20, en faisant attention que $\mathrm{D}'.a = b'$, et j'ai

$$\mathfrak{D}'^n.\varphi a = \qquad \ldots\ldots(7)$$
$$\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-1}.b' + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2 + \mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-3}.b'^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathfrak{D}'.b'^{n-1} + \mathfrak{D}^n\varphi a.b'^n.$$

Maintenant, pour avoir $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a$, je prends la dérivée $\mathfrak{D}^m$ de chaque terme de la formule précédente, ce qui donne

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a = \qquad \ldots\ldots(8)$$
$$\mathfrak{D}^m.(\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-1}.b') + \mathfrak{D}^m.(\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2) + \mathfrak{D}^m.(\mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-3}.b'^3) + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{D}^m.(\mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.\mathfrak{D}'^2.b'^{n-2}) + \mathfrak{D}^m.(\mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathrm{D}'.b'^{n-1}) + \mathfrak{D}^m.(\mathfrak{D}^n\varphi a.b'^n);$$

dans cette formule $\mathfrak{D}^m$ affecte toutes les quantités, a aussi bien que b', et a aura b pour dérivée relative aux D sans accent.

On développera en b chaque terme de la formule précédente, au moyen du théorème qu'offre la formule générale du n.° 100, et l'on aura

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a = \qquad \ldots\ldots(9)$$
$$\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.b' + \mathrm{D}\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-1}.b') + \mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-1}.b') + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{D}^m\mathrm{D}\varphi a.b^m\mathfrak{D}'^{n-1}.b'$$
$$+ \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2 + \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2) + \mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2) + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^2\varphi a.b^m\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2$$
$$+ \mathfrak{D}^3\varphi a.$$

$$+ \underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3 + D\underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^{m-1}.(b\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3) + \underset{.}{D}^2\underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^{m-2}.(b^2\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3) + \text{etc.} + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^3\varphi a.b^m\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2} + \text{etc.} + \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}.\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.D.(b^{m-1}\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.b^m\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}$$

$$+ \underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.\underset{.}{D}^m.D'.b'^{n-1} + \text{etc.} + \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}D'.b'^{n-1}) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.D.(b^{m-1}D'.b'^{n-1}) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.b^mD'.b'^{n-1}$$

$$+ \underset{.}{D}^n\varphi a.\underset{.}{D}^m.b'^n + \text{etc.} + \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^n\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}b'^n) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^n\varphi a.D.(b^{m-1}b'^n) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^n\varphi a.b^mb'^n.$$

On ordonnera cette formule par rapport aux indices des D sans point qui affectent φa; en mettant ensemble tous les termes où les indices de ces D font la même somme, et l'on aura la proposition suivante.

Théorème.

136. Le coëfficient du terme quelconque affecté de $x^m y^n$ dans le développement d'une fonction quelconque de polynome double peut s'exprimer par la formule suivante,

$$\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^n.\varphi a = \qquad \ldots\ldots (10)$$

$$D\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-1}.b'$$

$$+ \underset{.}{D}^2\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-2}.b'^2 + DD\varphi a.\underset{.}{D}^{m-1}.(b\underset{.}{D}'^{n-1}.b')$$

$$+ \underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3 + D\underset{.}{D}^2\varphi a.\underset{.}{D}^{m-1}.(b\underset{.}{D}'^{n-2}.b'^2) + \underset{.}{D}^2D\varphi a.\underset{.}{D}^{m-2}.(b^2\underset{.}{D}'^{n-1}.b')$$

$$+ \underset{.}{D}^4\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-4}.b'^4 + D\underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^{m-1}.(b\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3) + \underset{.}{D}^2\underset{.}{D}^2\varphi a.\underset{.}{D}^{m-2}.(b^2\underset{.}{D}'^{n-2}.b'^2) + \underset{.}{D}^3D\varphi a.\underset{.}{D}^{m-3}.(b^3\underset{.}{D}'^{n-1}.b')$$

$$+ \underset{.}{D}^5\varphi a.\underset{.}{D}^m.\underset{.}{D}'^{n-5}.b'^5 + D\underset{.}{D}^4\varphi a.\underset{.}{D}^{m-1}.(b\underset{.}{D}'^{n-4}.b'^4) + \underset{.}{D}^2\underset{.}{D}^3\varphi a.\underset{.}{D}^{m-2}.(b^2\underset{.}{D}'^{n-3}.b'^3) + \underset{.}{D}^3\underset{.}{D}^2\varphi a.\underset{.}{D}^{m-3}.(b^3\underset{.}{D}'^{n-2}.b'^2) + \underset{.}{D}^4D\varphi a.\underset{.}{D}^{m-4}.(b^4\underset{.}{D}'^{n-1}.b')$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots + \text{etc.}$$

$$+ \underset{.}{D}^{m-4}\underset{.}{D}^n\varphi a.\underset{.}{D}^4.(b^{m-4}b'^n) + \underset{.}{D}^{m-3}\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.\underset{.}{D}^3.(b^{m-3}D'.b'^{n-1}) + \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}.\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^{n-3}\varphi a.D.(b^{m-1}\underset{.}{D}'^3.b'^{n-3}) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-4}\varphi a.b^m\underset{.}{D}'^4.b'^{n-4}$$

$$+ \underset{.}{D}^{m-3}\underset{.}{D}^n\varphi a.\underset{.}{D}^3.(b^{m-3}b'^n) + \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}D'.b'^{n-1}) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.D.(b^{m-1}\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-3}\varphi a.b^m\underset{.}{D}'^3.b'^{n-3}$$

$$+ \underset{.}{D}^{m-2}\underset{.}{D}^n\varphi a.\underset{.}{D}^2.(b^{m-2}b'^n) + \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.D.(b^{m-1}D'.b'^{n-1}) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-2}\varphi a.b^m\underset{.}{D}'^2.b'^{n-2}$$

$$+ \underset{.}{D}^{m-1}\underset{.}{D}^n\varphi a.D.(b^{m-1}b'^n) + \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^{n-1}\varphi a.b^mD'.b'^{n-1}$$

$$+ \underset{.}{D}^m\underset{.}{D}^n\varphi a.b^mb'^n$$

COROLLAIRE.

137. Puisqu'on a généralement

$$\mathfrak{D}^s\mathfrak{D}^r\varphi a = \frac{\mathrm{D}^{r+s}\varphi a}{1.2\ldots r\times 1.2\ldots s}, \qquad \text{et } \mathfrak{D}^{r+s}\varphi a = \frac{\mathrm{D}^{r+s}\varphi a}{1.2.3\ldots(r+s)},$$

on en conclud

$$\mathfrak{D}^s\mathfrak{D}^r\varphi a = \frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(r+1)}{1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ s}\mathfrak{D}^{r+s}\varphi a = \frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(s+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ r}\mathfrak{D}^{r+s}\varphi a;$$

et comme il est indifférent quel facteur du produit on multiplie par le coëfficient numérique $\frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(s+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ r}$, qu'on peut même, sans rien changer au résultat, mettre ce coëfficient sous le signe D, à cause qu'il demeure constant dans les dérivations; il est clair qu'on a

$$\mathfrak{D}^s\mathfrak{D}^r\varphi a.\,\mathfrak{D}^{m-s}.(b^s\mathfrak{D}'^{n-r}.b'^r) = \mathfrak{D}^{r+s}\varphi a.\,\frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(s+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ r}\mathfrak{D}^{m-s}.(b^s\mathfrak{D}'^{n-r}.b'^r),$$

ou bien encore .... $= \mathfrak{D}^{r+s}\varphi a.\,\mathfrak{D}^{m-s}.\left\{\frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(s+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ r}b^s\mathfrak{D}'^{n-r}.b'^r\right\}.$

On remarquera que $\frac{(r+s)(r+s-1)\ldots(s+1)}{1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ r}$ est aussi le coëfficient qui affecte $b^s b'^r$ dans le développement de la puissance du binome $(b+b')^{r+s}$, et qu'ainsi on peut toujours former ces coëfficiens numériques d'après les exposans de b et de b', ou, ce qui revient au même, d'après les dimensions des lettres sans accent et celles des lettres accentuées.

Ainsi on peut donner à la formule du n.° précédent la forme qui suit

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a. = \qquad\qquad \ldots.(11)$$

$$\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.b' + \mathfrak{D}^2\varphi a.\left|\begin{array}{l}\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2\\ +2\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-1}.b')\end{array}\right. + \mathfrak{D}^3\varphi a.\left|\begin{array}{l}\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.b'^3\\ +3\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2)\\ +3\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-1}.b')\end{array}\right.$$

$$+\mathfrak{D}^4\varphi a.\left|\begin{array}{l}\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-4}.b'^4\\ +4\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathrm{D}'^{n-3}.b'^3)\\ +6\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2)\\ +4\mathfrak{D}^{m-3}.(b^3\mathfrak{D}'^{n-1}.b')\end{array}\right. + \text{etc.}\ldots + \mathfrak{D}^{m+n-2}\varphi a.\left|\begin{array}{l}\frac{(m+n-2)\ldots(m-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.n}\mathfrak{D}^2.(b^{m-2}b'^n)\\ +\frac{(m+n-2)\ldots m}{1.\ 2.\ 3\ldots(n-1)}\mathrm{D}.(b^{m-1}\mathfrak{D}'.b'^{n-1})\\ +\frac{(m+n-2)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(n-2)}b^m\mathfrak{D}'^2.b'^{n-2}\end{array}\right.$$

$$+\mathfrak{D}^{m+n-1}\varphi a. \left| \begin{array}{l} \frac{(m+n-1)\ldots.m}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ n}\mathrm{D}.(b^{m-1}b'^{n}) \\ +\frac{(m+n-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots.(n-1)}b^{m}\mathrm{D}'.b'^{n-1} \end{array} \right. +\mathfrak{D}^{m+n}\varphi a.\frac{(m+n)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots.n}b^{m}b'^{n};$$

mais la formule (10) du n.° 136 donne des expressions réduites plus simples.

138. Avant de chercher la règle pour développer les quantités polynomiales, cherchons la loi de formation de la formule (10).

Si l'on examine comment les termes des séries (9) sont ordonnés dans la formule (10), on en voit résulter la loi de formation suivante.

Pour déduire d'une colonne verticale quelconque de la formule (10) la colonne suivante, on fait varier a de b', dans tous les termes de la colonne donnée, et de plus a de b dans le dernier de ces termes seulement; et l'on prend chaque fois la dérivée divisée suivante. En faisant varier a de b', les exposans de b' augmentent de l'unité, les indices de D' diminuent de l'unité, et les b' se mettent sous les signes D et D'. En faisant varier a de b, l'exposant de b augmente de l'unité, l'indice de D diminue de l'unité, les b ne se mettent que sous le signe D. On rejette les termes où les indices de D' ou de D deviendroient négatifs. L'exposant de b ne peut pas devenir plus grand que m, ni celui de b' plus grand que n.

Les indices des D sans point, qui affectent φa, sont toujours les mêmes que les exposans de b et de b' dans le terme.

On peut ainsi former sur-le-champ le coëfficient d'un terme quelconque de la série, exprimé en b et b', en commençant par le terme $\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-1}.b'$. Si l'on demandoit, par exemple, le coëfficient de x^4y^3; le premier terme seroit $\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{4}.\mathfrak{D}'^{2}.b'$, et l'on trouveroit, en observant la loi de formation que nous venons d'exposer, l'expression suivante.

$$\mathfrak{D}^{4}.\mathfrak{D}'^{3}.\varphi a =$$

$$\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{4}.\mathfrak{D}'^{2}.b' \quad +\mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{4}.\mathrm{D}'.b'^{2} \quad +\mathfrak{D}^{3}\varphi a.\mathfrak{D}^{4}.b'^{3} \quad +\mathrm{D}\mathfrak{D}^{3}\varphi a.\mathfrak{D}^{3}.(bb'^{3})$$
$$+\mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{3}.(b\mathfrak{D}'^{2}.b') +\mathrm{D}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{3}.(b\mathrm{D}'.b'^{2}) +\mathfrak{D}^{2}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{2}.(b^{2}.\mathrm{D}'.b'^{2})$$
$$+\mathfrak{D}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{2}.(b^{2}\mathfrak{D}'^{2}.b') \quad +\mathfrak{D}^{3}\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{3}\mathfrak{D}'^{2}.b')$$
$$+\mathfrak{D}^{2}\mathfrak{D}^{3}\varphi a.\mathfrak{D}^{2}.(b^{2}b'^{3}) \quad +\mathfrak{D}^{3}\mathfrak{D}^{3}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{3}b'^{3}) \quad +\mathfrak{D}^{4}\mathfrak{D}^{3}\varphi a.b^{4}b'^{3}.$$
$$+\mathfrak{D}^{3}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{3}\mathrm{D}'.b'^{2}) \quad +\mathfrak{D}^{4}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.b^{4}\mathfrak{D}'.b'^{2}$$
$$+\mathfrak{D}^{4}\mathrm{D}\varphi a.b^{4}\mathfrak{D}'^{2}.b'$$

139. Si l'on veut avoir la loi de formation en commençant par le terme $\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^m \underset{\cdot}{\mathrm{D}}'^n \varphi a . b^m b'^n$, pour en déduire successivement et en rétrogradant toutes les colonnes précédentes; il suffit de faire précisément l'inverse du procédé que nous venons de suivre; c'est-à-dire, qu'une colonne quelconque étant donnée, on fera varier a de b dans chaque terme de cette colonne, puis encore a de b' dans le dernier terme seulement, et l'on prendra chaque fois la dérivée divisée inverse. En faisant ainsi varier a de b, les exposans de b diminuent, les indices de D augmentent de l'unité, et le signe D affecte b, D' et b'; et en faisant varier a de b', l'exposant de b' diminue, l'indice de D' augmente de l'unité, et le signe D' n'affecte que les b'. On rejette les termes où l'exposant de b ou de b' deviendroit négatif : ceux où b' précédé du signe D' auroit zéro pour exposant, disparoissent d'eux-mêmes, parce que $\underset{\cdot}{\mathrm{D}}'^r . b'^0 = \underset{\cdot}{\mathrm{D}}'^r . 1 = 0$.

Les indices des D sans point qui affectent φa et les diviseurs numériques indiqués par le c au-dessous de ces D, se règlent toujours sur les puissances des b et b' qui suivent dans le terme.

On peut de cette manière former le développement précédent de $\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^4 . \underset{\cdot}{\mathrm{D}}'^3 . \varphi a$, en commençant par le terme $\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^4 \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^3 \varphi a . b^4 b'^3$ et rétrogradant.

Dans les formules (10) et (11) b et b' sont des premiers termes de polynomes.

140. Si l'on veut calculer à présent le développement réduit d'un coëfficient quelconque de la série indépendamment des autres, les règles pour exécuter ce calcul découlent naturellement des lois que nous venons de trouver.

En effet, la loi du n.° 138, combinée avec la règle du n.° 47, donne la première de ces règles, et la loi du n.° 139, combinée avec la règle du n.° 43, en donne la seconde. Nous nous bornerons à énoncer cette dernière, qui est la plus facile à pratiquer et qui suffit dans tous les cas.

Mais auparavant il est bon d'avertir, pour éviter toute équivoque à l'avenir, que nous appellerons *terme de coëfficient* ce que nous venons de nommer colonne verticale de la formule (10), c'est-à-dire, l'assemblage des quantités dans lesquelles les indices des D sans point qui affectent φa forment la même somme; et *parties de terme*, les quantités appartenantes au même terme où les puissances de b et b', ou bien les dimensions des produits des lettres qui proviennent de ces puissances, sont différentes. Ainsi l'expression $\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^3 \varphi a . \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^4 . b'^3 + \mathrm{D} \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2 \varphi a . \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^3 . (b \mathrm{D}' . b'^2) + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2 \mathrm{D} \varphi a . \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2 . (b^2 \underset{\cdot}{\mathrm{D}}'^2 . b')$ est un terme de coëfficient, et chacun des trois termes de cette expression est une partie de terme.

141.

141. Observons encore à l'égard des quantités polynomiales, que quand on en prend les développemens réduits, chaque puissance de b, n.° 136, donne des produits des lettres b, c, d, etc. sans accent, d'un même nombre de dimensions, égal à l'exposant de b, et que chaque puissance de b' donne des produits de lettres accentuées et même différemment accentuées, tous d'un même nombre de dimensions, égal à l'exposant de b'. De plus, puisque les D sans accent affectent toutes les quantités polynomiales tant accentuées que non accentuées, il est aisé de voir que, quand on fait une dérivation D sur ces quantités, il faut regarder comme dépendantes les unes des autres les lettres qui portent le même nombre d'accens, ou celles qui n'en portent point, et comme indépendantes les unes des autres les lettres différemment accentuées; et que quand on fait une dérivation D', il faut regarder comme dépendantes les unes des autres les lettres accentuées, même celles qui portent un nombre différent d'accens.

Après cela, voici la règle pour trouver sur-le-champ le développement réduit de $D^m . D'^n . \phi a$, en commençant par le terme $D^m D'^n \phi a . b^m b'^n$, c'est-à-dire pour calculer le coëfficient d'un terme quelconque de la série indépendamment des autres.

RÈGLE.

142. *Un terme quelconque développé et réduit du coëfficient* $D^m . D'^n . \phi a$ *de* $x^m y^n$ *étant donné, pour en déduire le terme suivant, en remontant dans la formule du n.° 136;*

1.° *Diminuez de l'unité les puissances de* b, *en rejetant les produits qui ne contiennent pas* b, *et faisant sur les coëfficiens numériques les changemens qu'entraîne cette diminution des exposans de* b; *prenez la dérivée suivante divisée* D *de toutes les quantités ainsi préparées, tant accentuées que non accentuées, et cela dans toutes les parties du terme donné.*

2.° *Dans la seule partie du terme donné où* b *a l'exposant le plus grand, et où cette puissance de* b *n'a point subi de dérivation, diminuez encore les puissances de* b' *de l'unité, en rejetant les quantités sans* b', *et en faisant sur les coëfficiens numériques les changemens convenables; et faites une dérivation divisée* D', *mais seulement sur les quantités accentuées.*

En effectuant les dérivations D, *il faut regarder comme dépendantes les unes des autres les lettres sans accens et celles qui ont le même nombre d'accens, et comme indépendantes les unes des autres les lettres différemment*

accentuées ; et quand on fait les dérivations D', *il faut regarder les quantités accentuées, même celles qui portent des accens différens, comme dépendantes les unes des autres.*

Les indices de D *qui affectent* φa, *et les coëfficiens numériques qui en proviennent, se règlent sur les dimensions respectives des quantités polynomiales accentuées et non accentuées.*

Quant à l'opération qu'il faut faire pour changer les coëfficiens numériques en conséquence de la diminution de l'exposant de b ou de celui de b', elle se réduit, en conformité de ce qui a été dit dans la règle du n.° 43, à multiplier par l'exposant avant la diminution, et à diviser par les dimensions que forment avant la diminution les lettres non accentuées si c'est l'exposant de b qu'on diminue, ou toutes les lettres accentuées si l'on diminue l'exposant de b'.

143. Proposons pour exemple de calculer immédiatement le coëfficient de x^4y^3. Le terme par lequel il faudra commencer est $\mathrm{D}'^4\mathrm{D}'^3\varphi a.\, b^4 b'^3$; de là on déduira sur-le-champ tous les autres par le procédé de la règle, comme on les voit ici.

$$\mathrm{D}'^4\mathrm{D}'^3\varphi a.\, b^4 b'^3$$

$$+ \mathrm{D}'^3\mathrm{D}'^3\varphi a.\, \{b^3.\, 3b'^2c' + 3b^2c.\, b'^3\}$$
$$+ \mathrm{D}'^4\mathrm{D}'^2\varphi a.\, b^4.\, 2b'c''$$

$$+ \mathrm{D}'^2\mathrm{D}'^3\varphi a.\, \{b^2(3b'^2d' + 3b'c'^2) + 2bc.\, 3b'^2c' + (2bd + c^2)b'^3\}$$
$$+ \mathrm{D}'^3\mathrm{D}'^2\varphi a.\, \{b^3(2b'd'' + 2c'c'') + 3b^2c.\, 2b'c''\}$$
$$+ \mathrm{D}'^4\mathrm{D}\varphi a.\, b^4 d'''$$

$$+ \mathrm{D}\mathrm{D}'^3\varphi a.\, \{b(3b'^2e' + 3b'2c'd' + c'^3) + c(3b'^2d' + 3b'c'^2) + d3b'^2c' + eb'^3\}$$
$$+ \mathrm{D}'^2\mathrm{D}'^2\varphi a.\, \{b^2(2b'e'' + 2c'd'' + 2d'c'') + 2bc(2b'd'' + 2c'c'') + (2bd + c^2)2b'c''\}$$
$$+ \mathrm{D}'^3\mathrm{D}\varphi a.\, \{b^3e''' + 3b^2c.\, d'''\}$$

$$+ \mathrm{D}'^3\varphi a.\, \{3b'^2f' + 3b'(2c'e' + d'^2) + 3c'^2d'\}$$
$$+ \mathrm{D}\mathrm{D}'^2\varphi a.\, \{b(2b'f'' + 2c'e'' + 2d'd'' + 2e'c'') + c(2b'e'' + 2c'd'' + 2d'c'') + d(2b'd'' + 2c'c'') + e\,2b'c''\}$$
$$+ \mathrm{D}'^2\mathrm{D}\varphi a.\, \{b^2f''' + 2bc.\, e''' + (2bd + c^2)d'''\}$$

$$+ \mathrm{D}'^2\varphi a.\, \{2b'g'' + 2c'f'' + 2d'e'' + 2e'd'' + 2f'c''\}$$
$$+ \mathrm{D}\mathrm{D}\varphi a.\, \{bg''' + cf''' + de''' + ed'''\}$$

$$+ \mathrm{D}\varphi a.\, h'''.$$

Nous avons mis des lignes verticales devant les parties du coëfficient qui forment ensemble un même terme.

144. On a vu dans les développemens des fonctions de polynomes simples, que, dès qu'on a un coëfficient du développement réduit, il est plus facile d'en déduire les suivans que de calculer isolément chacun de ces coëfficiens. La même chose a lieu pour les fonctions de polynomes doubles; et nous allons nous occuper de la recherche des règles nécessaires pour atteindre ce but : mais nous observerons auparavant, en jetant les yeux sur la série (2) du n.° 131, que dans les fonctions de polynomes doubles il y a différentes manières de déduire les uns des autres ces termes ou leurs coëfficiens; entre lesquelles il y en a trois principales, savoir :

1.° On peut déduire les uns des autres les termes qui se succèdent dans la même ligne horizontale, formule (2) du n.° 131; par exemple, de $C''y^2$ on peut déduire $D''xy^2$, $E''x^2y^2$, $F''x^3y^2$, etc. : ici la puissance de y demeure la même, et celles de x suivent les nombres naturels.

2.° On peut déduire les uns des autres les termes qui se succèdent dans la même ligne oblique, inclinée d'un angle demi-droit sur l'horizontale, dans la formule (2) du n.° 131; de Cx^2, par exemple, on peut déduire $D'x^2y$, $E''x^2y^2$, $F'''x^2y^3$, etc. ; ici la puissance de x demeure la même, et celles de y vont en augmentant.

3.° On peut déduire les uns des autres les termes qui se succèdent dans la même ligne verticale; de Dx^3, par exemple, on peut déduire $D'x^2y$, $D''xy^2$, $D'''y^3$: ici x et y forment toujours le même nombre de dimensions, mais à chaque terme un x se change en y.

La première et la seconde de ces trois manières ne sont pas essentiellement différentes; nous commencerons donc par exposer la première, nous dirons un mot de la seconde, et nous donnerons ensuite une méthode facile pour la troisième.

Formons d'abord les développemens en b et b' des premiers termes de la série demandée : leur ensemble formera un tableau sur lequel on lira les lois de dérivation qui lient les coëfficiens des différens termes les uns aux autres.

145. Pour former ces développemens en b et b', il suffit de faire dans la formule du théorème précédent, n.° 136, successivement et par ordre,

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ etc.},$$

et de faire aussi, pour chacune de ces valeurs de m, successivement,

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \text{etc.},$$

en rejetant dans la formule générale tous les termes où les indices de D ou ceux de D$'$, et les exposans de b ou de b', deviennent négatifs; ou bien on suivra les lois indiquées dans les n.ºs 138 ou 139. On trouvera ainsi pour les premiers termes du développement ceux qui suivent :

$$\varphi a + \mathrm{D}\varphi a.b.x + \left.\begin{matrix}\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.b\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.b^2\end{matrix}\right|x^2 \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^2.b\\ +\mathrm{D}^2\varphi a\ \mathrm{D}.b^2\\ +\mathrm{D}^3\varphi a.b^3\end{matrix}\right|x^3 \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^3.b\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}^2.b^2\\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}.b^3\\ +\mathrm{D}^4\varphi a.b^4\end{matrix}\right|x^4 + \text{etc.}$$

$$+\mathrm{D}\varphi a.b'.y + \left.\begin{matrix}\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.b'\\ +\mathrm{DD}\varphi a.bb'\end{matrix}\right|xy \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^2.b'\\ +\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}.(bb')\\ +\mathrm{D}^2\mathrm{D}\varphi a.b^2b'\end{matrix}\right|x^2y \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^3.b'\\ +\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}^2.(bb')\\ +\mathrm{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.(b^2b')\\ +\mathrm{D}^3\mathrm{D}\varphi a.b^3b'\end{matrix}\right|x^3y + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}'.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.b'^2\end{matrix}\right|y^2 \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.b'^2\\ +\mathrm{DD}\varphi a.b\mathrm{D}'.b'\\ +\mathrm{D}\mathrm{D}^2\varphi a.bb'^2\end{matrix}\right|xy^2 \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^2.\mathrm{D}'.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}^2.b'^2\\ +\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}.(b\mathrm{D}'.b')\\ +\mathrm{D}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.(bb'^2)\\ +\mathrm{D}^2\mathrm{D}\varphi a.b^2\mathrm{D}'.b'\\ +\mathrm{D}^2\mathrm{D}^2\varphi a.b^2b'^2\end{matrix}\right|x^2y^2 + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}'^2.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}'.b'^2\\ +\mathrm{D}^3\varphi a.b'^3\end{matrix}\right|y^3 \left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'^2.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.b'^2\\ +\mathrm{DD}\varphi a.b\mathrm{D}'^2.b'\\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}.b'^3\\ +\mathrm{D}\mathrm{D}^2\varphi a.b\mathrm{D}'.b'^2\\ +\mathrm{D}\mathrm{D}^3\varphi a.bb'^3\end{matrix}\right|xy^3 + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{matrix}+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}'^3.b'\\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}'^2.b'^2\\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}'.b'^3\\ +\mathrm{D}^4\varphi a.b'^4\end{matrix}\right|y^4 + \text{etc.}$$

146. On remarque d'abord sur le tableau précédent, que nous aurions étendu davantage si l'espace l'avoit permis, que les coëfficiens des puissances de x sans y, aussi bien que ceux des puissances de y sans x, se déduisent les uns des autres par la règle du n.° 24. Il ne faut donc pas de règle particulière pour calculer ces coëfficiens.

Quant aux autres coëfficiens, ne considérons-les que comme se suivant dans les mêmes lignes horizontales; c'est-à-dire, en commençant par un terme affecté de y sans x, examinons la loi suivant laquelle se déduisent les uns des autres les coëfficiens des termes où la puissance de y demeure la même et où celles de x vont en augmentant.

Avec un peu d'attention on trouve la loi de dérivation qui suit.

Un coëfficient quelconque étant donné, pour avoir le suivant appartenant à une puissance de x plus haute de l'unité;

1.° Faites une dérivation divisée D sur les quantités polynomiales de chaque partie de terme du coëfficient donné, cette dérivation affectant b' aussi bien que b.

2.° Dans la dernière partie de chaque terme du coëfficient donné, c'est-à-dire dans celle où la quantité polynomiale n'est pas affectée de D sans accent, et où l'exposant de b est le plus grand (cet exposant peut même être zéro), changez un facteur b' en b et faites une dérivation divisée D', mais seulement sur la puissance restante de b', à l'exclusion de b; vous formerez ainsi la partie nouvelle que donne la dernière partie de chaque terme du coëfficient donné.

Pour que cette partie nouvelle ait lieu, il faut que dans la dernière partie qui doit la donner, b' soit au moins à la deuxième puissance; car si b' n'étoit qu'à la première puissance, en effaçant le facteur b', on auroit à prendre la dérivée D' de l'unité; or cette dérivée est zéro; donc dans ce cas il n'y a point de partie nouvelle.

3.° Enfin, quand on aura fait les deux opérations précédentes sur chacun des termes du coëfficient donné, il faut encore, dans le dernier terme, faire varier a de b et prendre la dérivée divisée, ce qui donnera un terme nouveau.

Tant que les puissances de b et de b' ne changent pas, on laisse tels qu'ils sont les indices des D sans point qui affectent φa; mais lorsque dans le cours de l'opération un b' se change en b, il faut changer aussi les indices de ces mêmes D.

Si on vouloit une démonstration rigoureuse de cette loi, on n'auroit qu'à mettre $m + 1$ au lieu de m dans la formule (10) n.° 136, et comparer entre elles les deux formules.

147. Au moyen de cette loi on peut continuer la série du n.° 145 aussi loin qu'on voudra, sans avoir besoin de recourir à la formule du n.° 136 ou aux lois des n.ºs 138 ou 139.

Du terme affecté de y^3, par exemple,

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{D}\varphi a.\,\mathfrak{D}'^2.\,b' \\ +\,\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}'.b'^2 \\ +\,\mathfrak{D}^3\varphi a.\,b'^3 \end{array}\right| y^3,$$

on déduira ainsi ceux affectés de xy^3, x^2y^3, x^3y^3, etc., tels que les voici:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.b' \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.b'^2 \\ +\,\mathrm{DD}\varphi a.b\mathfrak{D}'^2.b' \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^3\varphi a.\,\mathrm{D}.\,b'^3 \\ +\,\mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.b\mathrm{D}'.b'^2 \end{array}\right. \\ +\,\mathrm{D}\mathfrak{D}^3\varphi a.\,bb'^3 \end{array}\right| xy^3 \quad \left.\begin{array}{l} +\,\mathrm{D}\varphi a.\,\mathfrak{D}^2.\,\mathfrak{D}'^2.\,b' \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^2\varphi a.\,\mathfrak{D}^2.\,\mathrm{D}'.\,b'^2 \\ +\,\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}.(b\mathfrak{D}'^2.b') \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^3\varphi a.\,\mathfrak{D}^2.\,b'^3 \\ +\,\mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.(b\mathrm{D}'.b'^2) \\ +\,\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\,b^2\mathfrak{D}'^2.\,b' \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathrm{D}\mathfrak{D}^3\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(bb'^3) \\ +\,\mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi a.\,b^2\mathrm{D}'.\,b'^2 \end{array}\right. \\ +\,\mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^3\varphi a.\,b^2b'^3 \end{array}\right| x^2y^3 \quad \left.\begin{array}{l} +\,\mathrm{D}\varphi a.\,\mathfrak{D}^3.\,\mathfrak{D}'^2.\,b' \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^2\varphi a.\,\mathfrak{D}^3.\,\mathrm{D}'.\,b'^2 \\ +\,\mathrm{DD}\varphi a.\,\mathfrak{D}^2.\,(b\mathfrak{D}'^2.b') \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^3\varphi a.\,\mathfrak{D}^3.\,b'^3 \\ +\,\mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^2.(b\mathrm{D}'.b'^2) \\ +\,\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}.(b^2\mathfrak{D}'^2.b') \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathrm{DD}^3\varphi a.\,\mathfrak{D}^2.\,(bb'^3) \\ +\,\mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.(b^2\mathrm{D}'.b'^2) \\ +\,\mathfrak{D}^3\mathrm{D}\varphi a.\,b^3\mathfrak{D}'^2.\,b' \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} +\,\mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^3\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b^2b'^3) \\ +\,\mathfrak{D}^3\mathfrak{D}^2\varphi a.\,b^3\mathrm{D}'.\,b'^2 \end{array}\right. \\ +\,\mathfrak{D}^3\mathfrak{D}^3\varphi a.\,b^3b'^3 \end{array}\right| x^3y^3 \quad +\,\text{etc.}$$

148. Si l'on applique maintenant aux formules des n.ºs 145 et 147, et à la loi du n.° 146, les observations du n.° 141 sur les développemens réduits des quantités polynomiales, on arrive facilement à la règle suivante.

RÈGLE.

Le développement réduit de $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a.$ *étant donné, pour en déduire celui de* $\mathfrak{D}^{m+1}.\mathfrak{D}'^n.\varphi a$;

1.° *Dans chaque terme du coëfficient donné, prenez la dérivée divisée* D *des quantités polynomiales de chaque partie de terme.*

2.° *Dans la dernière partie du terme où b non accentué a le plus grand*

exposant, et n'est point suivi d'autres lettres non-accentuées (l'exposant de b peut même être zéro, ce qui a lieu dans les coëfficiens des y sans x), diminuez en outre les puissances de b' de l'unité dans tous les produits qui contiennent b', en rejetant les produits qui ne contiennent pas b', et augmentez de l'unité l'exposant de b : faites en même temps sur les coëfficiens numériques les changemens qu'entraîne ce changement d'un facteur b' en b. Après cette préparation, faites une dérivation divisée D$'$, *mais seulement sur les quantités polynomiales accentuées.*

3.° *Enfin, dans le dernier terme du coëfficient donné* $\text{D}^m.\text{D}'^n.\phi a$, *faites de plus une dérivation divisée* D *en faisant varier a de b dans ϕa.*

Quant aux Dϕa, D$^2\phi a$, DDϕa, *etc., les indices des* D *qui affectent ϕa, et les dénominateurs numériques qui y répondent, se règlent toujours sur les dimensions respectives de toutes les lettres non accentuées et de toutes les lettres accentuées.*

Nous venons de dire, dans la 2.ᵉ partie de la règle, qu'il faut faire sur les coëfficiens numériques le changement qu'entraînent la diminution de l'unité qu'on fait sur l'exposant de b' et l'augmentation de l'exposant de b. Ce changement se réduit à multiplier simplement, par l'exposant de b' non diminué, chaque produit où se fait cette diminution, et à diviser par le nombre des dimensions de toutes les lettres accentuées avant la diminution.

En conformité des règles des n.ᵒˢ 43 et 47, on devroit 1.° faire l'opération que nous venons de prescrire, et 2.°, comme on augmente l'exposant de b, on devroit aussi diviser par l'exposant de b augmenté et multiplier par le nombre des dimensions des lettres non accentuées, y compris celles de b après l'augmentation. Mais, comme la puissance de b qu'on augmente n'est jamais affectée de D dans la partie où se fait le changement d'un b' en b, et partant que b n'y est suivi d'aucune lettre non accentuée, la division et la multiplication se feroient par un même nombre et s'entre-détruiroient. Ainsi toute la préparation se réduit au procédé que nous venons d'indiquer.

149. En suivant la règle, on déduira sur-le-champ du terme

$$\left.\begin{array}{l} \text{D}\phi a.\,e'^{v} \\ +\,\text{D}^2\phi a.(2b'd''' + c''^2) \\ +\,\text{D}^3\phi a.\,3b'^2c'' \\ +\,\text{D}^4\phi a.\,b'^4 \end{array}\right|\,y^4$$

par exemple, terme que l'on peut toujours calculer par les règles du §. II ou du §. III de l'article premier, on déduira, dis-je, les développemens réduits des termes suivans affectés de xy^4, x^2y^4, x^3y^4, etc., comme on les voit ici.

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{D}\varphi a.f^{\prime V} \\
+\varrho^2\varphi a.\{2b'e''' + 2c'd''' + 2c''d''\} \\
+\mathrm{DD}\varphi a.be^{\prime V} \\
+\varrho^3\varphi a.\{3b'^2d'' + 6b'c'c''\} \\
+\mathrm{D}\varrho^2\varphi a.b(2b'd''' + c''^2) \\
+\varrho^4\varphi a.4b'^3c' \\
+\mathrm{D}\varrho^3\varphi a.b3b'^2c'' \\
+\mathrm{D}\varrho^4\varphi a.bb'^4
\end{array}\right| xy^4$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{D}\varphi a.g^{\prime V} \\
+\varrho^2\varphi a.\{2b'f''' + 2c'e''' + 2d'd''' + 2c''e'' + d''^2\} \\
+\mathrm{DD}\varphi a.\{bf^{\prime V} + ce^{\prime V}\} \\
+\varrho^3\varphi a.\{3b'^2e'' + 6b'c'd'' + 3(2b'd' + c'^2)c''\} \\
+\mathrm{D}\varrho^2\varphi a.\{b(2b'e''' + 2c'd''' + 2c''d'') + c(2b'd''' + c''^2)\} \\
+\varrho^2\mathrm{D}\varphi a.b^2e^{\prime V} \\
+\varrho^4\varphi a\{4b'^3d' + 6b'^2c'^2\} \\
+\mathrm{D}\varrho^3\varphi a\{b(3b'^2d'' + 6b'c'c'') + c3b'^2c''\} \\
+\varrho^2\varrho^2\varphi a.b^2(2b'd''' + c''^2) \\
+\mathrm{D}\varrho^4\varphi a.\{b4b'^3c' + cb'^4\} \\
+\varrho^2\varrho^3\varphi a.b^23b'^2c'' \\
+\varrho^2\varrho^4\varphi a.b^2b'^4
\end{array}\right| x^2y^4$$

$$+\mathrm{D}\varphi a.h^{\prime V}$$

$$+ \mathrm{D}\varphi a.\, h'^{V}$$

$$+ \mathcal{D}^2\varphi a. \{2b'g''' + 2c'f''' + 2d'e''' + 2e'd''' + 2c''f'' + 2d''e''\}$$
$$+ \mathrm{DD}\varphi a. \{bg'^{V} + cf'^{V} + de'^{V}\}$$

$$+ \mathcal{D}^3\varphi a. \{3b'^2 f'' + 6b'c'e'' + 3(2b'd' + c'^2)\, d'' + 3(2b'e' + 2c'd')\, c''\}$$
$$+ \mathrm{D}\mathcal{D}^2\varphi a. \{b(2b'f''' + 2c'e''' + 2d'd''' + 2c''e'' + d''^2) + c(2b'e''' + 2c'd''' + 2c''d'') + d(2b'd''' + c''^2)\}$$
$$+ \mathcal{D}^2\mathrm{D}\varphi a. \{b^2 f'^{V} + 2bce'^{V}\}$$

$$+ \mathcal{D}^4\varphi a. \{4b'^3e' + 6b'^2 2c'd' + 4b'c'^3\}$$
$$+ \mathrm{D}\mathcal{D}^3\varphi a. \{b(3b'^2e'' + 6b'c'd'' + 3(2b'd' + c'^2)c'') + c(3b'^2d'' + 6b'c'c'') + d3b'^2c''\}$$
$$+ \mathcal{D}^2\mathcal{D}^2\varphi a. \{b^2(2b'e''' + 2c'd''' + 2c''d'') + 2bc(2b'd''' + c''^2)\}$$
$$+ \mathcal{D}^3\mathrm{D}\varphi a.\, b^3e'^{V}$$

$$+ \mathrm{DD}^4\varphi a. \{b(4b'^3d' + 6b'^2c'^2) + c4b'^3c' + db'^4\}$$
$$+ \mathcal{D}^2\mathcal{D}^3\varphi a. \{b^2(3b'^2d'' + 6b'c'c'') + 2bc3b'^2c''\}$$
$$+ \mathcal{D}^3\mathcal{D}^2\varphi a.\, b^3(2b'd''' + c''c'')$$

$$+ \mathcal{D}^2\mathcal{D}^4\varphi a. \{b^2 4b'^3c' + 2bcb'^4\}$$
$$+ \mathcal{D}^3\mathcal{D}^3\varphi a.\, b^3 3b'^2c''$$

$$+ \mathcal{D}^3\mathcal{D}^4\varphi a.\, b^3b'^4$$

x^3y^4 … + etc.

150. Nous avons vu, n.° 133, que $\mathcal{D}'^n.\, \mathcal{D}^m.\, \varphi a$ est égal à $\mathcal{D}^m.\, \mathcal{D}'^n.\, \varphi a$; si donc on développe la première de ces expressions d'une manière pareille à celle par laquelle on a développé la dernière dans le n.° 135, à cela près qu'on commence ici par les dérivations indiquées par D, on aura la formule

$$\mathcal{D}'^n.\, \mathcal{D}^m.\, \varphi a =$$
$$\mathcal{D}'^n.(\mathrm{D}\varphi a.\, \mathcal{D}^{m-1}.\, b) + \mathcal{D}'^n.(\mathcal{D}^2\varphi a.\, \mathcal{D}^{m-2}.\, b^2) + \mathcal{D}'^n.(\mathcal{D}^3\varphi a.\, \mathcal{D}^{m-3}.\, b^3) + \text{etc.}$$
$$+ \mathcal{D}'^n.(\mathcal{D}^{m-2}\varphi a.\, \mathcal{D}^2.\, b^{m-2}) + \mathcal{D}'^n.(\mathcal{D}^{m-1}\varphi a.\, \mathrm{D}.\, b^{m-1}) + \mathcal{D}'^n.(\mathrm{D}^m\varphi a.\, b^m);$$

et de là, en développant encore en b' chaque terme, on tirera

$$\wp'^{n}.\wp^{m}.\varphi a =$$

$$\mathrm{D}\varphi a.\wp'^{n}.\wp^{m-1}.b \qquad + \wp^{2}\varphi a.\wp'^{n}.\wp^{m-2}.b^{2} \qquad + \wp^{3}\varphi a.\wp'^{n}.\wp^{m-3}.b^{3}$$
$$+ \mathrm{DD}\varphi a.\wp'^{n-1}.(b'\wp^{m-1}.b) \qquad + \mathrm{D}\wp^{2}\varphi a.\wp'^{n-1}.(b'\wp^{m-2}.b^{2})$$
$$+ \wp^{2}\mathrm{D}\varphi a.\wp'^{n-2}.(b'^{2}\wp^{m-1}.b)$$

$$+ \wp^{4}\varphi a.\wp'^{n}.\wp^{m-4}.b^{4} \qquad + \wp^{n-3}\wp^{m}\varphi a.\wp'^{3}.(b'^{n-3}b^{m})$$
$$+ \mathrm{D}\wp^{3}\varphi a.\wp'^{n-1}.(b'\wp^{m-3}.b^{3}) \qquad + \wp^{n-2}\wp^{m-1}\varphi a.\wp'^{2}.(b'^{n-2}\mathrm{D}.b^{m-1})$$
$$+ \wp^{2}\wp^{2}\varphi a.\wp'^{n-2}.(b'^{2}\wp^{m-2}.b^{2}) \quad + \text{etc.} \ldots\ldots \quad + \wp^{n-1}\wp^{m-2}\varphi a.\mathrm{D}'.(b'^{n-1}\wp^{2}.b^{m-2})$$
$$+ \wp^{3}\mathrm{D}\varphi a.\wp'^{n-3}(b'^{3}\wp^{m-1}.b) \qquad + \wp^{n}\wp^{m-3}\varphi a.b'^{n}\wp^{3}.b^{m-3}$$

$$+ \wp^{n-2}\wp^{m}\varphi a.\wp'^{2}.(b'^{n-2}b^{m}) \qquad + \wp^{n-1}\wp^{m}\varphi a.\mathrm{D}'.(b'^{n-1}b^{m}) \qquad + \wp^{n}\wp^{m}\varphi a.b'^{n}b^{m}.$$
$$+ \wp^{n-1}\wp^{m-1}\varphi a.\mathrm{D}'.(b'^{n-1}\mathrm{D}.b^{m-1}) \qquad + \wp^{n}\wp^{m-1}\varphi a.b'^{n}\mathrm{D}.b^{m-1}$$
$$+ \wp^{n}\wp^{m-2}\varphi a.b'^{n}\wp^{2}.b^{m-2}$$

Cette formule se déduit immédiatement de celle du n.° 136, si dans celle-ci on échange entre elles les lettres b et b', les exposans et indices m et n, et les signes D et D'. Elle sert comme l'autre, avec les changemens convenables, à calculer un terme quelconque de la série indépendamment de tous les autres, ainsi qu'à déduire les uns des autres les coëfficiens de ces termes. Mais, au lieu que la formule du n.° 136 nous a conduits à déduire les uns des autres les coëfficiens des termes qui suivent la même ligne horizontale, celle-ci fait arriver à la règle pour déduire les uns des autres les coëfficiens des termes qui suivent les obliques inclinées aux lignes horizontales d'un angle demi-droit, du terme Dx^3, par exemple, les termes $E'x^3y$, $F''x^3y^2$, $G'''x^3y^3$, $H^{IV}x^3y^4$, etc.; et c'est là la seconde manière de déduire les uns des autres les termes de la série, manière dont, à la fin du n.° 144, nous avons promis de faire mention.

Ici, lorsqu'on effectue les dérivations D' sur les quantités polynomiales, il faudra regarder toutes les lettres différentes, avec ou sans accent, comme indépendantes les unes des autres, à l'exception seulement des lettres qui dans le polynome du n.° 129 suivent les lignes obliques, inclinées sur les horizontales d'un angle demi-droit, comme c, d', e'', f''', etc., lesquelles seront regardées comme dépendantes les unes des autres; et quand on fait une dérivation D sur les seules lettres sans accent, on l'effectuera à l'ordinaire, en considérant ces lettres comme dépendantes les unes des autres.

Pour ne pas passer de justes bornes, je supprime des détails, que le lecteur suppléera aisément.

(III.)

Seconde solution du problème précédent.

151. Nous allons présentement donner, pour résoudre le problème proposé au n.° 131, une méthode qui, lorsqu'il s'agit de déduire les coëfficiens de la série les uns des autres, est à quelques égards plus facile que celle que nous venons d'employer : elle est d'ailleurs plus étendue dans ses applications.

Nous avons remarqué, n.° 144, qu'on peut aussi déduire les uns des autres les différens termes de la série (2) n.° 131 qui se succèdent dans les mêmes colonnes verticales, c'est-à-dire les coëfficiens affectés généralement de x^m, $x^{m-1}y$, $x^{m-2}y^2$, $x^{m-3}y^3$, etc.; et c'est de la manière de faire cette sorte de dérivations que nous allons nous occuper.

152. Si dans le polynome double de la fonction proposée

$$\varphi\left\{\begin{array}{llllll} a & + bx & + cx^2 & + dx^3 & + ex^4 & + \text{etc.} \\ & + b'y & + c'xy & + d'x^2y & + e'x^3y & + \text{etc.} \\ & & + c''y^2 & + d''xy^2 & + e''x^2y^2 & + \text{etc.} \\ & & & + d'''y^3 & + e'''xy^3 & + \text{etc.} \\ & & & & e^{\text{IV}}y^4 & + \text{etc.} \\ & & & & & + \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

on considère les coëfficiens des colonnes verticales; on voit qu'en imaginant $x = 1$, le polynome se partage en plusieurs polynomes simples qui procèdent suivant les puissances de y, savoir

$$\begin{array}{l} b + b'y, \\ c + c'y + c''y^2, \\ d + d'y + d''y^2 + d'''y^3, \\ e + e'y + e''y^2 + e'''y^3 + e^{\text{IV}}y^4, \\ \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots (b)$$

Si maintenant on regarde les coëfficiens de ces polynomes partiels comme dérivant les uns des autres, on est conduit à une nouvelle sorte de dérivées où les lettres ne changent pas, mais seulement les accens, et où b', c'', d''', e^{IV}, etc., sont des dernières dérivées, dont les dérivées ultérieures sont zéro.

153. Désignons par ${}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}$, ${}^{\prime 2}\mathrm{D}^{0}$, ${}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}$, etc., les dérivations de cette espèce; on aura, en regardant b, c, d, e, etc., comme des premiers termes de polynomes,

${}^{\prime 1}\text{D}^{\circ}.b = b'$; ${}^{\prime 1}\text{D}^{\circ}.c = c'$, ${}^{\prime 2}\text{D}^{\circ}.c = c''$; ${}^{\prime 1}\text{D}^{\circ}.d = d'$, ${}^{\prime 2}\text{D}^{\circ}.d = d''$, ${}^{\prime 3}\text{D}^{\circ}.d = d'''$; ${}^{\prime 1}\text{D}^{\circ}.e = e'$, ${}^{\prime 2}\text{D}^{\circ}.e = e''$, ${}^{\prime 3}\text{D}^{\circ}.e = e'''$, ${}^{\prime 4}\text{D}^{\circ}.e = e^{IV}$; et ainsi de suite.

Si l'on compare ${}^{\prime 3}\text{D}^{\circ}.e$ avec $\text{D}^{\prime 3}.e$, on voit que dans ${}^{\prime 3}\text{D}^{\circ}.e$ la lettre ne change pas, mais seulement le nombre des accens, tandis que $\text{D}^{\prime 3}.e$ dénote que la lettre change en même temps que le nombre des accens, car ${}^{\prime 3}\text{D}^{\circ}.e = e'''$ et $\text{D}^{\prime 3}.e = h'''$. En général $\text{D}^{m}.\text{D}^{\prime n}.b$ indique la $(m+n)^{\text{ième}}$ lettre après b, affectée de n accens, tandis que ${}^{\prime n}\text{D}^{\circ}.\text{D}^{m}.b$ indique la $m^{\text{ième}}$ lettre après b affectée de n accens ; et, en se servant des notations générales indiquées à la fin du n.° 130, on a $\text{D}^{m}.\text{D}^{\prime n}.b$ ou $\text{D}^{\prime n}.\text{D}^{m}.b = b_{m,n}$ et ${}^{\prime n}\text{D}^{\circ}.\text{D}^{m}.b = b_{m-n,n}$, d'où l'on conclud que ${}^{\prime n}\text{D}^{\circ}.\text{D}^{m}.b$ est la même chose que $\text{D}^{m-n}.\text{D}^{\prime n}.b$, et ${}^{\prime n}\text{D}^{\circ}.\text{D}^{m}.\varphi a$ la même chose que $\text{D}^{m-n}.\text{D}^{\prime n}.\varphi a$.

154. Cela posé, passons à la solution du problème. Si dans la fonction proposée (a) on suppose

$$\left.\begin{aligned} &bx + b'y = \mathfrak{B}, \\ &cx^2 + c'xy + c''y^2 = \mathfrak{C}, \\ &dx^3 + d'x^2y + d''xy^2 + d'''y^3 = \mathfrak{D}, \\ &ex^4 + e'x^3y + e''x^2y^2 + e'''xy^3 + e^{IV}y^4 = \mathfrak{E}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (c)$$

la fonction prendra cette forme

$$\varphi(a + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.}), \qquad \ldots\ldots (d)$$

et l'on aura pour les premiers termes du développement (n.° 33)

$$\begin{matrix} \varphi a + \text{D}\varphi a.\mathfrak{B} & + \text{D}\varphi a.\mathfrak{C} & + \text{D}\varphi a.\mathfrak{D} & + \text{D}\varphi a.\mathfrak{E} & \\ + \text{D}^2\varphi a.\mathfrak{B}^2 & + \text{D}^2\varphi a.2\mathfrak{B}\mathfrak{C} & + \text{D}^2\varphi a.(2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}^2) & & + \text{etc.} ; \ldots (e) \\ & + \text{D}^3\varphi a.\mathfrak{B}^3 & + \text{D}^3\varphi a.3\mathfrak{B}^2\mathfrak{C} & & \\ & & + \text{D}^4\varphi a.\mathfrak{B}^4 & & \end{matrix}$$

et comme tous les polynomes (c) sont homogènes en x et y, de même aussi toutes les colonnes verticales du développement (e) seront homogènes en x et y, φa ne contenant ni x ni y, et les 2.e, 3.e, 4.e, 5.e, etc. colonnes étant respectivement de une, de deux, de trois, de quatre, etc. dimensions en x et y.

Ne prenons qu'une de ces colonnes, la 5.e par exemple ; ce que nous en dirons s'étend à toutes les autres. On voit qu'en y mettant uniquement b, c, d, e à la place de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ respectivement, on aura le coëfficient de x^4, lequel sera par conséquent

$$\text{D}\varphi a.e + \text{D}^2\varphi a.(2bd + c^2) + \text{D}^3\varphi a.3b^2c + \text{D}^4\varphi a.b^4, \qquad \ldots (f)$$

et

et qu'en faisant $x = 1$ dans les polynomes (c), en mettant les polynomes (b) à la place de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ respectivement, et en développant suivant les puissances de y l'expression qui en résulte, on aura les coëfficiens de x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 : en effet, par cette substitution la colonne cinquième devient

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}\varphi a.\,(e + e'y + e''y^2 + e'''y^3 + e^{\prime\mathrm{v}}y^4) \\ &+ \mathcal{D}^2\varphi a.\,\{2(b+b'y)(d+d'y+d''y^2+d'''y^3)+(c+c'y+c''y^2)^2\} \\ &+ \mathcal{D}^3\varphi a.\,3(b+b'y)^2(c+c'y+c''y^2) \\ &+ \mathcal{D}^4\varphi a.\,(b+b'y)^4 \end{aligned} \quad \ldots (g)$$

Mais il est aisé de voir que les coëfficiens de y, y^2, y^3, y^4 du développement de (g) se déduissent facilement par dérivation de la formule (f); qu'il suffit pour cela de supposer que b, c, d, e aient pour dérivées celles que nous avons indiquées ci-dessus n.° 153, et d'appliquer les théorèmes et les règles du §. I.er de l'article second, en regardant chacune des quantités e, $2bd$, c^2, $3b^2c$, b^4 comme une origine particulière de dérivation, et toutes les lettres différentes comme indépendantes les unes des autres. On voit d'ailleurs que cette formule (f) n'est autre chose que le coëfficient développé et réduit de x^4 dans le développement de

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}).$$

155. D'après cela, et en observant que les règles pour faire les dérivations indiquées par ${}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}$, ${}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}$, etc., ${}^{\prime n}\mathcal{D}^{0}$ sont les mêmes au fond que celles que nous avons données pour les cas où les dérivations exigeoient le changement des lettres; on a, pour le coëfficient de x^3y dans le développement de la fonction proposée (a), ou pour celui de y dans (g),

$$\mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime}\mathrm{D}^{0}.e + \mathcal{D}^2\varphi a.\{{}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}.(2bd) + {}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}.c^2\} + \mathcal{D}^3\varphi a.{}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}.(3b^2c) + \mathcal{D}^4\varphi a.{}^{\prime 1}\mathrm{D}^{0}.b^4;$$

pour le coëfficient de y^2 dans (g) ou de x^2y^2 dans (e),

$$\mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}.e + \mathcal{D}^2\varphi a.\{{}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}.(2bd) + {}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}.c^2\} + \mathcal{D}^3\varphi a.{}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}.(3b^2c) + \mathcal{D}^4\varphi a.{}^{\prime 2}\mathcal{D}^{0}.b^4;$$

pour le coëfficient de y^3 dans (g) ou de xy dans (e),

$$\mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathcal{D}^{0}.e + \mathcal{D}^2\varphi a.\{{}^{\prime 3}\mathcal{D}^{0}.(2bd) + {}^{\prime 3}\mathcal{D}^{0}.c^2\} + \mathcal{D}^3\varphi a.{}^{\prime 3}\mathcal{D}^{0}.(3b^2c) + \mathcal{D}^4\varphi a.{}^{\prime 3}\mathcal{D}^{0}.b^4;$$

et enfin, pour le coëfficient de y^4,

$$\mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime 4}\mathcal{D}^{0}.e + \mathcal{D}^2\varphi a.\{{}^{\prime 4}\mathcal{D}^{0}.(2bd) + {}^{\prime 4}\mathcal{D}^{0}.c^2\} + \mathcal{D}^3\varphi a.{}^{\prime 4}\mathcal{D}^{0}.(3b^2c) + \mathcal{D}^4\varphi a.{}^{\prime 4}\mathcal{D}^{0}.b^4.$$

Si, en déduisant ces coëfficiens les uns des autres, on effectue les dérivations par les procédés du §. I.er de l'article second, en faisant attention aux

lettres accentuées dont les dérivées sont zéro, et en observant qu'ici a n'a point de dérivée, on trouvera les coëfficiens de la cinquième colonne du n.° 157 ci-après.

156. Il est facile de voir que ce que l'on vient de dire de la colonne 5.e de la série du développement, s'étend aux autres colonnes verticales, et qu'ainsi on peut établir la règle suivante.

RÈGLE.

Pour développer une fonction quelconque de polynome double, en une série double;

Calculez les coëfficiens des termes affectés de x, x^2, x^3, x^4, *etc.* x^n, *etc., sans* y, *par la règle du n.°* 30, *en excluant du polynome tous les termes affectés de* y.

Puis, pour déduire du coëfficient de x^n *ceux de* $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$, $x^{n-3}y^3$, *etc. successivement; dans les quantités polynomiales du coëfficient de* x^n *développé et réduit, considérez chaque monome comme une origine particulière de dérivation et les différentes lettres qui le composent comme des quantités indépendantes les unes des autres, et faites une dérivation divisée, en supposant la dérivée divisée de* a *égale à zéro, celle de* b *égale à* b', c' *celle de* c, d' *celle de* d, *etc.; faites ces dérivations par les procédés du* §. *I.*^{er} *de l'article second, et vous aurez le coëfficient de* $x^{n-1}y$.

Ayant eu soin de distinguer par des barres verticales, ou autrement, les unes des autres les quantités provenues des différens monomes du coëfficient de x^n; *faites une seconde dérivation divisée, suivant les procédés cités, en supposant la dérivée divisée de* b' *égale à zéro, celle de* c' *égale à* c'', d'' *celle de* d', *etc., et vous aurez le coëfficient de* $x^{n-2}y^2$.

Continuez d'une manière pareille pour avoir les coëfficiens de $x^{n-3}y^3$, $x^{n-4}y^4$, *etc.*

Les barres verticales servent à partager les quantités en groupes, à chacun desquels il faut appliquer en particulier le procédé de dérivation qui résulte de la règle du n.° 88 *et de ce qu'on a pratiqué dans l'exemple du n.°* 99.

Cette règle est facile et commode; nous nous en sommes servis pour calculer par colonnes les coëfficiens réduits de la série suivante. Le lecteur, pour s'exercer, pourra pousser plus loin ce développement.

157. Voici les premiers termes réduits du développement de la fonction de polynome double proposée n.° 131.

1.re COL.	2.de COL.	3.e COLONNE.	4.e COLONNE.	5.e COLONNE.
φa	$+ \mathrm{D}\varphi a.b.x$ $+ \mathrm{D}\varphi a.b'.y$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.c \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.b^2 \end{array}\right\vert x^2$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.d \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.2bc \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.b^3 \end{array}\right\vert x^3$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.e \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2bd + c^2) \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.3b^2c \\ + \mathfrak{D}^4\varphi a.b^4 \end{array}\right\vert x^4$
		$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.c' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.2bb' \end{array}\right\vert xy$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.d' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.\left\{\begin{array}{l} 2bc' \\ + 2b'c \end{array}\right\} \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.3b^2b' \end{array}\right\vert x^2y$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.e' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2bd' + 2b'd \mid + 2cc') \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.(3b^2c' + 6bb'c) \\ + \mathfrak{D}^4\varphi a.4b^3b' \end{array}\right\vert x^3y$
		$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.c'' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.b'^2 \end{array}\right\vert y^2$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.d'' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.\left\{\begin{array}{l} 2bc'' \\ + 2b'c' \end{array}\right\} \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.3bb'^2 \end{array}\right\vert xy^2$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.e'' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.\left\{\begin{array}{l} 2bd'' + 2b'd' \mid \\ + 2cc'' + c'^2 \end{array}\right\} \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.\{3b^2c'' + 6bb'c' + 3b'^2c\} \\ + \mathfrak{D}^4\varphi a.6b^2b'^2 \end{array}\right\vert x^2y^2$
			$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.d''' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.2b'c'' \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.b'^3 \end{array}\right\vert y^3$	$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.e''' \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2bd''' + 2b'd'' \mid + 2c'c'') \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.(6bb'c'' + 3b'^2c') \\ + \mathfrak{D}^4\varphi a.4bb'^3 \end{array}\right\vert xy^3$
				$\left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}\varphi a.e^{\mathrm{IV}} \\ + \mathfrak{D}^2\varphi a.(2b'd''' \mid + c''^2) \\ + \mathfrak{D}^3\varphi a.3b'^2c'' \\ + \mathfrak{D}^4\varphi a.b'^4 \end{array}\right\vert y^4$

6.me COLONNE.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{D}\varphi a.f \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2be+2cd\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{3b^2d+3bc^2\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.4b^3c \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.b^5 \end{array}\right| x^5$$

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{D}\varphi a.f' \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2be'+2b'e \mid +2cd'+2c'd\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{3b^2d'+6bb'd \mid +3b2cc'+3b'c^2\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.\{4b^3c'+12b^2b'c\} \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.5b^4b' \end{array}\right| x^4y$$

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{D}\varphi a.f'' \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2be''+2b'e' \mid +2cd''+2c'd'+2c''d\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{3b^2d''+6bb'd'+3b'^2d \mid +3b(2cc''+c'^2)+3b'2cc'\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.\{4b^3c''+12b^2b'c'+12bb'^2c\} \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.10b^3b'^2 \end{array}\right| x^3y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{D}\varphi a.f''' \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2be'''+2b'e'' \mid +2cd'''+2c'd''+2c''d'\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{3b^2d'''+6bb'd''+3b'^2d' \mid +3b.2c'c''+3b'(2cc''+c'^2)\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.\{12b^2b'c''+12bb'^2c'+4b'^3c\} \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.10b^2b'^3 \end{array}\right| x^2y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{D}\varphi a.f^{\mathrm{IV}} \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2be^{\mathrm{IV}}+2b'e''' \mid +2c'd'''+2c''d''\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{6bb'd'''+3b'^2d'' \mid +3bc''^2+3b'.2c'c''\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.\{12bb'^2c''+4b'^3c'\} \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.5bb'^4 \end{array}\right| xy^4$$

$$\left.\begin{array}{l} +\mathrm{D}\varphi a.f^{\mathrm{V}} \\ +\mathrm{D}^2\varphi a.\{2b'e^{\mathrm{IV}} \mid +2c''d'''\} \\ +\mathrm{D}^3\varphi a.\{3b'^2d''' \mid +3b'c''^2\} \\ +\mathrm{D}^4\varphi a.4b'^3c'' \\ +\mathrm{D}^5\varphi a.b'^5 \end{array}\right| y^5$$

7.me COLONNE.

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{D}\phi a.g \\
+\mathrm{D}^2\phi a.\{2bf+2ce+d^2\} \\
+\mathrm{D}^3\phi a.\{3b^2e+3b2cd+c^3\} \\
+\mathrm{D}^4\phi a.\{4b^3d+6b^2c^2\} \\
+\mathrm{D}^5\phi a.5b^4c \\
+\mathrm{D}^6\phi a.b^6
\end{array}\right| x^6$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{D}\phi a.g' \\
+\mathrm{D}^2\phi a.\{2bf'+2b'f\,|+2ce'+2c'e\,|+2dd'\} \\
+\mathrm{D}^3\phi a.\{3b^2e'+6bb'e\,|+3b(2cd'+2c'd)+3b'2cd\,|+3c^2c'\} \\
+\mathrm{D}^4\phi a.\{4b^3d'+12b^2b'd\,|+6b^22cc'+12bb'c^2\} \\
+\mathrm{D}^5\phi a.\{5b^4c'+20b^3b'c\} \\
+\mathrm{D}^6\phi a.6b^5b'
\end{array}\right| x^5y$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{D}\phi a.g'' \\
+\mathrm{D}^2\phi a.\{2bf''+2b'f'\,|+2ce''+2c'e'+2c''e\,|+2dd''+d'^2\} \\
+\mathrm{D}^3\phi a.\left\{\begin{array}{l}3b^2e''+6bb'e'+3b'^2e\,|+3b(2cd''+2c'd'+2c''d) \\ \qquad +3b'(2cd'+2c'd)\,|+3c^2c''+3cc'^2\end{array}\right\} \\
+\mathrm{D}^4\phi a.\{4b^3d''+12b^2b'd'+12bb'^2d\,|+6b^2(2cc''+c'^2)+12bb'2cc'+6b'^2c^2\} \\
+\mathrm{D}^5\phi a.\{5b^4c''+20b^3b'c'+30b^2b'^2c\} \\
+\mathrm{D}^6\phi a.15b^4b'^2
\end{array}\right| x^4y^2$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\mathrm{D}\phi a.g''' \\
+\mathrm{D}^2\phi a.\{2bf'''+2b'f''\,|+2ce'''+2c'e''+2c''e'\,|+2dd'''+2d'd''\} \\
+\mathrm{D}^3\phi a.\left\{\begin{array}{l}3b^2e'''+6bb'e''+3b'^2e'\,|+3b(2cd'''+2c'd''+2c''d') \\ \qquad +3b'(2cd''+2c'd'+2c''d)\,|+3c2c'c''+c'^3\end{array}\right\} \\
+\mathrm{D}^4\phi a.\left\{\begin{array}{l}4b^3d'''+12b^2b'd''+12bb'^2d'+4b'^3d\,|+6b^22c'c'' \\ \qquad +12bb'(2cc''+c'^2)+6b'^22cc'\end{array}\right\} \\
+\mathrm{D}^5\phi a.\{20b^3b'c''+30b^2b'^2c'+20bb'^3c\} \\
+\mathrm{D}^6\phi a.20b^3b'^3
\end{array}\right| x^3y^3$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \mathrm{D}\varphi a . g^{IV} \\
&+ \mathrm{D}^2\varphi a . \{2bf^{IV} + 2b'f''' \mid + 2ce^{V} + 2c'e''' + 2c''e'' \mid + 2d'd''' + d''^2\} \\
&+ \mathrm{D}^3\varphi a . \left\{\begin{aligned}&3b^2e^{IV} + 6bb'e''' + 3b'^2e'' \mid + 3b(2c'd''' + 2c''d'') \\ &\qquad + 3b'(2cd''' + 2c'd'' + 2c''d') + 3cc''^2 + 3c'^2c''\end{aligned}\right\} \\
&+ \mathrm{D}^4\varphi a \{12b^2b'd''' + 12bb'^2d'' + 4b'^3d' \mid + 6b^2c''^2 + 12bb'2c'c'' + 6b'^2(2cc'' + c'^2)\} \\
&+ \mathrm{D}^5\varphi a . \{30b^2b'^2c'' + 20bb'^3c' + 5b'^4c\} \\
&+ \mathrm{D}^6\varphi a . 15b^2b'^4
\end{aligned}\right| x^2y^4$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \mathrm{D}\varphi a . g^{V} \\
&+ \mathrm{D}^2\varphi a . \{2bf^{V} + 2b'f^{IV} \mid + 2c'e^{V} + 2c''e''' \mid + 2d''d'''\} \\
&+ \mathrm{D}^3\varphi a . \{6bb'e^{V} + 3b'^2e''' \mid + 3b2c''d''' + 3b'(2c'd''' + 2c''d'') \mid + 3c'c''^2\} \\
&+ \mathrm{D}^4\varphi a . \{12bb'^2d''' + 4b'^3d'' \mid + 12bb'c''^2 + 6b'^2 2c'c''\} \\
&+ \mathrm{D}^5\varphi a . \{20bb'^3c'' + 5b'^4c'\} \\
&+ \mathrm{D}^6\varphi a . 6bb'^5
\end{aligned}\right| xy^5$$

$$\left.\begin{aligned}
&+ \mathrm{D}\varphi a . g^{VI} \\
&+ \mathrm{D}^2\varphi a . \{2b'f^{V} \mid + 2c''e^{V} \mid + d'''^2\} \\
&+ \mathrm{D}^3\varphi a . \{3b'^2e^{V} \mid + 3b'2c''d''' \mid + c''^3\} \\
&+ \mathrm{D}^4\varphi a . \{4b'^3d''' \mid + 6b'^2c''^2\} \\
&+ \mathrm{D}^5\varphi a . 5b'^4c'' \\
&+ \mathrm{D}^6\varphi a . b'^6
\end{aligned}\right| y^6$$

Ici, de même que dans les développemens des fonctions des polynomes simples, la fonction φ n'affecte que le premier terme a du polynome, les autres lettres b, c, d, etc. forment les quantités polynomiales. Il est donc facile d'avoir le développement pour chaque fonction particulière dont la nature est connue.

Ainsi, si l'on demandoit le développement de la puissance quelconque m d'un polynome double, il suffiroit de faire dans le développement précédent

$$\varphi a = a^m, \quad \mathrm{D}\varphi a = ma^{m-1}, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on vouloit le logarithme hyperbolique d'un polynome double, on feroit

$$\varphi a = \log a, \quad \mathrm{D}\varphi a = \frac{1}{a}, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = -\frac{a^{-2}}{2}, \quad \mathrm{D}^3\varphi a = \frac{a^{-3}}{3}, \quad \text{etc.}$$

Si l'on vouloit le sinus qui auroit pour arc un polynome double, on feroit

$$\varphi a = \sin a, \quad \mathrm{D}\varphi a = \cos a, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = -\frac{\sin a}{1.2}, \quad \mathrm{D}^3\varphi a = -\frac{\cos a}{1.2.3}, \quad \text{etc.};$$

et ainsi pour d'autres fonctions.

158. Quant à la manière de calculer isolément le coëfficient d'un terme quelconque, qui résulte de cette seconde solution du problème, nous allons l'expliquer brièvement.

Puisque le coëfficient de $x^{m-n}y^{n}$ est indiqué par ${}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.\,\mathrm{D}^{m}.\varphi a$, il suffit de développer $\mathrm{D}^{m}.\varphi a$ en b et d'affecter chaque terme de ${}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}$; on aura ainsi la proposition suivante, en remarquant que a, n'ayant pas de dérivée affectée d'accent, demeure constant dans l'opération indiquée par ${}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}$.

THÉORÈME.

Le coëfficient du terme quelconque affecté de $x^{m-n}y^{n}$ dans la série résultante du développement d'une fonction quelconque de polynome double, peut être exprimé par cette formule

$${}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.\,\mathrm{D}^{m}.\varphi a =$$

$$\mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{m-1}.b) + \mathrm{D}^{2}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{m-2}.b^{2}) + \mathrm{D}^{3}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{m-3}.b^{3}) + \text{etc.}$$
$$+ \mathrm{D}^{m-2}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{2}.b^{m-2}) + \mathrm{D}^{m-1}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}.b^{m-1}) + \mathrm{D}^{m}\varphi a.{}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}.b^{m}.$$

Pour faire usage de cette formule, on calculera, par la règle du n.° 47 ou par celle du n.° 43, les développemens réduits de $\mathrm{D}^{m-1}.b$, $\mathrm{D}^{m-2}.b^{2}$, etc., $\mathrm{D}^{2}.b^{m-2}$, $\mathrm{D}.b^{m-1}$, b^{m}; puis on prendra la dérivée ${}^{\prime n}\mathrm{D}^{0}$ de chacun de ces développemens, en y regardant chaque monome comme une origine particulière de dérivation, les quantités b, c, d, etc. comme indépendantes les unes des autres, et chacune d'elles comme un premier terme de polynome; on suivra pour cela les procédés du §. I.er de l'art. second. Donnons-en un exemple.

159. Supposons qu'on veuille calculer immédiatement le coëfficient de $x^{3}y^{3}$ de la série résultante du développement d'une fonction quelconque de polynome double. La formule précédente donne pour ce coëfficient

$${}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{6}.\varphi a) =$$

$$\mathrm{D}^{6}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.b^{6} + \mathrm{D}^{5}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}.b^{5}) + \mathrm{D}^{4}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{2}.b^{4}) + \mathrm{D}^{3}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{3}.b^{3})$$
$$+ \mathrm{D}^{2}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{4}.b^{2}) + \mathrm{D}\varphi a.{}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}.(\mathrm{D}^{5}.b).$$

Je développe les quantités b^{6}, $\mathrm{D}.b^{5}$, $\mathrm{D}^{2}.b^{4}$, $\mathrm{D}^{3}.b^{0}$, $\mathrm{D}^{4}.b^{2}$, $\mathrm{D}^{5}.b$, en déduisant ces développemens les uns des autres comme n.° 44; ou comme n.° 49, en commençant par $\mathrm{D}^{5}.b$; ensuite je prends la dérivée ${}^{\prime 3}\mathrm{D}^{0}$ de chaque terme dans chacun de ces développemens. $\mathrm{D}^{3}.b^{3}$, par exemple, étant $= 3b^{2}e + 3b_{2}cd + c^{3}$,

pour avoir ${}^{'3}\mathrm{D}^{0}.\mathrm{D}^{3}.b^{3}$, je fais la dérivation ${}^{'3}\mathrm{D}^{0}$ sur chaque terme, en regardant b, c, d et e comme des quantités indépendantes, ce qui donne, n.os 99 et 25,

$$ {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.\mathrm{D}^{3}.b^{3} = {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.(3b^{2}e) + {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.(3b2cd) + {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.c^{3} = $$

$$ \left. \begin{array}{l} 3b^{2}.{}^{'3}\mathrm{D}^{0}.e + {}^{'1}\mathrm{D}^{0}.3b^{2}.{}^{'2}\mathrm{D}^{0}.e + {}^{'2}\mathrm{D}^{0}.3b^{2}.{}^{'1}\mathrm{D}^{0}.e + {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.3b^{3}.e \\ + 6bc.{}^{'3}\mathrm{D}^{0}.d + {}^{'1}\mathrm{D}^{0}.(6bc).{}^{'2}\mathrm{D}^{0}.d + {}^{'2}\mathrm{D}^{0}.(6bc).{}^{'1}\mathrm{D}^{0}.d + {}^{'3}\mathrm{D}^{0}.(6bc).d \\ + \mathrm{D}c^{3}.{}^{'2}\mathrm{D}^{0}.c' + \mathrm{D}^{2}c^{3}.{}^{'1}\mathrm{D}^{0}.c'^{2} + \mathrm{D}^{3}c^{3}.c'^{3} \end{array} \right\} = $$

$$ \left\{ \begin{array}{l} 3b^{2}e''' + 6bb'e'' + 3b'^{2}e' + \mathrm{o} \\ + 6bcd''' + 6(bc' + b'c)d'' + 6(bc'' + b'c')d' + 6b'c''d \\ + \mathrm{o} + 3c2c'c'' + c'^{3}. \end{array} \right. $$

On prendra de la même manière les dérivées ${}^{'3}\mathrm{D}^{0}$ des autres quantités polynomiales, et l'on parviendra ainsi à former le coëfficient demandé.

(IV.)

160. Passons maintenant aux fonctions d'un polynome triple ou quadruple : ce que nous avons dit des fonctions d'un polynome double, comparé avec les formules et les règles données pour les fonctions d'un polynome simple, met déjà sur la voie de traiter les cas des polynomes triples et quadruples, et nous dispense d'entrer dans de trop longs détails.

PROBLÈME.

Développer une fonction quelconque de polynome triple,

$$ \varphi \left\{ \begin{array}{lllll} a + bx & + cx^{2} & + dx^{3}. & + \text{etc.} \\ + b'y & + c'xy & + d'x^{2}y & + \text{etc.} \\ + b''z & + c''y^{2} & + d''xy^{2} & + \text{etc.} \\ & + c'''xz & + d'''y^{3} & + \text{etc.} \\ & + c''''yz & + d''''x^{2}z & + \text{etc.} \\ & + c'''''z^{2} & + d'''''xyz & + \text{etc.} \\ & & + d''''''y^{2}z & + \text{etc.} \\ & \vdots & + d'''''''xz^{2} & + \text{etc.} \\ & & + d''''''''yz^{2} & + \text{etc.} \\ & & + d'''''''''z^{3} & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array} \right\}, $$

en une série triple, et calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

On

On observe dans le polynome que les accens précédés de la virgule se rapportent aux z, comme ceux avant la virgule ou sans virgule aux y; que b n'a jamais qu'un accent soit sans virgule soit avec virgule, c n'en a jamais que deux, d trois, e quatre, et ainsi de suite : ce qui sert à faire reconnoître les derniers coëfficiens du polynome.

161. *Solution.* En réfléchissant à ce qui a été dit au n.° 133, on verra facilement que le coëfficient du terme quelconque de la série affecté de $x^m y^n z^r$ sera représenté par l'expression $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^r.\varphi a$, qu'il s'agit de développer en b, b' et b''.

A cet effet, on développera d'abord $\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^r.\varphi a$, ce qui se fera en changeant dans la formule du n.° 136, $\mathrm{D}.$ en $\mathrm{D}'.$, $\mathrm{D}'.$ en $\mathrm{D}''.$, b en b', b' en b'', m en n et n en r; ensuite on affectera de $\mathfrak{D}^m$ chaque partie de terme du résultat; on développera de la manière pratiquée au n.° 135, et en ordonnant par rapport aux indices des D qui affecteront φa, on trouvera

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^r.\varphi a =$$

$$\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-1}.b'' + \mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2 + \mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-3}.b''^3$$
$$+ \mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathfrak{D}''^{r-1}.b'') + \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2)$$
$$+ \mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-1}.b'') + \mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^2\mathfrak{D}''^{r-1}.b'')$$
$$+ \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2)$$
$$+ \mathrm{DDD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\{b\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathfrak{D}''^{r-1}.b'')\}$$
$$+ \mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-1}.b'')$$

$$+ \mathfrak{D}^4\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-4}.b''^4 \quad + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-3}\mathfrak{D}^n\mathfrak{D}^r\varphi a.\mathfrak{D}^3.(b^{m-3}b'^n b''^r)$$
$$+ \mathrm{D}\mathrm{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathfrak{D}''^{r-3}.b''^3) \quad + \mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^r\varphi a.\mathfrak{D}^2.\{b^{m-2}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}b''^r)\}$$
$$+ \mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^2\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2) \quad + \mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^n\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.\mathfrak{D}^2.(b^{m-2}b'^n\mathrm{D}''.b''^{r-1})$$
$$+ \mathfrak{D}^3\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.(b'^3\mathfrak{D}''^{r-1}.b'') \quad + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-2}\mathfrak{D}^r\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathfrak{D}'^2.(b'^{n-2}b''^r)\}$$
$$+ \mathrm{D}\mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-3}.b''^3) \quad + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}\mathrm{D}''.b''^{r-1})\}$$
$$+ \mathrm{DD}\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\{b\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2)\} \quad + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^n\mathfrak{D}^{r-2}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{m-1}b'^n\mathfrak{D}''^2.b''^{r-2})$$
$$+ \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\{b\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^2\mathfrak{D}''^{r-1}.b'')\} \quad + \mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^{n-3}\mathfrak{D}^r\varphi a.b^m\mathfrak{D}'^3.(b'^{n-3}b''^r)$$
$$+ \mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-2}.b''^2) \quad + \mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^{n-2}\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.b^m\mathfrak{D}'^2.(b'^{n-2}\mathrm{D}''.b''^{r-1})$$
$$+ \mathfrak{D}^2\mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.\{b^2\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\mathrm{D}''^{r-1}.b'')\} \quad + \mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{r-2}\varphi a.b^m\mathrm{D}'.(b'^{n-1}\mathfrak{D}''^2.b''^{r-2})$$
$$+ \mathfrak{D}^3\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-3}.(b^3\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^{r-1}.b'') \quad + \text{etc.} + \mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^n\mathfrak{D}^{r-3}\varphi a.b^m b'^n\mathfrak{D}''^3.b''^{r-3}$$

$+\,\mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\,\mathfrak{D}^{2}.(b^{m-2}b'^{n}b''^{r}) \quad +\,\mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{m-1}b'^{n}b''^{r}) +\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\,b^{m}b'^{n}b''^{r}.$

$+\,\mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}b''^{r})\} +\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.b^{m}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}b''^{r})$

$+\,\mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{m-1}b'^{n}\mathrm{D}''.b''^{r-1}) \quad +\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.b^{m}b'^{n}\mathrm{D}''.b''^{r-1}$

$+\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-2}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\,b^{m}\mathfrak{D}'^{2}.(b'^{n-2}b''^{r})$

$+\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{r-1}\varphi a.b^{m}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}\mathrm{D}''.b''^{r-1})$

$+\,\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r-2}\varphi a.\,b^{m}b'^{n}\mathfrak{D}''^{2}.b''^{r-2}$

Dans cette expression, b, b', b'' doivent être considérés comme des premiers termes de polynome.

162. Voici la loi qui règne dans cette formule. Pour déduire un terme quelconque de cette formule du précédent, il suffit de faire varier a de b'' dans chaque partie du terme donné, et encore a de b' dans les parties où b'' n'est qu'à la première puissance; puis de faire varier a de b dans la seule dernière partie du terme, c'est-à-dire dans celle où b'' est à la première puissance et où b' n'entre pas : on prendra chaque fois la dérivée divisée suivante. Lorsque a varie de b'', les exposans de b'' augmentent, les indices de D'' diminuent de l'unité, et les b'' se mettent sous les signes D, D' et D'' : lorsque a varie de b', les exposans de b' augmentent et les indices de D' diminuent de l'unité, les b' se mettent sous les signes D et D' : et lorsque a varie de b, l'exposant de b augmente et l'indice de D diminue de l'unité; b ne se met que sous le signe D. On rejette les parties dans lesquelles l'indice de D, ou de D', ou de D'' deviendroit négatif. L'exposant de b ne peut pas devenir $> m$, ni celui de $b' > n$, ni celui de $b'' > r$. (Comparez avec le n.° 138.)

163. Si on veut lire la formule à rebours, en commençant par le terme $\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{D}^{r}\varphi a.\,b^{m}b'^{n}b''^{r}$ et remontant; on verra encore fort aisément la loi qui règne dans les termes successifs, et de quelle manière ils se déduisent les uns des autres. En effet, l'inspection de la formule fait voir que cette loi consiste à faire varier a de b dans chaque partie du terme donné; ensuite à faire varier de plus a de b' dans les parties où b a le plus haut exposant et n'est point affecté de D, c'est-à-dire dans les parties où se trouve b^{m}; et enfin de faire encore varier a de b'' dans la partie où b et b' ont les plus hauts exposans, sans D ni D', c'est-à-dire dans la partie où entre $b^{m}b'^{n}$. On prend chaque fois la dérivée divisée inverse correspondante. Dans ce cas, lorsque a varie

de b, les exposans de b diminuent et les indices de D augmentent chacun de l'unité; lorsque a varie de b', les exposans de b diminuent, les indices de D' augmentent de l'unité; et lorsque a varie de b'', l'exposant de b'' diminue, l'indice de D'' augmente de l'unité. Le signe D affecte b, D', b', D'' et b''; le signe D' affecte b, D'' et b'', et le signe D'' seulement b''. On rejette les parties où un exposant deviendroit négatif, et celles où l'exposant de b'' seroit zéro. (Comparez avec le n.° 139.)

164. On tire de cette dernière loi la règle suivante pour calculer isolément le développement réduit d'un coëfficient quelconque, en déduisant les termes les uns des autres.

RÈGLE.

Pour déduire d'un terme donné et réduit d'un coëfficient quelconque le terme suivant, en remontant dans la formule précédente:

1.° *Diminuez dans chaque partie du terme donné les exposans de b de l'unité; faites ensuite une dérivation divisée* D *sur toutes les quantités polynomiales, tant accentuées que non-accentuées.*

2.° *Dans les parties seules où la puissance de b est la plus haute (son exposant peut même être zéro) et n'a subi aucune dérivation* D, *diminuez de plus de l'unité les exposans de b', et faites une dérivation divisée* D' *sur toutes les quantités polynomiales accentuées, sans toucher à celles qui ne portent pas d'accent.*

3.° *Enfin dans la seule partie du terme donné où la puissance de b et celle de b' sont à la fois les plus grandes et n'ont pas subi de dérivation; diminuez encore de l'unité l'exposant de b'', et faites une dérivation divisée* D'', *mais sur les seules quantités affectées des accens ", précédés de la virgule, sans toucher aux autres quantités polynomiales sans accent ou avec les accens ' sans virgule.*

Chaque fois qu'on diminue un exposant de l'unité, on aura soin de rejeter les parties qui ne contiennent pas la lettre b ou b' ou b'' dont on diminue l'exposant; et on fera les changemens convenables sur les coëfficiens numériques, changemens qui s'opèrent toujours par le procédé indiqué au n.° 148.

Quand on fait une dérivation D, *les quantités sans accent doivent être considérées comme indépendantes de celles qui portent les accens ' et ", et celles qui portent les accens ' comme indépendantes de ces dernières avec.*

les accens $''$. *On regardera aussi comme indépendantes les quantités qui portent un nombre différent des mêmes accens : mais on regardera comme dépendantes les unes des autres, les quantités qui portent un même nombre des mêmes accens, ou celles qui sont sans accent. Quand on fait une dérivation* D', *laquelle ne s'opère que sur les seules quantités accentuées, on regardera comme dépendantes les unes des autres les seules quantités à accens simples* $'$ *où le nombre des accens change avec la lettre, comme* c, d', e'', f''', *etc.; les autres étant indépendantes. Enfin quand on fait une dérivation* D'' *sur les seules quantités affectées d'accens* $''$ *avec virgule, on regardera ces quantités comme dépendantes les unes des autres.*

L'exemple suivant va éclaircir ce que nous venons de dire.

165. On demande, par exemple, le coëfficient réduit de $x^2y^2z^2$, représenté par $\wp^2.\wp'^2.\wp''^2.\varphi a$. On forme d'abord le terme $\wp^2\wp^2\wp^2\varphi a.\, b^2b'^2b''^2$, duquel on déduit ensuite tous les autres par la règle, comme il suit :

$$\wp^2\wp^2\wp^2\varphi a.\, b^2b'^2b''^2$$

$$\begin{aligned}
&+\mathrm{D}\wp^2\wp^2\varphi a.\{b(b'^2\,2b''c'' + 2b'c'b''^2) + c.b'^2b''^2\}\\
&+\wp^2\mathrm{D}\wp^2\varphi a.\, b^2(b'\,2b''c''' + c''b''^2)\\
&+\wp^2\wp^2\mathrm{D}\varphi a.\, b^2b'^2c'''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\wp^2\wp^2\varphi a.\{b'^2(2b''d'' + c''^2) + 2b'c'\,2b''c'' + (2b'd' + c'^2)b''^2\}\\
&+\mathrm{DD}\wp^2\varphi a.\{b[b'(2b''d''' + 2c''c''') + c'\,2b''c''' + c''\,2b''c'' + d''b''^2] + c(b'\,2b''c''' + c''b''^2)\}\\
&+\mathrm{D}\wp^2\mathrm{D}\varphi a.\{b(b'^2d''' + 2b'c'c''') + c.b'^2c'''\}\\
&+\wp^2\wp^2\varphi a.\, b^2(2b''d'''' + c'''^2)\\
&+\wp^2\mathrm{DD}\varphi a.\, b^2(b'd'''' + c''c''')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\mathrm{D}\wp^2\varphi a.\left\{\begin{array}{l} b'(2b''e''' + 2c''d''' + 2d''c''') + c'(2b''d''' + 2c''c''') + d'\,2b''c''' \\ \qquad + c''(2b''d'' + c''^2) + d''\,2b'c'' + e''b''^2 \end{array}\right\}\\
&+\wp^2\mathrm{D}\varphi a.\{b'^2e''' + 2b'c'd''' + (2b'd' + c'^2)e'''\}\\
&+\mathrm{D}\wp^2\varphi a.\{b(2b''e'''' + 2c''d'''' + 2c'''d''') + c(2b''d'''' + c'''^2)\}\\
&+\mathrm{DDD}\varphi.\{b(b'e''' + c'd'''' + c''d''' + d''c''') + c(b'd'''' + c''c''')\}\\
&+\wp^2\mathrm{D}\varphi a.\, b^2e''''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\wp^2\varphi a.\{2b''f'''' + 2c''e'''' + 2d''d'''' + 2c'''e''' + d'''^2\}\\
&+\mathrm{DD}\varphi a.\{b'f'''' + c'e'''' + d'd'''' + c''e''' + d''d''' + e''c'''\}\\
&+\mathrm{DD}\varphi a.\{bf''''' + ce'''''\}
\end{aligned}$$

$$+\mathrm{D}\varphi a.\, g''''$$

166.

166. En suivant toujours la même voie que n.° 161, il ne sera pas difficile de trouver la formule générale en b, b', b'', b''', pour le coëfficient du terme quelconque, affecté de $x^m y^n z^r u^s$, dans le développement d'une fonction quelconque de polynome quadruple,

$$\varphi\left\{\begin{array}{llllllll} a & + & bx & + & cx^2 & + & \text{etc.} \\ & + & b'y & + & c'xy & + & \text{etc.} \\ & + & b''z & + & c''y^2 & + & \text{etc.} \\ & + & b'''u & + & c'''xz & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{IV}}yz & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{V}}z^2 & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{VI}}xu & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{VII}}yu & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{VIII}}zu & + & \text{etc.} \\ & & & + & c^{\text{IX}}u^2 & + & \text{etc.} \\ & & & & & + & \text{etc.} \end{array}\right\},$$

coëfficient qui est représenté par l'expression $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^r.\mathfrak{D}'''^s.\varphi a$. Nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'au besoin le lecteur formera facilement cette formule, guidé uniquement par le fil de l'analogie; et il en déduira la règle pour calculer le développement complet et réduit.

167. Retournons à la formule du n.° 161, et tirons-en la règle pour déduire par dérivation les uns des autres les coëfficiens des termes de la série affectés des mêmes puissances de y et de z et des puissances successives de x.

Si dans la formule citée on fait successivement $m = 0, 1, 2, 3$, etc., et que pour chacune de ces valeurs on fasse $n = 0, 1, 2, 3$, etc., et que pareillement pour chacune de ces valeurs de m et de n on fasse $r = 0, 1, 2, 3$, etc.; qu'on ait soin de rejeter tous les termes où les indices et les exposans deviennent négatifs, ainsi que ceux qui disparoissent d'eux-mêmes, parce qu'un de leurs facteurs devient zéro; on tirera de la formule générale toutes les formules particulières pour les coëfficiens des termes de la série du développement. On peut encore se servir pour former ces formules particulières des lois des n.os 162 et 163. On aura, de l'une ou de l'autre manière, pour les coëfficiens de y^2z^2, xy^2z^2, $x^2y^2z^2$, par exemple, ceux qui suivent :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\varphi a.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b'' \\
&\left|\begin{aligned}&+\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2}\\ &+\mathrm{DD}\varphi a.\,\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b'')\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2})\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,b'^{2}\mathrm{D}''.\,b''\end{aligned}\right. \\
&+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b'^{2}b''^{2}
\end{aligned}\quad\Bigg|\; y^{2}z^{2}$$

$$\begin{aligned}
&+\mathrm{D}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b'' \\
&\left|\begin{aligned}&+\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2}\\ &+\mathrm{DD}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b'')\\ &+\mathrm{DD}\varphi a.\,b\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b''\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2})\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b'^{2}\mathrm{D}''.\,b'')\\ &+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2}\\ &+\mathrm{DDD}\varphi a.\,b\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b'')\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b'^{2}b''^{2})\\ &+\mathrm{DD}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2})\\ &+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,bb'^{2}\mathrm{D}''.\,b''\end{aligned}\right. \\
&+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,bb'^{2}b''^{2}
\end{aligned}\quad\Bigg|\; xy^{2}z^{2}$$

$$\begin{aligned}
&+\mathrm{D}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b'' \\
&\left|\begin{aligned}&+\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2}\\ &+\mathrm{DD}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b'')\\ &+\mathrm{DD}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b'')\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2})\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,(b'^{2}\mathrm{D}''.\,b'')\\ &+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2})\\ &+\mathrm{DDD}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b''))\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,b^{2}\text{Ḑ}'^{2}.\,\mathrm{D}''.\,b''\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\text{Ḑ}^{2}.\,(b'^{2}b''^{2})\\ &+\mathrm{DD}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(b\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2}))\\ &+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(bb'^{2}\mathrm{D}''.\,b'')\\ &+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b^{2}\text{Ḑ}'^{2}.\,b''^{2}\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{DD}\varphi a.\,b^{2}\mathrm{D}'.\,(b'\mathrm{D}''.\,b'')\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}&+\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,\mathrm{D}.\,(bb'^{2}b''^{2})\\ &+\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b^{2}\mathrm{D}'.\,(b'b''^{2})\\ &+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\mathrm{D}\varphi a.\,b^{2}b'^{2}\mathrm{D}''.\,b''\end{aligned}\right. \\
&+\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\text{Ḑ}^{2}\varphi a.\,b^{2}b'^{2}b''^{2}
\end{aligned}\quad\Bigg|\; x^{2}y^{2}z^{2}.$$

168. Ces termes suffisent pour faire connoître la loi de dérivation ; car on voit que pour déduire d'un coëfficient donné celui du terme de la série où x est élevé à une puissance plus haute de l'unité, il faut 1.°, prendre la dérivée divisée D de toutes les quantités polynomiales de chaque partie de terme ; 2.°, que dans les parties de chaque terme où b a le plus haut exposant (cet exposant peut même être zéro) et n'est pas affecté de D, il faut de plus changer un b' en b, et faire une dérivation divisée D' sur les b' et b'' seulement ; 3.°, qu'il faut encore, dans la partie de chaque terme où b et b' ont les plus hauts exposans et ne sont pas affectés de D ou de D', changer un b'' en b, et faire une dérivation divisée D'' sur les b'' seulement ; 4.° enfin, que dans le dernier terme du coëfficient donné il faut faire encore une dérivation divisée sur φa en faisant varier a de b.

Lorsqu'on fait les dérivations D, les indices des D qui affectent φa demeurent les mêmes que dans le terme donné; mais lorsqu'on change un b' en b ou un b'' en b, ces indices changent aussi, de manière qu'ils soient toujours égaux aux exposans respectifs de b, b', b''.

169. De cette loi découle la règle suivante pour les développemens réduits des coëfficiens.

RÈGLE.

Étant donné le développement réduit de $D^m.D'^n.D''^r.\varphi a$, *coëfficient de* $x^m y^n z^r$, *pour en déduire le développement réduit de* $D^{m+1}.D'^n.D''^r.\varphi a$, *coëfficient de* $x^{m+1}y^n z^r$; 1.° *dans chaque partie de terme du coëfficient donné faites une dérivation divisée* D *sur toutes les quantités polynomiales, accentuées et non accentuées ;* 2.° *dans les parties de chaque terme du coëfficient donné où b a le plus haut exposant et n'a pas subi de dérivation, diminuez l'exposant de b' de l'unité dans tous les produits qui contiennent b', en rejetant ceux où b' n'entre pas, multipliez par b, faites les changemens convenables sur les coëfficiens numériques ; et faites ensuite une dérivation divisée* D' *sur toutes les quantités accentuées ;* 3.° *dans la partie de chaque terme du coëfficient donné où b et b' ont les plus hauts exposans et n'ont pas subi de dérivation, diminuez encore de l'unité chaque exposant de b'', en rejetant les produits où b'' n'entre pas, multipliez par b, et faites une dérivation divisée* D'' *sur les seules quantités qui portent l'accent* '' ; 4.° *enfin, dans le dernier terme du coëfficient donné faites encore une dérivation divisée* D *en faisant varier a de b dans* φa.

Quant aux indices des D *devant* φa, *observez ce qui a été dit n.°* 168 ; *et quant aux quantités que dans les dérivations il faut considérer comme dépendantes ou indépendantes les unes des autres, observez ce qui a été prescrit dans la règle du n.°* 164.

Au moyen de cette règle on pourra trouver tous les termes du développement réduit de la fonction ; car on peut trouver par la règle du n.° 142 ou par celle du n.° 148 tous les termes affectés des différentes puissances de y et de z sans x, et on en déduira ensuite par la règle actuelle tous ceux affectés en outre des puissances successives de x.

170. On peut aussi déduire les coëfficiens les uns des autres en cherchant ceux des termes de la série où les exposans de y vont en augmentant, les

exposans de x et de z demeurant les mêmes; ou bien en cherchant les coëfficiens des termes de la série où les exposans de z vont en augmentant, ceux de x et de y demeurant les mêmes. Pour cela, au lieu de développer la formule $\mathfrak{p}^m . \mathfrak{p}'^n . \mathfrak{p}''^r . \varphi a$, on développera celles-ci $\mathfrak{p}'^n \mathfrak{p}^m . \mathfrak{p}''^r . \varphi a$, ou $\mathfrak{p}''^r . \mathfrak{p}^m . \mathfrak{p}'^n \varphi a$, qui ne diffèrent de la première que par l'ordre dans lequel se font les dérivations; et l'on déduira de ces développemens en b, b' et b'', les règles convenables.

171. Si l'on compare la règle du n.° 169 avec celle du n.° 148, il sera facile de l'étendre au cas des fonctions d'un polynome quadruple, n.° 166, pour déduire du développement réduit de $\mathfrak{p}^m . \mathfrak{p}'^n . \mathfrak{p}''^r . \mathfrak{p}'''^s . \varphi a$ celui de $\mathfrak{p}^{m+1} . \mathfrak{p}'^n . \mathfrak{p}''^r . \mathfrak{p}'''^s . \varphi \alpha$, et l'analogie suffira pour l'étendre encore aux fonctions d'un polynome quintuple, etc.

(V.)

172. La seconde méthode dont nous avons fait usage n.° 151 et suiv. pour résoudre le problème proposé au n.° 131 sur les polynomes doubles, s'applique naturellement au développement des fonctions des polynomes triples, au moyen de la considération suivante.

Si l'on compare entre eux le polynome double n.° 131 et le polynome triple n.° 160, et qu'on fasse pour un instant $x = 1$ et $y = 1$, le polynome double devenant

$$\begin{array}{lllll} a + b & + c & + d & + \text{etc.} \\ \quad + b' & + c' & + d' & + \text{etc.} \\ & + c'' & + d'' & + \text{etc.} \\ & & + d''' & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.}; \end{array} \qquad \ldots\ldots(a)$$

on voit que, pour en déduire le polynome triple, il suffit de changer

$$\begin{array}{l} b \text{ en } b + b''z, \\ b' \text{ demeurant invariable;} \\ c \text{ en } c + c''z + c'''z^2, \\ c' \text{ en } c' + c'''z, \\ c'' \text{ demeurant invariable;} \\ d \text{ en } d + d''z + d'''z^2 + d''''z^3, \\ d' \text{ en } d' + d'''z + d''''z^2, \\ d'' \text{ en } d'' + d''''z, \\ d''' \text{ demeurant invariable,} \end{array} \qquad \ldots\ldots(b)$$

et

et ainsi de suite par rapport à e, e', e'', e''', e^{V}, etc.; où l'on observe, comme n.° 160, que le nombre total des accens, tant avant qu'après la virgule, ne peut jamais surpasser le quantième de la lettre dans l'ordre alphabétique moins un.

De là il s'ensuit que si on a le coëfficient $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a$ de $x^m y^n$, tout développé et réduit, pour en déduire successivement les coëfficiens suivans de $x^{m-1}y^n z$, $x^{m-2}y^n z^2$, $x^{m-3}y^n z^3$, etc., il suffit de considérer dans le coëfficient donné chaque produit comme une origine particulière de dérivation; de regarder les lettres b, b', c, c', c'', d, d', d'', d''', e, e' etc. comme indépendantes les unes des autres, et chacune comme un premier terme de polynome; de substituer à la place de ces lettres leurs valeurs précédentes (b), et de développer les expressions résultant de ces substitutions suivant les puissances de z, par les règles du §. I.er, article second, modifiées comme au n.° 156. Les coëfficiens de z, z^2, z^3, etc. qu'on trouvera ainsi, seront ceux de $x^{m-1}y^n z$, $x^{m-2}y^n z^2$, $x^{m-3}y^n z^3$, etc. respectivement, c'est-à-dire, les développemens réduits de $\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\mathrm{D}''.\varphi a$, $\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^2.\varphi a$, $\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{D}''^3.\varphi a$, etc.

173. Pour éclaircir ce procédé par un exemple, supposons qu'on veuille avoir les coëfficiens développés et réduits de x^2y^2z, xy^2z^2, y^2z^3. On prendra dans la série du n.° 157 le coëfficient de x^3y^2; d'où l'on déduira successivement les coëfficiens demandés, ainsi qu'il suit:

Le coëfficient de x^2y^2z sera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\varphi a.f''''\\
&+\mathfrak{D}^2\varphi a.(2be'''' + 2b''e''| + 2b'e''' | + 2cd'''' + 2c''d''| + 2c'd''' + 2c'''d' | + 2c''d'')\\
&+\mathfrak{D}^3\varphi a.\left\{\begin{array}{l}3b^2d'''' + 6bb''d''| + 6bb'd''' + 6b'b''d'| + 3b'^2d''| +\\ \qquad 3b2c''c'' + 3b''2cc''| + 3b2c'c''' + 3b''c'^2| + 3b'(2cc''' + 2c''c')\end{array}\right\}\\
&+\mathfrak{D}^4\varphi a.(12b^2b''c''| + 12b^2b'c''' + 24bb'b''c'| + 12bb'^2c'' + 12b'^2b''c)\\
&+\mathfrak{D}^5\varphi a.30b^2b'^2b''.
\end{aligned}$$

Le coëfficient de xy^2z^2, déduit du précédent, sera

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\varphi a.f'''''\\
&+\mathfrak{D}^2\varphi a.(2be''''' + 2b''e''''| + 2b'e''''| + 2c''d'''' + 2c'''d''| + 2c'd'''' + 2c'''d'''| + 2c''d''')\\
&+\mathfrak{D}^3\varphi a.\left\{\begin{array}{l}6bb''d'''' + 3b''^2d''| + 6bb'd'''' + 6b'b''d'''| + 3b'^2d'''| +\\ \qquad 3b2c''c''' + 3b''2c'''c''| + 3bc'''^2 + 3b''2c'c'''| + 3b'(2c''c''' + 2c'''c')\end{array}\right\}\\
&+\mathfrak{D}^4\varphi a.(12bb''^2c''| + 24bb'b''c''' + 12b'b''^2c'| + 12bb'^2c''' + 12b'^2b''c'')\\
&+\mathfrak{D}^5\varphi a.30bb'^2b''^2.
\end{aligned}$$

Le coëfficient de y^2z^3, déduit du précédent, sera

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}\varphi a.f''''' \\
&+\mathfrak{D}^2\varphi a.(2b''e'''' \mid + 2b'e''''' \mid + 2c'''d'''' \mid + 2c''d'''' \mid + 2c''d''''') \\
&+\mathfrak{D}^3\varphi a.(3b''^2d'''' \mid + 6b'b''d'''' \mid + 3b'^2d''''' \mid 3b''2c'''c'' \mid + 3b''c'''^2 \mid + 3b'^2c'''c'') \\
&+\mathfrak{D}^4\varphi a.(4b''^3c'' \mid + 12b'b''^2c''' \mid + 12b'^2b''c''') \\
&+\mathfrak{D}^5\varphi a.10b'^2b''^3.
\end{aligned}
$$

Puisqu'on sait calculer tous les coëfficiens des termes sans z par le procédé du n.° 156, et que par le procédé actuel on peut en déduire tous les termes affectés des puissances successives de z; il est clair qu'en réunissant ces procédés on peut développer entièrement une fonction de polynome triple, ou pousser ce développement aussi loin qu'on voudra, s'il est de nature à ne pas se terminer.

§. II.

Des fonctions de deux ou de plusieurs polynomes doubles ou triples.

174. Les problèmes dont nous allons nous occuper sont des plus compliqués, à cause de la multitude des quantités qu'ils entraînent; leurs solutions cependant deviennent très-faciles par ce qui précède : elles résultent naturellement de la combinaison des règles et des formules de cet article et des articles précédens. Aussi me contenterai-je presque toujours dans ce paragraphe de présenter les formules générales, sans m'appesantir sur les règles de dérivation qui en découlent, et qu'on en tirera sans peine en suivant toujours la même marche que dans le paragraphe précédent.

(I.)

PROBLÈME.

175. Développer le produit de deux polynomes doubles,

$$
\left\{\begin{array}{r}
a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.} \\
+b'y+c'xy+d'x^2y+\text{etc.} \\
+c''y^2+d''xy^2+\text{etc.} \\
+d'''y^3+\text{etc.} \\
+\text{etc.}
\end{array}\right\}
\times
\left\{\begin{array}{r}
\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.} \\
+\beta' y+\gamma' xy+\delta' x^2y+\text{etc.} \\
+\gamma'' y^2+\delta'' xy^2+\text{etc.} \\
+\delta''' y^3+\text{etc.} \\
+\text{etc.}
\end{array}\right\},
$$

en une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de x et de y, et calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

176. Le coëfficient du terme quelconque de la série affecté de $x^m y^n$ peut se représenter par $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha)$, a et α étant indépendans l'un de l'autre; c'est ce dont il est facile de s'assurer en réfléchissant à ce qui a été dit au n.° 132 : il ne s'agit plus que de développer l'expression précédente; or, si on développe d'abord $\mathfrak{D}'^n.(a\alpha)$ par le théorème du n.° 87, et qu'ensuite on affecte tout de $\mathfrak{D}^m$, on aura

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha) = \mathfrak{D}^m.\{\mathfrak{D}'^n.(a\alpha)\} =$$

$$\mathfrak{D}^m.\left\{\begin{array}{l} a\mathfrak{D}'^n.\alpha + \mathfrak{D}'.a.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha + \mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha + \mathfrak{D}'^3.a.\mathfrak{D}'^{n-3}.\alpha + \text{etc.} \\ \quad + \mathfrak{D}'^{n-3}a.\mathfrak{D}'^3.\alpha + \mathfrak{D}'^{n-2}.a.\mathfrak{D}'^2.\alpha + \mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathrm{D}'.\alpha + \mathfrak{D}'^n.a\times\alpha \end{array}\right\}.$$

A présent, tous les termes étant affectés de $\mathfrak{D}^m$, on en développera chacun en particulier par rapport à $\mathfrak{D}^m$ par le même théorème du n.° 87, et l'on aura

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha) =$$

$$\begin{array}{l}
a\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha + \mathrm{D}.a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\alpha + \mathfrak{D}^2.a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^m.a.\mathfrak{D}'^n.\alpha \\
+ \mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha + \mathrm{D}.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha + \mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^m.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha \\
+ \mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha + \mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha + \mathfrak{D}^2.\mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha \\
+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \\
+ \mathfrak{D}'^{n-2}a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^2.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-2}a.\mathfrak{D}^2.\mathfrak{D}'^2.\alpha + \mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.\alpha + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}a.\mathfrak{D}'^2.\alpha \\
+ \mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathfrak{D}^m.\mathrm{D}'.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.\alpha + \mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\alpha + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathrm{D}'.\alpha \\
+ \mathfrak{D}'^n.a.\mathfrak{D}^m.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.a.\mathfrak{D}^2.\alpha + \mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.a.\mathrm{D}.\alpha + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.a.\alpha.
\end{array}$$

La loi est facile à saisir dans cette formule sous forme de rectangle : mais on peut encore mettre la formule sous la forme rhomboïdale, en ordonnant par rapport aux dimensions des D et $\mathfrak{D}'$ qui affectent a, ou de ceux qui affectent α. La voici sous une de ces dernières formes.

THÉORÈME.

177. Le coëfficient du terme quelconque affecté de $x^m y^n$ dans la série résultant du développement du produit de deux polynomes doubles, indépendans l'un de l'autre, peut s'exprimer par cette formule :

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha) =$$

$$\begin{array}{llll}
a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha & + \mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha & + \mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha & + \mathfrak{D}'^3.a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.\alpha \\
 & + \mathrm{D}.a\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\alpha & + \mathrm{D}.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}\alpha & + \mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha \\
 & & + \mathfrak{D}^2.a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\alpha & + \mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha \\
 & & & + \mathfrak{D}^3.a.\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^n.\alpha \\
+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots + \text{etc.}
\end{array}$$

$$+\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^{n}.a.\mathfrak{D}^{3}.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n}.a.\mathfrak{D}^{2}.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}.a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n}.a.\mathrm{D}.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-3}.a.\mathfrak{D}'^{3}.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-2}.a.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-1}.a.\mathrm{D}'.\alpha \quad +\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.a.\alpha.$$

La loi qu'il faut suivre pour déduire les termes de cette formule les uns des autres, soit qu'on lise la formule telle qu'elle se trouve ici, soit qu'on la lise à rebours, se présente d'elle-même, et il est inutile de l'énoncer.

178. Si dans la formule précédente, sous forme de rectangle (n.° 176), on fait $m=0, 1, 2, 3, 4$, etc. successivement, et pour chacune de ces valeurs $n=0, 1, 2, 3, 4$, etc., et qu'on ait soin de rejeter les termes où les indices de D ou de D′ seroient négatifs, on aura les coëfficiens des termes successifs du développement du produit proposé. La formule donne de cette manière pour les coëfficiens de x^2y^2, x^3y^2, x^2y^3,

$$\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.(a\alpha)=$$
$$a\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.a.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha$$
$$+\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathfrak{D}^{2}.\alpha+\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathrm{D}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\alpha,$$

$$\mathfrak{D}^{3}.\mathfrak{D}'^{2}.(a\alpha)=$$
$$a\mathfrak{D}^{3}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathrm{D}.a.\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathfrak{D}^{3}.a.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha$$
$$+\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{3}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathfrak{D}^{3}.\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}'.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathfrak{D}^{3}.\alpha+\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathfrak{D}^{2}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}a.\mathrm{D}.\alpha+\mathfrak{D}^{3}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\alpha,$$

$$\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{3}.(a\alpha)=$$
$$a\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{3}.\alpha+\mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{3}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.a.\mathfrak{D}'^{3}.\alpha$$
$$+\mathrm{D}'a.\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathrm{D}.\mathrm{D}'.a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.a.\mathfrak{D}'^{2}\alpha$$
$$+\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathfrak{D}^{2}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.a.\mathrm{D}'.\alpha$$
$$+\mathfrak{D}'^{3}.a.\mathfrak{D}^{2}.\alpha+\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^{3}.a.\mathrm{D}.\alpha+\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{3}.a.\alpha.$$

Si l'on examine de quelle manière les termes de $\mathfrak{D}^{3}.\mathfrak{D}'^{2}.(a\alpha)$, et ensuite ceux de $\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{3}.(a\alpha)$, se forment d'après les termes de $\mathfrak{D}^{2}.\mathfrak{D}'^{2}.(a\alpha)$, on en conclura facilement la règle suivante.

RÈGLE.

Le développement de $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.(a\alpha)$ étant donné, pour en déduire celui de $\mathfrak{D}^{m+1}.\mathfrak{D}'^{n}.(a\alpha)$, prenez dans chaque terme la dérivée divisée suivante D *de* α *seul et de ses dérivées, et dans les termes seuls où se trouvent les plus hautes dérivées* D *de* a*, savoir celles de l'ordre* m*, prenez encore la dérivée divisée suivante* D *de* a*, et cela dans chacun de ces termes.*

Le développement de $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.(a\alpha)$ étant donné, pour en déduire celui de $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n+1}.(a\alpha)$, prenez dans chaque terme la dérivée divisée suivante D′ *de* α *seul et de ses dérivées, et dans les seuls termes où se trouvent les dérivées*

D′

D' *de a de l'ordre n, prenez encore la dérivée divisée suivante* D' *de a, et cela dans chacun de ces termes.*

On formera facilement la règle lorsque les formules sont écrites sous la forme rhomboïdale comme au n.° précédent.

179. Si l'on a le produit plus simple

$$(a + bx + cx^2 + dz^3 + \text{etc.}) \times (\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.})$$

à développer; on voit que dans ce cas $\mathfrak{D}'^n.\alpha = \mathfrak{D}^n.\alpha$ sans accent, puisque les coëfficiens de y n'en portent pas, et que toutes les dérivées D' de a, aussi bien que toutes les dérivées D de α, sont zéro : ainsi le coëfficient de $x^m y^n$ se réduit dans ce cas au seul monome $\mathfrak{D}^m.a.\,\mathfrak{D}^n.\alpha$.

180. Si l'on avoit à développer le produit de trois polynomes doubles, indépendans,

$$\left\{\begin{array}{r} \mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2\ +\text{etc.} \\ +\mathfrak{b}'y+\mathfrak{c}'xy+\text{etc.} \\ +\mathfrak{c}''y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{r} a+bx+cx^2\ +\text{etc.} \\ +b'y+c'xy+\text{etc.} \\ +c''y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta x+\gamma x^2\ +\text{etc.} \\ +\beta'y+\gamma'xy+\text{etc.} \\ +\gamma''y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\},$$

on suivroit la même voie que n.° 176, et l'on auroit pour le coëfficient du terme affecté de $x^m y^n$ dans le développement,

$$\mathfrak{D}^m.\,\mathfrak{D}'^n.(\mathfrak{a}a\alpha) =$$

$$\mathfrak{D}^m.\{\mathfrak{a}a.\,\mathfrak{D}'^n.\alpha + D'.(\mathfrak{a}a).\,\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha + \mathfrak{D}'^2.(\mathfrak{a}a).\,\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha + \text{etc.} + \mathfrak{D}'^n.(\mathfrak{a}a)\times\alpha\},$$

formule qu'il est facile de développer ultérieurement.

181. Enfin, la seconde méthode dont nous avons fait usage n.° 151 et suiv. donne encore facilement la solution du problème du n.° 175. En effet, si l'on veut avoir le coëfficient du terme affecté de $x^m y^n$, on calculera le coëfficient $\mathfrak{D}^{m+n}.(a\alpha)$ de x^{m+n}, comme si les polynomes proposés ne renfermoient point de y; puis on en déduira le coëfficient de $x^m y^n$, qui est indiqué ici par ${}^{\prime n}\mathfrak{D}^0.\,\mathfrak{D}^{m+n}.(a\alpha)$.

Veut-on, par exemple, le coëfficient de $x^3 y^2$? on développera $\mathfrak{D}^5.(a\alpha)$; ce qui donne

$$a\zeta + b\varepsilon + c\delta + d\gamma + e\beta + f\alpha.$$

A présent on affecte chaque terme de ${}^{\prime 2}\mathfrak{D}^{0}$, et, en développant de nouveau, on trouve pour le coëfficient de x^3y^2,

$$a\zeta''|+b\varepsilon''+b'\varepsilon'|+c\delta''+c'\delta'+c''\delta|+d\gamma''+d'\gamma'+d''\gamma|+e'\zeta'+e''\zeta|+f''\alpha.$$

Cette méthode s'applique aussi au cas du n.° précédent, etc.

PROBLÈME.

182. Étant proposé le produit de deux fonctions quelconques de polynome double,

$$\varphi\left\{\begin{matrix} a+bx+cx^2+\text{etc.} \\ +b'y+c'xy+\text{etc.} \\ +c''y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\}\times\psi\left\{\begin{matrix} \alpha+\zeta x+\gamma x^2+\text{etc.} \\ +\zeta'y+\gamma'xy+\text{etc.} \\ +\gamma''y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\},$$

le développer en une série double, et calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

---

183. Comme ce problème est important par les conséquences qu'on en peut tirer, nous allons en présenter différentes solutions.

Première solution. Il suffit de mettre, dans la solution du problème précédent, φa au lieu de a, et $\psi\alpha$ au lieu de α; on aura ainsi, pour le coëfficient de x^my^n dans la série,

$$A_{m,n}=\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\varphi a.\psi\alpha)=$$

$$\begin{aligned}
&\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\psi\alpha \quad +\mathrm{D}.\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\psi\alpha \quad +\mathfrak{D}^2.\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\psi\alpha \quad +\mathfrak{D}^3\varphi a.\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^n.\psi\alpha \\
&\qquad +\mathrm{D}'.\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\psi\alpha \quad +\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\psi\alpha \quad +\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\psi\alpha \\
&\qquad\qquad +\mathfrak{D}'^2.\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\psi\alpha \quad +\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}.\psi\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad +\mathfrak{D}'^3.\varphi a.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.\psi\alpha \\
&+\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\text{etc.} \\
&+\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^n.\varphi a.\mathfrak{D}^3.\psi\alpha \\
&+\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\varphi\alpha.\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}'.\psi\alpha+\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\varphi a.\mathfrak{D}^2.\psi\alpha \\
&+\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-2}.\varphi a.\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.\psi\alpha+\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n-1}.\varphi a.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\psi\alpha+\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\varphi a.\mathrm{D}.\psi\alpha \\
&+\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.\varphi\alpha.\mathfrak{D}'^3.\psi\alpha \quad +\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}^{n-2}.\varphi a.\mathfrak{D}'^2.\psi\alpha \quad +\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\varphi a.\mathrm{D}'.\psi\alpha+\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\varphi a.\psi\alpha.
\end{aligned}$$

On développera chaque partie de terme en particulier suivant les règles du paragraphe précédent. La loi suivant laquelle les termes de cette formule dérivent les uns des autres est facile à saisir; ainsi il est inutile de nous y arrêter.

184. *Seconde solution.* Si l'on développe $\mathfrak{D}'^{n}.(\varphi a.\psi\alpha)$ au moyen de la formule générale du n.° 100, on aura

$$\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.(\varphi a.\psi\alpha) =$$

$$\mathfrak{D}^{m}.\left\{\begin{array}{l}\varphi a.\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^{2}.\psi\alpha) + \text{etc.} \\ + \mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.\mathfrak{D}'^{2}.(b'^{n-2}.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^{n}\varphi a.b'^{n}.\psi\alpha.\end{array}\right\};$$

et si à présent on développe de la même manière chacun de ces termes affectés de $\mathfrak{D}^{m}$, on trouve

$$\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.(\varphi a.\psi\alpha) =$$

$$\begin{array}{l}
\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^{2}\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m}\varphi a.b^{m}\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha \\
+ \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'.\psi\alpha) + \mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\{b\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'\psi\alpha)\} + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m}\mathrm{D}\varphi a.b^{m}\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'.\psi\alpha) \\
+ \mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^{2}.\psi\alpha) + \mathrm{D}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.\{b\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^{2}.\psi\alpha)\} + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{2}\varphi a.b^{m}\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^{2}.\psi\alpha) \\
+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \\
+ \mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{2}.(b'^{n-2}.\psi\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathfrak{D}'^{2}.(b'^{n-2}.\psi\alpha)\} + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.b^{m}\mathfrak{D}'^{2}.(b^{n-2}.\psi\alpha) \\
+ \mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\psi\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\psi\alpha)\} + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.b^{m}\mathrm{D}'.(b^{n-1}.\psi\alpha) \\
+ \mathfrak{D}^{n}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.(b'^{n}.\psi\alpha) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{m-1}.b'^{n}.\psi\alpha) + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\varphi a.b^{m}.b'^{n}.\psi\alpha,
\end{array}$$

formule sous la forme rectangulaire, à laquelle on peut donner la forme rhomboïdale suivante, en ordonnant par rapport au nombre des indices des D qui affectent φa:

$$\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.(\varphi a.\psi\alpha) =$$

$$\begin{array}{llll}
\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha & + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'.\psi\alpha) & + \mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'^{2}.\psi\alpha) & \\
& + \mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha) & + \mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-1}.(b'.\psi\alpha)) & + \text{etc.} \\
& & + \mathfrak{D}^{2}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^{2}\mathfrak{D}'^{n}.\psi\alpha) & \\
\multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.}} \\
\multicolumn{4}{l}{+ \mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^{n}\varphi a.\mathfrak{D}^{2}.(b^{m-2}.b'^{n}.\psi\alpha)} \\
\multicolumn{2}{l}{+ \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.\mathrm{D}.\{b^{m-1}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\psi\alpha)\}} & \multicolumn{2}{l}{+ \mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n}\varphi a.\mathrm{D}.(b^{m-1}.b'^{n}.\psi\alpha)} \\
\multicolumn{2}{l}{+ \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-2}\varphi a.b^{m}\mathfrak{D}'^{2}.(b'^{n-2}.\psi\alpha)} & + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n-1}\varphi a.b^{m}\mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\psi\alpha) & + \mathfrak{D}^{m}\mathfrak{D}^{n}\varphi a.b^{m}.b'^{n}.\psi\alpha.
\end{array}$$

La loi suivant laquelle les termes se forment les uns des autres est facile à saisir, et les développemens ultérieurs n'offrent pas de difficulté.

185. *Troisième solution.* Si dans les polynomes proposés n.° 175 on fait

$$\begin{array}{ll} a + bx + cx^2 + \text{etc.} = p, & b' + c'x + d'x^2 + \text{etc.} = q \\ c'' + d''x + e''x^2 + \text{etc.} = r, & d''' + e'''x + \text{etc.} = s,\ \text{etc.}; \\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} = \pi, & \beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \text{etc.} = \varpi, \\ \gamma'' + \delta'' x + \varepsilon'' x^2 + \text{etc.} = \rho, & \delta''' + \varepsilon''' x + \text{etc.} = \sigma,\ \text{etc.}; \end{array}$$

le produit des fonctions proposées prendra cette forme,

$$\varphi(p + qy + ry^2 + \text{etc.}) \times \psi(\pi + \varpi y + \rho y^2 + \text{etc.}),$$

ce qui ramène le cas actuel à celui du n.° 97, et l'on a, par la formule III du n.° 102, pour le coëfficient du terme affecté de y^n,

$$\begin{array}{llll} \varphi p.\mathrm{D}\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-1}.\varpi & + \varphi p.\dot{\mathrm{D}}^2\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-2}.\varpi^2 & + \varphi p.\dot{\mathrm{D}}^3\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-3}.\varpi^3 & \\ + \mathrm{D}\varphi p.\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-1}.q & + \mathrm{D}\varphi p.\mathrm{D}\psi\pi\,\dot{\mathrm{D}}'^{n-2}.(q\varpi) & + \mathrm{D}\varphi p.\dot{\mathrm{D}}^2\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-3}.(q\varpi^2) & \\ & + \dot{\mathrm{D}}^2\varphi p.\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-2}.q^2 & + \dot{\mathrm{D}}^2\varphi p.\mathrm{D}\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-3}.(q^2\varpi) & \\ & & + \dot{\mathrm{D}}^3\varphi p.\psi\pi.\dot{\mathrm{D}}'^{n-3}.q^3 & \\ & & & + \varphi p.\dot{\mathrm{D}}^n\psi\pi.\varpi^n \\ & & & + \mathrm{D}\varphi p.\dot{\mathrm{D}}^{n-1}\psi\pi.q\varpi^{n-1} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots & + \text{etc.} & & + \dot{\mathrm{D}}^2\varphi p.\dot{\mathrm{D}}^{n-2}\psi\pi.q^2\varpi^{n-2} \\ & & & + \text{etc.} \ldots\ldots \\ & & & + \dot{\mathrm{D}}^n\varphi p.\psi\pi.q^n. \end{array}$$

Maintenant, pour avoir le coëfficient de $x^m y^n$, il suffit de mettre dans cette formule, au lieu de p, q, π et ϖ leurs valeurs précédentes en x, et de calculer pour chaque partie de la formule le coëfficient de x^m, par le procédé du n.° 100; puis d'ordonner par rapport aux sommes des indices des D sans point qui affectent φa et $\psi\alpha$, en regardant comme premier terme la réunion des parties où les indices de D sont $= 1$, comme second terme, la réunion des parties où les indices sont $= 2$ ou forment une somme égale à 2, et ainsi de suite.

186. Avec un peu d'attention, on pourra écrire sur-le-champ la formule qu'on cherche, en partant de la formule précédente; car on verra que chaque partie de terme de cette dernière donnera des parties pour chaque terme successivement dans la formule demandée, et l'on aura ainsi :

$\dot{\mathrm{D}}^m$.

$$\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\varphi a.\psi\alpha) =$$

$$\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta'$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.b'$$

$$+\varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\zeta'^2$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'\zeta')$$
$$+\mathfrak{D}^2\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2$$
$$+\varphi a.\mathrm{DD}\varphi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(\zeta\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta')$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta')$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(\zeta\mathfrak{D}'^{n-1}.b')$$
$$+\mathrm{DD}\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-1}.b')$$

$+$ etc. . . . .

$$+\varphi a.\mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^n\psi\alpha.\zeta^m\zeta'^n$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^n\psi\alpha.b\zeta^{m-1}\zeta'^n$$
$$+\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^n\psi\alpha.b^2\zeta^{m-2}\zeta'^n$$

$+$ etc. . . . .

$$+\mathfrak{D}^m\varphi a.\mathfrak{D}^n\psi\alpha.b^m\zeta'^n$$

$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^{n-1}\psi\alpha.\zeta^m b'\zeta'^{n-1}$$
$$+\mathrm{DD}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}\mathfrak{D}^{n-1}\psi\alpha.b\zeta^{m-1}b'\zeta'^{n-1}$$
$$+\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}\mathfrak{D}^{n-1}\psi\alpha.b^2\zeta^{m-2}b'\zeta'^{n-1}$$

$+$ etc. . . . .

$$+\mathfrak{D}^m\mathfrak{D}\varphi a.\mathfrak{D}^{n-1}\psi\alpha.b^m b'\zeta'^{n-1}$$

$+$ etc. . . . .

$$+\mathfrak{D}^n\varphi a.\mathfrak{D}^m\psi\alpha.\zeta^m b'^n$$
$$+\mathrm{D}\mathfrak{D}^n\varphi a.\mathfrak{D}^{m-1}\psi\alpha.b\zeta^{m-1}b'^n$$
$$+\mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^n\varphi a.\mathfrak{D}^{m-2}\psi\alpha.b^2\zeta^{m-2}b'^n$$

$+$ etc. . . . .

$$+\mathfrak{D}^m\mathfrak{D}^n\varphi a.\psi\alpha.b^m b'^n.$$

$$+\varphi a.\mathfrak{D}^3\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.\zeta'^3$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.(b'\zeta'^2)$$
$$+\mathfrak{D}^2\varphi a,\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.(b'^2\zeta')$$
$$+\mathfrak{D}^3\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.b'^3$$
$$+\varphi a.\mathrm{D}\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(\zeta\mathfrak{D}'^{n-2}.\zeta'^2)$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-2}.\zeta'^2)$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{DD}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(\zeta\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'\zeta'))$$
$$+\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-2}.(b'\zeta'))$$
$$+\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(\zeta\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2)$$
$$+\mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-1}.(b\mathfrak{D}'^{n-2}.b'^2)$$

$$+\varphi a.\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(\zeta^2\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta')$$
$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{DD}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(b\zeta\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta')$$
$$+\mathfrak{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-1}.\zeta')$$

$$+\mathrm{D}\varphi a.\mathfrak{D}^2\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(\zeta^2\mathfrak{D}'^{n-1}.b')$$
$$+\mathrm{DD}\varphi a.\mathrm{D}\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(b\zeta\mathfrak{D}'^{n-1}.b')$$
$$+\mathfrak{D}^2\mathrm{D}\varphi a.\psi\alpha.\mathfrak{D}^{m-2}.(b^2\mathfrak{D}'^{n-1}.b')$$

. . . . $+$ etc.

La loi qui règne dans cette formule s'apperçoit sans beaucoup de peine, et l'on peut en déduire une règle pour former le développement réduit. Cependant, pour mieux saisir cette loi, on peut prendre pour m et n différentes petites valeurs, comme 2 et 2, 2 et 3, afin d'avoir facilement tous les termes

du coëfficient entier : ce moyen serviroit encore à vérifier la formule, si cela étoit nécessaire, en comparant ces résultats particuliers avec ceux que donneroient les deux solutions précédentes.

187. Ajoutons ici un seul exemple, lequel, quoiqu'il n'offre qu'un des cas des plus simples du problème précédent, conduit cependant à la solution générale de la question suivante : Étant donnée la fraction génératrice d'une série récurrente double, d'un ordre quelconque, trouver un terme quelconque de cette série indépendamment des autres ; matière qui est de la plus grande importance dans la théorie des probabilités.

EXEMPLE.

Étant donnée la fraction suivante, où le numérateur et le dénominateur sont des polynomes doubles quelconques,

$$\frac{\begin{array}{rrrrr} a + bx & + cx^2 & + dx^3 & + \text{etc.} \\ + b'y & + c'xy & + d'x^2y & + \text{etc.} \\ & + c''y^2 & + d''xy^2 & + \text{etc.} \\ & & + d'''y^3 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array}}{\begin{array}{rrrrr} \alpha + \beta x & + \gamma x^2 & + \delta x^3 & + \text{etc.} \\ + \beta' y & + \gamma' xy & + \delta' x^2y & + \text{etc.} \\ & + \gamma'' y^2 & + \delta'' xy^2 & + \text{etc.} \\ & & + \delta''' y^3 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array}},$$

la développer en une série double, et calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

Il suffira de faire dans les solutions précédentes $\phi a = a$, et $\psi \alpha = \alpha^{-1}$. Ainsi la première solution, n.° 183, donnera pour le terme général affecté de $x^m y^n$, en écrivant la formule à rebours, ce qui est plus avantageux,

$$\mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^n . (a . \alpha^{-1}) =$$

$$\begin{array}{l} a_{m,n} . \alpha^{-1} + a_{m-1,n} . \mathrm{D} . \alpha^{-1} + a_{m-2,n} . \mathfrak{D}^2 . \alpha^{-1} \\ \qquad + a_{m,n-1} . \mathrm{D}' . \alpha^{-1} + a_{m-1,n-1} . \mathrm{D} . \mathrm{D}' . \alpha^{-1} + \text{etc.} \; . \; . \; . \; . \\ \qquad\qquad + a_{m,n-2} . \mathfrak{D}'^2 . \alpha^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + c . \mathfrak{D}^{m-2} . \mathfrak{D}'^n . \alpha^{-1} & & \\ + c' . \mathfrak{D}^{m-1} . \mathfrak{D}'^{n-1} . \alpha^{-1} & + b . \mathfrak{D}^{m-1} . \mathfrak{D}'^n . \alpha^{-1} & \\ + c'' . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-2} . \alpha^{-1} & + b' . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-1} . \alpha^{-1} & + a . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^n . \alpha^{-1} . \end{array}$$

188. Si l'on veut ordonner le développement par rapport aux puissances négatives de α, la seconde solution, n.° 184, donnera, en faisant $\varphi a = \alpha^{-1}$, et $\psi\alpha = a$,

$$\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . (\alpha^{-1} . a) =$$

$$\alpha^{-1} . a_{m,n} - \alpha^{-2} . \mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^{n-1} . (\beta' a) + \alpha^{-3} . \mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^{n-2} . (\beta'^2 . a)$$

$$- \alpha^{-2} . \mathrm{D}^{m-1} . (\beta \mathrm{D}'^n . a) + 2\alpha^{-3} . \mathrm{D}^{m-1} . (\beta \mathrm{D}'^{n-1} . (\beta' a)) + \text{etc.} \ldots$$

$$+ \alpha^{-3} . \mathrm{D}^{m-2} . (\beta^2 \mathrm{D}'^n . a)$$

$$\pm \frac{1.2 \ldots (m+n-1)}{1.2 \ldots (m-1) \times 1.2 \ldots n} \alpha^{-m-n} . \mathrm{D} . (\beta^{m-1} . \beta'^n . a)$$

$$\pm \frac{1.2 \ldots (m+n-1)}{1.2 \ldots m \times 1.2 \ldots (n-1)} \alpha^{-m-n} . \beta^m \mathrm{D}' . (\beta'^{n-1} . a) \mp \frac{1.2 \ldots (m+n)}{1.2 \ldots m \times 1.2 \ldots n} \alpha^{-m-n-1} . \beta^m \beta'^n a.$$

Le développement ultérieur n'a plus de difficulté.

On peut aussi faire $\varphi a = a$, $\psi\alpha = \alpha^{-1}$, dans la formule du n.° 186, et l'on aura ainsi trois formules pour l'expression du coëfficient d'un terme quelconque de la série cherchée.

189. Enfin, la seconde méthode des n.os 151 et suivans donne facilement le développement réduit de la série qu'on demande dans le problème précédent. En effet on n'a qu'à calculer le coëfficient réduit de x^n par une des formules du n.° 102 : puis, en y appliquant la méthode, on en déduira très-facilement les coëfficiens de $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$, $x^{n-3}y^3$, etc. Nous nous contenterons de donner par ce moyen le développement réduit des premiers termes de la série de l'exemple précédent. Le voici :

$$\alpha^{-1} . a + (\alpha^{-1} . b - \alpha^{-2} . \beta a) x + \{\alpha^{-1} . c - \alpha^{-2} (\beta b + \gamma a) + \alpha^{-3} . \beta^2 a\} x^2$$

$$+ (\alpha^{-1} . b' - \alpha^{-2} . \beta' a) y + \{\alpha^{-1} . c' - \alpha^{-2} (\beta b' + \beta' b | + \gamma' a) + \alpha^{-3} . 2\beta\beta' a\} xy$$

$$+ \{\alpha^{-1} . c'' - \alpha^{-2} (\beta' b' | + \gamma'' a) + \alpha^{-3} . \beta'^2 a\} y^2$$

$$+ \{\alpha^{-1} . d - \alpha^{-2} (\beta c + \gamma b + \delta a) + \alpha^{-3} (\beta^2 b + 2\beta\gamma a) - \alpha^{-4} . \beta^3 a\} x^3$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \alpha^{-1} . d' - \alpha^{-2} (\beta c' + \beta' c | + \gamma b' + \gamma' b | + \delta' a) + \alpha^{-3} [\beta^2 b' + 2\beta\beta' b | + (2\beta\gamma' + 2\beta'\gamma) a] \\ - \alpha^{-4} . 3\beta^2 \beta' a \end{matrix} \right\} x^2 y$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \alpha^{-1} . d'' - \alpha^{-2} (\beta c'' + \beta' c' | + \gamma' b' + \gamma'' b | + \delta'' a) + \alpha^{-3} [2' \quad b' + \beta'^2 b | + (2\beta' \gamma') a] \\ - \alpha^{-4} . 3\beta\beta'^2 a \end{matrix} \right\} xy^2$$

$$+ \{\alpha^{-1} . d''' - \alpha^{-2} (\beta' c'' | + \gamma'' b' | + \delta''' a) + \alpha^{-3} (\beta'^2 b' | + 2\beta' \gamma'' a) - \alpha^{-4} . \beta'^3 a\} y^3$$

et ainsi de suite.

Les termes affectés de x, x^2, x^3, etc. se déduisent d'abord les uns des autres

et forment les termes supérieurs des colonnes; ensuite, dans chaque colonne, on tire du terme supérieur tous les autres termes de la colonne en descendant, par exemple du terme affecté de x^3, ceux affectés de x^2y, xy^2, y^3.

(II.)

190. Dans les formules précédentes les polynomes différens entrent chacun sous une fonction particulière, et les a et α dans les développemens en b, β demeurent séparés l'un de l'autre, chacun sous son signe de fonction, ce qui est cause qu'on peut varier les solutions et présenter les formules générales sous différentes formes : passons à présent à des cas plus étendus, où les polynomes entrent d'une manière quelconque dans la même fonction et où la séparation des a et des α n'a plus lieu généralement.

Problème.

Développer la fonction de deux polynomes simples, l'un ordonné par rapport à x, l'autre par rapport à y,

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}\,,\; \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.}), \qquad \ldots(1)$$

en une série double, et trouver le terme général de cette série.

---

191. La considération suivante, qui sert dans plusieurs cas analogues, donne sur-le-champ la solution de la question.

Supposons d'abord qu'au lieu de la fonction proposée on ait seulement à développer, suivant les puissances de y, la fonction

$$\varphi(a, \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.}), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

a étant constant; je la développe par la formule du n.° 21, et je trouve, pour la série ordonnée suivant y,

$$\varphi(a,\alpha) + \mathrm{D}^{,1}\varphi(a,\alpha).\beta.y + \left.\begin{array}{l}\mathrm{D}^{,1}\varphi(a,\alpha).\mathrm{D}.\beta \\ +\,\mathrm{D}^{,2}\varphi(a,\alpha).\beta^2\end{array}\right| y^2 + \left.\begin{array}{l}\mathrm{D}^{,1}\varphi(a,\alpha).\mathrm{D}^2.\beta \\ +\,\mathrm{D}^{,2}\varphi(a,\alpha).\mathrm{D}.\beta^2. \\ +\,\mathrm{D}^{,3}\varphi(a,\alpha).\beta^3\end{array}\right| y^3 + \text{etc.}, \quad \ldots(3)$$

où les virgules qui affectent les D sans point, placés avant les φ, ont la signification que nous leur avons donnée au n.° 111.

A présent on n'a qu'à remettre $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc. à la place de a dans la série (3), et, en faisant varier a, développer chaque terme de cette série suivant les puissances de x, par le même n.° 21, et l'on aura, en écrivant A au lieu de $\varphi(a,\alpha)$,

φ

$$\phi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}\,,\ \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.}) = \quad \ldots\ldots (4)$$

$$A + \mathrm{D}^{1,}A.b.x + (\mathrm{D}^{1,}A.\mathrm{D}.b + \mathfrak{D}^{2,}A.b^2)x^2 + (\mathrm{D}^{1,}A.\mathfrak{D}^2.b + \mathfrak{D}^{2,}A.\mathrm{D}.b^2 + \mathfrak{D}^{3,}A.b^3x^3 + \text{etc.}$$
$$+ \mathrm{D}^{,1}A.\beta.y \qquad + \mathfrak{D}^{1,1}A.\beta b.xy \qquad + (\mathfrak{D}^{1,1}A.\beta\mathrm{D}.b + \mathfrak{D}^{2,1}A.\beta b^2)x^2y + \text{etc.}$$
$$+ (\mathrm{D}^{,1}A.\mathrm{D}.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\beta^2)y^2 \qquad + (\mathfrak{D}^{1,1}A.b\mathrm{D}.\beta + \mathfrak{D}^{1,2}A.\beta^2 b)xy^2 + \text{etc.}$$
$$+ (\mathrm{D}^{,1}A.\mathfrak{D}^2.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathrm{D}.\beta^2 + \mathfrak{D}^{,3}A.\beta^3)y^3 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

192. Quant à l'expression du terme général affecté de $x^m y^n$, on y parvient de la même manière : en effet on a, pour le coëfficient de y^n dans la série (3),

$$\mathrm{D}^{,1}A.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^2 + \mathfrak{D}^{,3}A.\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{,n}A.\beta^n \quad \ldots\ldots (5)$$

A présent on fera varier a seul dans A ; et, en prenant la dérivée divisée $\mathfrak{D}^m$ de chaque terme, on aura, pour le coëfficient de $x^m y^n$,

$$(\mathfrak{D}^{1,1}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b + \mathfrak{D}^{2,1}A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2 + \mathfrak{D}^{3,1}A.\mathfrak{D}^{m-3}.b^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m,1}A.b^m).\mathfrak{D}^{n-1}.\beta$$
$$+ (\mathfrak{D}^{1,2}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b + \mathfrak{D}^{2,2}A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2 + \mathfrak{D}^{3,2}A.\mathfrak{D}^{m-3}.b^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m,2}A.b^m).\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^2$$
$$+ (\mathfrak{D}^{1,3}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b + \mathfrak{D}^{2,3}A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2 + \mathfrak{D}^{3,3}A.\mathfrak{D}^{m-3}.b^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m,3}A.b^m).\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^3 \quad \ldots (6)$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.}$$
$$+ (\mathfrak{D}^{1,n}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b + \mathfrak{D}^{2,n}.A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2 + \mathfrak{D}^{3,n}A.\mathfrak{D}^{m-3}.b^3 + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m,n}A.b^m).\beta^n.$$

Il est inutile de remarquer que dans cette expression $\mathfrak{D}^{3,2}$, par exemple, est la même chose que $\mathfrak{D}^{3,}\mathfrak{D}^{,2}$, conformément à ce qui a été dit au n.° 111.

On peut mettre cette expression sous la forme suivante, si on le juge à propos,

$$\mathfrak{D}^{1,1}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta + \mathfrak{D}^{2,1}A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta + \mathfrak{D}^{3,1}A.\mathfrak{D}^{m-3}.b^3.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,2}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b.\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^2 + \mathfrak{D}^{2,2}A.\mathfrak{D}^{m-2}.b^2.\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^2$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,3}A.\mathfrak{D}^{m-1}.b.\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^3$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \quad \ldots (7)$$
$$+ \mathfrak{D}^{m,n-2}A.b^m\mathfrak{D}^2.\beta^{n-2}$$
$$+ \mathfrak{D}^{m-1,n-1}A.\mathrm{D}.b^{m-1}.\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \mathfrak{D}^{m,n-1}A.b^m\mathrm{D}.\beta^{n-1}$$
$$+ \mathfrak{D}^{m-2,n}A.\mathfrak{D}^2.b^{m-2}.\beta^n + \mathfrak{D}^{m-1,n}A.\mathrm{D}.b^{m-1}.\beta^n + \mathfrak{D}^{m,n}A.b^m\beta^n.$$

Si on avoit à trouver le coëfficient du terme général affecté de $x^m y^n z^r$ dans la série triple qui résulte du développement d'une fonction quelconque de trois séries simples ordonnées, l'une suivant x, l'autre suivant y, et la troisième suivant z ; alors on auroit $A = \phi(a, a, \alpha)$: mettant cette valeur dans la formule (7), et raisonnant ensuite et opérant sur cette formule comme nous l'avons fait sur la formule (5), en faisant ici varier a, on obtiendroit l'expression du coëfficient cherché.

Problème.

193. On propose de développer en une série double une fonction quelconque de deux polynomes doubles indépendans, savoir :

$$\varphi\left[\left\{\begin{array}{llll} a & + bx & + cx^2 & + \text{etc.} \\ & + b'y & + c'xy & + \text{etc.} \\ & & + c''y^2 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array}\right\},\left\{\begin{array}{llll} \alpha & + \text{Є}x & + \gamma x^2 & + \text{etc.} \\ & + \text{Є}'y & + \gamma' xy & + \text{etc.} \\ & & + \gamma''y^2 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array}\right\}\right]$$

et de calculer un terme quelconque de cette série indépendamment des autres.

Ce problème est d'une très-grande étendue ; nous suivrons pour le résoudre une analyse pareille à celle de la troisième solution des n.ºs 185 et 186.

194. Donnons à p, q, etc. π, ϖ, etc. les mêmes valeurs en x que n.° 185 ; la fonction proposée prendra cette forme,

$$\varphi(p + qy + ry^2 + \text{etc.},\ \pi + \varpi y + \varrho y^2 + \text{etc.}),$$

et la formule du n.° 115 donnera pour le coëfficient du terme quelconque affecté de y^n l'expression suivante, dans laquelle les virgules qui affectent D ont la signification que nous leur avons assignée au n.° 111,

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{D}^{,1}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-1}.\varpi & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{,2}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-2}.\varpi^2 & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{,3}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-3}.\varpi^3 & \\
+ \mathrm{D}^{1,}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-1}.q & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{1,1}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-2}.(q\varpi) & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{1,2}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-3}.(q\varpi^2) & \\
 & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{2,}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-2}.q^2 & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{2,1}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-3}.(q^2\varpi) & \\
 & & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{3,}\varphi(p,\pi).\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{\prime n-3}.q^3 & \\
 & & & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{,n}\varphi(p,\pi).\varpi^n \\
 & & & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{1,n-1}\varphi(p,\pi).q\varpi^{n-1} \\
+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots & + \text{etc.} & & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{2,n-2}\varphi(p,\pi).q^2\varpi^{n-2} \\
 & & & + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \\
 & & & + \underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{n,}\varphi(p,\pi).q^n.
\end{array}$$

Maintenant, pour avoir le coëfficient de $x^m y^n$, il suffit, comme n.ºs 185 et 186, de mettre dans la formule précédente, au lieu de p, q, π, ϖ, leurs valeurs en x, n.° 185, et de calculer pour chaque partie de la formule ci-dessus le coëfficient de x^m, par le procédé du n.° 100 ; puis, d'ordonner par rapport aux sommes des indices des D sans points qui affecteront $\varphi(a,\alpha)$.

195. On voit, comme n.° 186, qu'en calculant ainsi le coëfficient de x^m, chaque partie de terme de la formule précédente donnera non-seulement une partie dans le terme correspondant de la formule qu'on cherche, mais encore des parties dans les termes suivans. D'après cela, on pourra écrire sur-le-champ, et sans peine, les termes de la formule suivante où nous mettrons A au lieu de $\varphi(a,\alpha)$, pour simplifier :

$$\mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^n . \varphi(a,\alpha) =$$

$$\mathrm{D}^{,1}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-1} . \beta'$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-1} . b'$$

$$+ \mathfrak{D}^{,2}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-2} . \beta'^2$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-2} . (b'\beta')$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-2} . b'^2$$

$$+ \mathrm{D}^{,1}\mathrm{D}^{,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (\beta\mathfrak{D}'^{n-1} . \beta')$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (b\mathfrak{D}'^{n-1} . \beta')$$

$$+ \mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (\beta\mathfrak{D}'^{n-1} . b')$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathrm{D}^{1,}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (b\mathfrak{D}'^{n-1} . b')$$

$$+ \mathfrak{D}^{,3}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-3} . \beta'^3$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,2}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-3} . (b'\beta'^2)$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,1}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-3} . (b'^2\beta')$$
$$+ \mathfrak{D}^{3,}A . \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^{n-3} . b'^3$$

$$+ \mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{,2}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (\beta\mathfrak{D}'^{n-2} . \beta'^2)$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,2}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (b\mathfrak{D}'^{n-2} . \beta'^2)$$
$$+ \mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (\beta\mathfrak{D}'^{n-2} . (b'\beta'))$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (b\mathfrak{D}'^{n-2} . (b'\beta'))$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,1}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (\beta\mathfrak{D}'^{n-2} . b'^2)$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{2,}A . \mathfrak{D}^{m-1} . (b\mathfrak{D}'^{n-2} . b'^2)$$

$$+ \mathfrak{D}^{,2}\mathrm{D}^{,1}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (\beta^2\mathfrak{D}'^{n-1} . \beta')$$
$$+ \mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (b\beta\mathfrak{D}'^{n-1} . \beta')$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,1}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (b^2\mathfrak{D}'^{n-1} . \beta')$$

$$+ \mathfrak{D}^{1,2}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (\beta^2\mathfrak{D}'^{n-1} . b')$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{1,1}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (b\beta\mathfrak{D}'^{n-1} . b')$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}\mathrm{D}^{1,}A . \mathfrak{D}^{m-2} . (b^2\mathfrak{D}'^{n-1} . b')$$

+ etc. . . . . + etc.

$$+ \mathfrak{D}^{,m}\mathfrak{D}^{,n}A . \beta^m\beta'^n$$
$$+ \mathfrak{D}^{1,m-1}\mathfrak{D}^{,n}A . b\beta^{m-1}\beta'^n$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,m-2}\mathfrak{D}^{,n}A . b^2\beta^{m-2}\beta'^n$$

+ etc. . . . .

$$+ \mathfrak{D}^{m,n}A . b^m\beta'^n$$

$$+ \mathfrak{D}^{1,m}\mathfrak{D}^{,n-1}A . \beta^m b'\beta'^{n-1}$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{1,m-1}\mathfrak{D}^{,n-1}A . b\beta^{m-1}b'\beta'^{n-1}$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}\mathfrak{D}^{1,m-2}\mathfrak{D}^{,n-1}A . b^2\beta^{m-2}b'\beta'^{n-1}$$

+ etc. . . . .

$$+ \mathfrak{D}^{m,}\mathfrak{D}^{1,n-1}A . b^m b'\beta'^{n-1}$$

+ etc. . . . .

$$+ \mathfrak{D}^{n,m}A . \beta^m b'^n$$
$$+ \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{n,m-1}A . b\beta^{m-1}b'^n$$
$$+ \mathfrak{D}^{2,}\mathfrak{D}^{n,m-2}A . b^2\beta^{m-2}b'^n$$

+ etc. . . . .

$$+ \mathfrak{D}^{m,}\mathfrak{D}^{n,}A . b^m b'^n.$$

Nous aurions présenté un plus grand nombre de termes de cette formule, si l'espace l'avoit permis; mais ceux que nous donnons paroissent suffisans pour en faire saisir la loi, laquelle, au reste, est analogue à celle de la formule du n.° 186.

Remarquons seulement, à l'égard des virgules qui se trouvent parmi les indices des $\mathfrak{D}$ sans point qui affectent A ou $\varphi(a,\alpha)$, que ces virgules ont encore ici la même signification que n.° 111, et que $\mathfrak{D}^{m,n}\varphi(a,\alpha)$ est la même chose que $\mathfrak{D}^{m}\cdot\mathfrak{D}^{\cdot n}\varphi(a,\alpha)$. Il ne faut pas confondre ces virgules avec celles placées entre les accens; nous avons distingué ces dernières des autres en les plaçant plus haut.

196. Pour faire voir la manière de se servir de la formule précédente dans des cas particuliers, nous allons l'appliquer à un exemple facile à vérifier.

Exemple.

On demande le résultat que l'on doit obtenir en substituant dans l'équation générale du second degré,

$$\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}xy + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}x + \mathfrak{e}y + \mathfrak{f} = 0,$$

au lieu de x et de y, les quantités

$$\begin{aligned} x = a &+ bt + ct^2, & y = \alpha &+ \beta t + \gamma t^2 \\ &+ b'v + c'tv & &+ \beta'v + \gamma'tv \\ &\quad\; + c''v^2 & &\quad\; + \gamma''v^2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (1)$$

Il est évident que l'équation résultante sera de la forme

$$\begin{aligned} A + Bt + Ct^2 &+ Dt^3 + Et^4 \\ + B'v + C'tv &+ D't^2v + E't^3v \\ C''v^2 &+ D''tv^2 + E''t^2v^2 \\ &D'''v^3 + E'''tv^3 \\ &\qquad E^{\text{IV}}v^4, \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (2)$$

et qu'on aura

$$A = \varphi(a,\alpha) = \mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}a\alpha + \mathfrak{c}\alpha^2 + \mathfrak{d}a + \mathfrak{e}\alpha + \mathfrak{f},$$

où les lettres allemandes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ indiquent des quantités constantes; la formule précédente du n.° 195 donne tous les coëfficiens de (2), si l'on met successivement pour m et n les nombres convenables. Veut-on, par exemple, le

le coëfficient D'' de tv^2 ? on fera $m = 1$, $n = 2$, et la formule donnera, en rejetant les termes où les indices de D deviennent négatifs,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}.\mathfrak{D}'^2.\phi(a,\alpha) = {} & \mathrm{D}^{,1}A.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\beta' + \mathfrak{D}^{,2}A.\mathrm{D}.\beta'^2 \quad + \mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{,2}A.\beta\beta'^2 \\
& + \mathrm{D}^{1,}A.\mathrm{D}.\mathrm{D}'.b' + \mathfrak{D}^{1,1}A.\mathrm{D}.(b'\beta') + \mathfrak{D}^{1,2}A.b\beta'^2 \\
& \qquad + \mathfrak{D}^{2,}A.\mathrm{D}.b'^2 \quad + \mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{1,1}A.\beta b'\beta' \\
& \qquad + \mathrm{D}^{,1}\mathrm{D}^{,1}A.\beta\mathrm{D}'.\beta' + \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{1,1}A.bb'\beta' \qquad \ldots.(3) \\
& \qquad + \mathfrak{D}^{1,1}A.b\mathrm{D}'.\beta' \quad + \mathfrak{D}^{2,1}A.\beta b'^2 \\
& \qquad + \mathfrak{D}^{1,1}A.\beta\mathrm{D}'.b' \quad + \mathrm{D}^{1,}\mathfrak{D}^{2,}A.bb'^2. \\
& \qquad + \mathrm{D}^{1,}\mathrm{D}^{1,}A.b\mathrm{D}'.b'
\end{aligned}$$

Or, dans notre cas particulier, les polynomes doubles (1) ne sont que des trinomes doubles, ce qui fait que $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\beta' = 0$, $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.b' = 0$; ensuite on a

$\mathrm{D}^{,1}A = \mathfrak{b}a + 2\mathfrak{c}\alpha + \mathfrak{e}$, $\mathrm{D}^{1,}A = 2\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}\alpha + \mathfrak{d}$; partant

$\mathfrak{D}^{,2}A = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{D}^{1,1}A = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{D}^{2,}A = \mathfrak{a}$, $\mathrm{D}^{,1}\mathrm{D}^{,1}A = 2\mathfrak{c}$, $\mathrm{D}^{1,}\mathrm{D}^{1,}A = 2\mathfrak{a}$;

les autres quantités $\mathrm{D}^{,1}\mathfrak{D}^{,2}A$, $\mathfrak{D}^{1,2}A$, etc. devenant toutes $= 0$: ainsi des trois colonnes de la formule (3) il ne reste dans notre cas que la seconde; et, en développant les quantités polynomiales, on trouve pour le coëfficient de tv^2,

$$D'' = \mathfrak{c}.2\beta'\gamma' + \mathfrak{b}(b'\gamma' + c'\beta') + \mathfrak{a}.2b'c' + 2\mathfrak{c}.\beta\gamma'' + \mathfrak{b}.b\gamma'' + \mathfrak{b}.\beta c'' + 2\mathfrak{a}.bc''.$$

Ces sortes d'applications sont utiles dans la permutation des coordonnées, et par conséquent dans la recherche des propriétés des lignes et des surfaces courbes, car on sait que les équations transformées par la permutation des coordonnées présentent comme des tableaux sur lesquels on peut lire les affections des lignes et des surfaces. Il suffit d'indiquer cet usage.

197. La seconde méthode du n.° 151 et suivans s'applique aussi au problème précédent : elle donne avec facilité les coëfficiens réduits des différens termes du développement, en descendant par colonnes.

198. Quant aux fonctions de trois polynomes doubles indépendans, le coëfficient du terme général de leur développement est représenté par $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\phi(a,a,\alpha)$. Pour en avoir le développement en $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, b, b', β, β', on formera d'abord celui de $\mathfrak{D}'^n.(a, a, \alpha)$ par ce qui a été dit au n.° 119 : puis on déduira de ce dernier le développement de l'expression précédente par un procédé analogue à celui dont nous nous sommes servis pour déduire le développement de $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\phi(a,\alpha)$ de celui de $\mathfrak{D}'^n.\phi(a,\alpha)$.

On peut suivre la même marche pour les fonctions de quatre polynomes doubles, et ainsi de suite.

D'un autre côté, si l'on a une fonction quelconque de deux polynomes triples, le coëfficient du terme général affecté de $x^m y^n z^r$ s'exprime par $\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\mathfrak{p}''^r.\varphi(a,\alpha)$: pour avoir le développement en b, b', b'', β, β', β'' de cette expression, on remarquera que la formule du n.° 195 donne celui de $\mathfrak{p}'^n.\mathfrak{p}''^r.\varphi(a,\alpha)$, et de là on déduira ensuite celui de $\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\mathfrak{p}''^r.\varphi(a,\alpha)$ d'une manière semblable à celle dont on a déduit $\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\varphi(a,\alpha)$ de $\mathfrak{p}'^n.\varphi(a,\alpha)$ aux n.os 194 et 195. On voit ce qu'il y auroit à faire pour les fonctions de polynomes quadruples, etc.

199. Ce seroit ici le lieu où il conviendroit d'étendre nos méthodes relatives aux polynomes doubles et triples à des cas analogues à quelques-uns de ceux concernant les polynomes simples que nous avons traités dans le §. IV de l'article premier; mais la nécessité de ne pas passer les bornes convenables nous interdit ces détails.

Pour ne citer qu'un seul exemple, nous ferons remarquer la question suivante, qui est à l'égard des polynomes doubles ce que l'exemple du n.° 62 est pour les polynomes simples; savoir : Étant donnée une fonction quelconque de polynome double, ou une série double quelconque en x et y, trouver le développement, ordonné suivant les puissances et les produits de t et v, qui résulte de la substitution à la place de x et de y des valeurs suivantes

$$x = t\left\{\begin{matrix} \beta + \gamma t + \delta t^2 + \text{etc.} \\ + \gamma' v + \delta' tv + \text{etc.} \\ + \delta'' v^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}^r, \quad y = v\left\{\begin{matrix} \mathfrak{b} + \mathfrak{c} t + \mathfrak{d} t^2 + \text{etc.} \\ + \mathfrak{c}' v + \mathfrak{d}' tv + \text{etc.} \\ + \mathfrak{d}'' v^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right\}^{r'}.$$

Observons qu'en généralisant la remarque du n.° 63, on en tirera un moyen qui peut aider à simplifier la solution de ce problème.

200. Nous terminons ici les trois premiers articles, qu'on peut regarder comme la première partie de cet écrit. L'objet principal que nous avons eu en vue se réduit à ce problème général :

« Une fonction quelconque d'un ou de plusieurs polynomes simples, dou-
» bles, triples, etc. étant donnée, écrire sur-le-champ la série du dévelop-
» pement de cette fonction, et même écrire sur-le-champ le développement
» d'un terme quelconque de cette série indépendamment des autres termes. »

Quand nous disons écrire sur-le-champ, nous sous-entendons que l'on connoisse d'avance les dérivées successives $D\phi a$, $D^2\phi a$, $D^3\phi a$, etc. où a varie de 1 : autrement il faudroit commencer par les calculer.

Nous osons croire que les Géomètres trouveront nos méthodes nouvelles, faciles et analytiques.

Il ne nous paroît point que l'on se soit occupé avant nous de la solution des cas compliqués concernant les fonctions quelconques de plusieurs polynomes simples et les fonctions des polynomes doubles, triples, etc.

Les applications se présentent en foule : elles embrassent les principales branches de la théorie des suites, et apportent des simplifications dans beaucoup de recherches, dans la pratique du calcul différentiel, par exemple.

Offrons quelques-unes de ces applications, car il est temps, pour tempérer l'aridité de nos règles, d'en donner quelques usages remarquables dans des matières intéressantes.

ARTICLE QUATRIÈME.

Applications du calcul des dérivations aux séries récurrentes, tant simples que doubles ou triples, etc., d'un ordre quelconque.

201. La matière que nous allons traiter a mérité l'attention des plus grands Géomètres à cause de son utilité dans plusieurs recherches, principalement dans la théorie des probabilités. Elle offre un des cas des moins compliqués auxquels on puisse appliquer le calcul des dérivations.

Moivre est le premier qui ait considéré les séries récurrentes simples, dans sa *Doctrine of chances* et dans ses *Miscellanea analytica :* il a enseigné à trouver la somme ou la fraction génératrice de ces séries, et à en trouver le terme général en décomposant en facteurs binomes le dénominateur de la fraction génératrice égalé à zéro : cette matière a été traitée ensuite par Euler dans l'*Introduction à l'analyse des infinis.*

Lagrange s'est occupé à plusieurs reprises des séries récurrentes simples; d'abord dans le tome I.er des *Mélanges de Turin* il a rappelé la recherche du terme général de ces séries à l'intégration des équations linéaires aux différences (finies), et il a étendu cette intégration aux cas où l'équation de relation a un dernier terme, fonction de la variable : le cas particulier où ce dernier terme est constant a aussi occupé Vincent Riccati, qui a donné sur ce sujet un mémoire imprimé dans le tome V des *Mémoires présentés* à l'Académie des sciences de Paris.

Lagrange, depuis, a simplifié considérablement toute cette théorie, au commencement de ses belles *Recherches sur les séries récurrentes, etc.* imprimées dans le recueil de l'Académie de Berlin pour 1775. Dans les mémoires de Paris pour 1772, 1.re partie, ce grand Géomètre a résolu d'autres problèmes nouveaux sur les séries récurrentes; il y donne une méthode pour trouver si une série proposée en nombres est récurrente et de quel ordre : il a encore donné une autre solution de la même question dans un mémoire *sur les interpolations,* qui n'a paru jusqu'ici qu'en allemand, dans les Éphémérides de Berlin pour 1783. Prony vient aussi de traiter avec détail les principales questions qu'on peut proposer sur les séries récurrentes, dans le journal de l'École polytechnique.

Laplace a fait de savantes recherches sur le terme général des séries récur-
rentes

rentes *doubles*, qu'il a nommées *récurro-récurrentes*, dans les mémoires présentés à l'Académie de Paris, tomes VI et VII, en considérant cette matière comme un cas particulier des intégrations des équations aux différences (finies) partielles à plusieurs variables, intégrations pour lesquelles il a donné des méthodes ingénieuses. Lagrange, dans les *recherches* citées, imprimées dans le volume de l'Académie de Berlin pour 1775, a traité de nouveau le même sujet; il y enseigne à trouver le terme général des séries récurrentes doubles et triples, par des méthodes nouvelles, qui ramènent cette matière à la théorie générale des séries. Depuis, Laplace a encore repris le même sujet dans son mémoire *sur les suites*, Académie des sciences de Paris pour 1779.

202. Notre intention est de faire voir dans cet article que le calcul des dérivations s'applique avec une très-grande facilité aux séries récurrentes simples, et qu'il donne, pour les termes généraux de ces séries, des formules fort abrégées, qu'on peut ensuite développer facilement pour chaque indice ou quantième de terme en particulier, quel que soit cet indice, pourvu qu'il soit un nombre entier, ce qui est le cas le plus ordinaire dans la théorie des probabilités. Nos développemens présentent les termes de la série exprimés en coëfficiens du dénominateur de la fraction génératrice, mêlés avec quelques-uns des premiers termes dont on suppose la valeur connue, tandis que toutes les méthodes dont on a fait usage donnent le terme général en puissances des racines de l'équation qu'on obtient en égalant le dénominateur à zéro. Les développemens que donnent nos méthodes, quoique toujours faciles à effectuer, sont souvent fort longs; mais cet inconvénient paroît compensé par l'avantage de n'avoir pas à décomposer le dénominateur en facteurs simples, ce qui, lorsque le dénominateur va au-delà du quatrième degré, et que ses facteurs ne sont pas rationnels, surpasse les forces actuelles de l'Analyse.

Quant aux séries récurrentes doubles, nous offrons l'essai d'une méthode qui a cela de particulier, qu'on y forme aussi d'abord la fraction génératrice de la série : le dénominateur se déduisant sans peine de l'équation de relation, la principale difficulté est réduite à former le numérateur, et quelquefois encore à savoir par quel terme du dénominateur doit commencer le développement. Quand la fraction est ainsi déterminée, les dérivations donnent toujours le terme général sans qu'on ait besoin de décomposer en facteurs. Cette méthode, qui nous paroît mériter d'être cultivée et perfectionnée, étant appliquée à

plusieurs problèmes sur les probabilités, nous conduit aux mêmes résultats que LAGRANGE et LAPLACE ont trouvés par leurs méthodes, et elle y conduit souvent avec beaucoup de facilité. Nous indiquons ensuite la manière de l'étendre aux séries triples.

§. I.er

Des séries récurrentes simples.

203. On nomme *séries récurrentes* celles dont la propriété est, qu'un terme quelconque se forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés chacun par un coëfficient donné.

Ainsi, A_m désignant un terme quelconque, si l'on a entre ce terme et les trois précédens l'*équation de relation*,

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} = 0,$$

α, β, γ, δ étant des quantités constantes données, positives ou négatives, la série sera une série récurrente du troisième ordre; car cette équation donne

$$A_m = -\frac{\beta}{\alpha} A_{m-1} - \frac{\gamma}{\alpha} A_{m-2} - \frac{\delta}{\alpha} A_{m-3},$$

où l'on voit que A_m est formé de l'addition des trois termes précédens, chacun étant multiplié par un coëfficient constant. On dit que la série récurrente ou son équation de relation est du $r^{ième}$ ordre, si la différence entre les indices des termes extrêmes A_m et A_{m-r} est égale à r. Les constantes qui multiplient les termes successifs, écrites les unes à la suite des autres, comme

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

forment ce qu'on nomme l'*échelle de relation.*

Nous ne nous proposons pas de donner toutes les applications que l'on peut faire du calcul des dérivations aux séries récurrentes : le problème suivant est le plus important dans cette matière, à cause du grand nombre de ses usages, et nous allons en donner une solution directe, qui ne demande aucune décomposition en facteurs.

PROBLÈME.

204. Étant donnée l'équation de relation d'une série récurrente simple, d'un ordre quelconque,

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} + \text{etc.} + \alpha_{r-1} A_{m-r+1} + \alpha_r A_{m-r} = 0;$$

trouver l'expression du terme général de la série en α, β, γ, δ, etc., α_r.

Pour simplifier, nous ne considérerons que l'équation de relation du troisième ordre, il sera facile de voir que les raisonnemens sont les mêmes pour un ordre quelconque.

Soit donc l'équation de relation

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} = 0, \qquad \ldots . (1)$$

laquelle, au moyen de nos notations, prend cette forme

$$\alpha D^m . A + D.\alpha . D^{m-1}. A + D^2.\alpha . D^{m-2}. A + D^3.\alpha . D^{m-3}. A = 0:$$

or, en comparant avec la formule du n.° 87, on voit que le premier membre de cette équation n'est autre chose que le développement de $D^m.(\alpha A)$, $D^3.\alpha$, ou δ, étant un dernier terme dont les dérivées sont zéro; c'est-à-dire, qu'il n'est autre chose que le coëfficient du terme affecté de x^m dans le développement du produit

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}), \ldots (2)$$

le premier polynome n'ayant que quatre termes et le second étant indéfini.

Soit

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.} \qquad \ldots . (3)$$

la série résultante du développement de ce produit, on aura

$$a = \alpha A,\ b = D.(\alpha A),\ c = D^2.(\alpha A),\ d = D^3.(\alpha A),\ e = D^4.(\alpha A), \text{ etc.};$$

mais, puisqu'en développant ces expressions on trouve

$$d = \alpha A_3 + \beta A_2 + \gamma A_1 + \delta A, \qquad e = \alpha A_4 + \beta A_3 + \gamma A_2 + \delta A_1, \text{ etc},$$

et que ces valeurs doivent satisfaire à l'équation de relation, il s'ensuit que d, e, f, g, etc. sont tous égaux à zéro : il n'en est pas de même des valeurs de a, b et c, lesquelles, étant

$$a = \alpha A, \quad b = \alpha A_1 + \beta A, \quad c = \alpha A_2 + \beta A_1 + \gamma A,$$

ne remplissent pas toute l'étendue de l'équation de relation (1), et, sans s'évanouir, demeurent indéterminées. Ainsi la série (3) se réduit aux trois termes

$$a + bx + cx^2,$$

tous les autres étant zéro. On remarque, sans que j'en avertisse, que, conformément à nos notations, nous écrivons indistinctement B ou A_1, C ou A_2, etc.

Donc, puisque la série (3) est égale au produit (2) dont elle est supposée le développement, nous aurons l'équation

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} + A_m x^m + \text{etc.} \quad \ldots (4)$$

Les coëfficiens du second membre de cette équation représentent les termes successifs de la série récurrente, et le premier membre est une fraction qui, par son développement, suivant les puissances de x, donne ces mêmes termes. Cette fraction se nomme la *fraction génératrice* de la série récurrente.

Or il est clair que par nos méthodes on peut calculer un terme quelconque du développement de cette fraction, indépendamment des termes précédens. En effet, l'origine des dérivations sera $a\alpha^{-1}$, et le coëfficient de x^m sera $A_m = \mathfrak{D}^m.(a\alpha^{-1})$, c et δ étant des dernieres quantités, dont les dérivées sont zéro (n.° 105).

On a donc pour l'expression du terme général de la série récurrente du troisième ordre, en a, b, c, et α, β, γ, δ,

$$A_m = \mathfrak{D}^m.(a\alpha^{-1}), \quad \ldots\ldots (5)$$

ou bien, en développant en partie,

$$A_m = a\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1} + b\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1} + c\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1}, \quad \ldots\ldots (6)$$

$\mathfrak{D}^3.a$, $\mathfrak{D}^4.\alpha$, etc. étant $= 0$.

L'expression (5) ou (6) est un véritable terme général, puisqu'elle est une fonction de m qui indique le quantième du terme : elle exige à la vérité un développement ultérieur; mais, quel que soit m, pourvu qu'il soit un nombre entier positif (ce qu'on suppose toujours dans les séries quand il ne s'agit pas d'interpoler), ce développement peut toujours s'effectuer facilement par nos règles; et l'on peut regarder l'opération du développement comme toute autre opération arithmétique ou algébrique que la formule générale indique et que l'on effectue dans chaque cas particulier.

205. La même solution s'étend aux séries récurrentes d'un ordre quelconque. Ainsi, en reprenant l'équation de relation proposée de l'ordre r, savoir

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} + \text{etc.} + \alpha_{r-1} A_{m-r+1} + \alpha_r A_{m-r} = 0,$$

on en formera sur-le-champ le dénominateur

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r x^r, \quad \ldots\ldots (7)$$

en mettant simplement 1, x, x^2, x^3, etc. au lieu de A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, A_{m-3}, etc. respectivement dans l'équation de relation proposée; et la fraction génératrice sera

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} + a_{r-1}x^{r-1}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} + \alpha_{r-1}x^{r-1} + \alpha_r x^r}, \quad \ldots\ldots (8)$$

le numérateur ayant toujours un terme de moins que le dénominateur.

Les

Les valeurs de a, b, c, d, etc. a_{r-1} demeurent arbitraires, si l'on n'a que l'équation de relation proposée : pour que la série récurrente soit entièrement déterminée, il faut que les valeurs de ces quantités soient données immédiatement par les conditions de la question, ou bien il faut que l'on connoisse les $r-1$ premiers termes de la série récurrente, car les valeurs de a, b, c, d, etc. s'en déduisent ensuite facilement. En effet on a, d'après le n.° précédent, $a = \alpha A$, $b = \text{D}.(\alpha A)$, $c = \text{D}^2.(\alpha A)$, et généralement $a_r = \text{D}^r.(\alpha A)$; ou, en développant,

$$\begin{aligned} a &= \alpha A, \\ b &= \alpha B + \beta A, \\ c &= \alpha C + \beta B + \gamma A, \\ d &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A, \\ &\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r-1} &= \alpha A_{r-1} + \beta A_{r-2} + \gamma A_{r-3} + \text{etc.} + \alpha_{r-1} A. \end{aligned} \qquad \ldots.(9)$$

Quant à la valeur de a_r, elle est $\alpha A_r + \beta A_{r-1} + \gamma A_{r-2} + \text{etc.} + \alpha_r A$, et comme cette quantité est un cas particulier de l'équation de relation, il est évident qu'elle est $= 0$, ainsi que toutes les valeurs de a_{r+1}, a_{r+2}, etc. : voilà pourquoi le nombre des termes du numérateur de la fraction génératrice est toujours moindre de un que celui des termes du dénominateur.

A présent nos méthodes donnent pour le coëfficient de x^m dans le développement de la fraction génératrice (8) cette expression

$$A_m = \text{D}^m.(a\alpha^{-1}), \qquad \ldots..(10)$$

a_{r-1} et α_r étant des derniers termes dont les dérivées sont zéro. C'est l'expression très-simple du terme général demandé de la série récurrente de l'ordre r. Ainsi le problème proposé au n.° 204 est résolu.

On trouve au n.° 105 trois manières différentes de développer cette expression : par la première on a

$$A_m = \text{D}^m.(a\alpha^{-1}) = \qquad \ldots..(11)$$

$$a\text{D}^m.\alpha^{-1} + b\text{D}^{m-1}.\alpha^{-1} + c\text{D}^{m-2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + a_{r-2}\text{D}^{m-r+2}.\alpha^{-1} + a_{r-1}\text{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}.$$

Nous allons ajouter quelques observations sur les développemens du terme général que nous venons d'obtenir.

206. Puisqu'on a eu $a = \alpha A$, on peut mettre l'expression (10) sous cette forme,

$$A_m = \text{D}^m.(\alpha A\alpha^{-1}),$$

pourvu qu'on fasse zéro les dérivées de α_r et qu'on ait soin de rejeter toutes les dérivées de α^{-1} inférieures à $\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}$, à cause que, dans $\mathfrak{D}^m.(a\alpha^{-1})$, a_{r-1} est un dernier terme, et partant que $a_{r-1}\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}$ est le dernier terme du développement de $\mathfrak{D}^m.(a\alpha^{-1})$.

Avec cette attention on peut partager $\alpha A\alpha^{-1}$ différemment en facteurs avant que de faire le développement de l'expression précédente.

1.° En partageant $\alpha A\alpha^{-1}$ dans les facteurs αA et α^{-1}, on a sur-le-champ

$$A_m = \mathfrak{D}^m.(\alpha A.\alpha^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&\alpha A.\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1}\\
&+ (\alpha B + \beta A)\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1}\\
&+ (\alpha C + \beta B + \gamma A)\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1}\\
&+ (\alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A)\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-1} \qquad \ldots\ldots(12)\\
&+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (\alpha A_{r-1} + \beta A_{r-2} + \gamma A_{r-3} + \text{etc.} + \alpha_{r-2}B + \alpha_{r-1}A)\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

2.° En partageant le produit $\alpha A\alpha^{-1}$ dans les facteurs A et $\alpha.\alpha^{-1}$, on a aussi sur-le-champ

$$A_m = \mathfrak{D}^m.(A \times \alpha.\alpha^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&A(\alpha\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1} + \gamma\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha_{r-2}\mathfrak{D}^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-1}\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1})\\
&+ B(\alpha\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1} + \gamma\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha_{r-2}\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1})\\
&+ C(\alpha\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha_{r-3}\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1})\\
&+ D(\alpha\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-4}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha_{r-4}\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}) \qquad \ldots\ldots(13)\\
&+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ A_{r-2}(\alpha\mathfrak{D}^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1})\\
&+ A_{r-1}.\alpha\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

Cette dernière formule s'accorde au fond avec celle qu'a trouvée Laplace, par une voie différente, dans son mémoire *sur les suites* (Académie des sciences de Paris, année 1779, page 237). La formule précédente (12) paroît préférable dans plusieurs occasions; on peut cependant mettre cette dernière (13) sous une forme qui en abrège les développemens, ainsi qu'on va le voir.

207. Quelle que soit la dernière des quantités α, β, γ, δ, etc., c'est-à-dire celle dont les dérivées sont zéro, on a toujours

$$\mathfrak{D}^r.(\alpha\,\alpha^{-1}) = 0,$$

à cause que $\alpha.\alpha^{-1} = 1$, et que $\mathrm{D}.1 = 0$, et $\mathfrak{D}^r.1 = 0$. Soit ε, par exemple,

la dernière des quantités α, β, γ, etc. : on aura, en développant,

$$D^{r}.(\alpha.\alpha^{-1}) =$$
$$\alpha D^{r}.\alpha^{-1} + \beta D^{r-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{r-2}.\alpha^{-1} + \delta D^{r-3}.\alpha^{-1} + \varepsilon D^{r-4}.\alpha^{-1} = 0\,;$$

d'où l'on tire les équations suivantes

$$\alpha D^{r}.\alpha^{-1} + \beta D^{r-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{r-2}.\alpha^{-1} + \delta D^{r-3}.\alpha^{-1} = -\,\varepsilon D^{r-4}.\alpha^{-1}$$
$$\alpha D^{r}.\alpha^{-1} + \beta D^{r-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{r-2}.\alpha^{-1} = -\,\delta D^{r-3}.\alpha^{-1} - \varepsilon D^{r-4}.\alpha^{-1}.$$

Au moyen de ces équations la formule suivante, qui donne le terme général pour l'équation de relation du quatrième ordre,

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} + \varepsilon A_{m-4} = 0\,,$$

et qui est un cas particulier de la formule (13) du numéro précédent, savoir,

$$\begin{aligned} A_m = & \\ & A(\alpha D^{m}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{m-2}.\alpha^{-1} + \delta D^{m-3}.\alpha^{-1}) \\ + & B(\alpha D^{m-1}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-2}.\alpha^{-1} + \gamma D^{m-3}.\alpha^{-1}) \\ + & C(\alpha D^{m-2}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-3}.\alpha^{-1}) \\ + & D.\alpha D^{m-3}.\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

se change en cette autre, plus simple et plus facile à évaluer en nombres,

$$\begin{aligned} - & A.\varepsilon D^{m-4}.\alpha^{-1} \\ - & B(\delta D^{m-4}.\alpha^{-1} + \varepsilon D^{m-5}.\alpha^{-1}) \\ + & C(\alpha D^{m-2}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-3}.\alpha^{-1}) \\ + & D.\alpha D^{m-3}.\alpha^{-1}, \end{aligned}$$

où le nombre des termes est réduit à la moitié plus un. Dans ces deux formules ε est une dernière quantité dont la dérivée est zéro.

Cette simplification s'étend au terme général d'une série de l'ordre quelconque r, et la formule (13) devient ainsi, α_r étant toujours une dernière quantité,

$$\begin{aligned} A_m = & \\ - & A.\alpha_r D^{m-r}.\alpha^{-1} \\ - & B(\alpha_{r-1} D^{m-r}.\alpha^{-1} + \alpha_r D^{m-r-1}.\alpha^{-1}) \qquad \ldots\ldots(14) \\ - & C(\alpha_{r-2} D^{m-r}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-1} D^{m-r-1}.\alpha^{-1} + \alpha_r D^{m-r-2}.\alpha^{-1}) \\ & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & A_{r-3}(\alpha D^{m-r+3}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \gamma D^{m-r+1}.\alpha^{-1}) \\ + & A_{r-2}(\alpha D^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-r+1}.\alpha^{-1}) \\ + & A_{r-1}.\alpha D^{m-r+1}.\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

208. Éclaircissons par un exemple la manière d'employer nos formules.

Exemple.

On demande le onzième terme de la série récurrente du troisième ordre, dont l'équation de relation est

$$\alpha A_n + \beta A_{n-1} + \gamma A_{n-2} + \delta A_{n-3} = 0,$$

les trois premiers termes A, B, C étant donnés.

La formule (11) du n.° 205 donne pour le terme cherché

$$A_{10} = a\mathfrak{D}^{10}.\alpha^{-1} + b\mathfrak{D}^{9}.\alpha^{-1} + c\mathfrak{D}^{8}.\alpha^{-1},$$

où δ est une dernière quantité. Je lis cette formule à rebours et je développe d'abord $\mathfrak{D}^8.\alpha^{-1}$; j'ai par le n.° 20, en écrivant la suite à rebours,

$$\mathfrak{D}^8\alpha^{-1} = \alpha^{-9}.\beta^8 - \alpha^{-8}.\mathrm{D}.\beta^7 + \alpha^{-7}.\mathfrak{D}^2.\beta^6 - \alpha^{-6}.\mathfrak{D}^3.\beta^5 + \alpha^{-5}\mathfrak{D}^4.\beta^4 - \alpha^{-4}\mathfrak{D}^5.\beta^3:$$

les termes suivans sont zéro, à cause que δ est une dernière quantité. Développant ultérieurement par la règle du n.° 43, j'ai sur-le-champ

$$\mathfrak{D}^8.\alpha^{-1} = \alpha^{-9}.\beta^8 - \alpha^{-8}7\beta^6\gamma + \alpha^{-7}(6\beta^5\delta + 15\beta^4\gamma^2)$$
$$-\alpha^{-6}(10\beta^3 2\gamma\delta + 10\beta^2\gamma^3) + \alpha^{-5}(6\beta^2\delta^2 + 4\beta 3\gamma^2\delta + \gamma^4) - \alpha^{-4}.3\gamma\delta^2.$$

De là on tire successivement par dérivation les développemens suivans, par la règle du n.° 30, en commençant, si l'on veut, par le dernier terme,

$$\mathfrak{D}^9.\alpha^{-1} = -\alpha^{-10}.\beta^9 + \alpha^{-9}.8\beta^7\gamma - \alpha^{-8}(7\beta^6\delta + 21\beta^5\gamma^2) + \alpha^{-7}(15\beta^4 2\gamma\delta + 20\beta^3\gamma^3)$$
$$-\alpha^{-6}(10\beta^3\delta^2 + 10\beta^2 3\gamma^2\delta + 5\beta\gamma^4) + \alpha^{-5}(4\beta 3\gamma\delta^2 + 4\gamma^3\delta) - \alpha^{-4}.\delta^3,$$

$$\mathfrak{D}^{10}.\alpha^{-1} = \alpha^{-11}.\beta^{10} - \alpha^{-10}.9\beta^8\gamma + \alpha^{-9}(8\beta^7\delta + 28\beta^6\gamma^2) - \alpha^{-8}(21\beta^5 2\gamma\delta + 35\beta^4\gamma^3)$$
$$+\alpha^{-7}(15\beta^4\delta^2 + 20\beta^3 3\gamma^2\delta + 15\beta^2\gamma^4) - \alpha^{-6}(10\beta^2 3\gamma\delta^2 + 5\beta 4\gamma^3\delta + \gamma^5)$$
$$+\alpha^{-5}(4\beta\delta^3 + 6\gamma^2\delta^2).$$

Ces développemens réduits de $\mathfrak{D}^8.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{D}^9.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{D}^{10}.\alpha^{-1}$ étant multipliés respectivement par $c = \alpha C + \beta B + \gamma A$, $b = \alpha B + \beta A$, $a = \alpha A$, la somme des produits est l'expression développée du onzième terme de toutes les séries imaginables du troisième ordre.

Supposons, pour appliquer ces formules à un cas numérique, qu'on veuille le onzième terme, l'équation de relation étant

$$A_n + A_{n-1} - 2A_{n-2} - 2A_{n-3} = 0,$$

et les trois premiers termes étant $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$.

On aura $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, $\delta = -2$; $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$;

$$\mathfrak{D}^8.\alpha^{-1} = 31, \quad \mathfrak{D}^9.\alpha^{-1} = -31, \quad \mathfrak{D}^{10}.\alpha^{-1} = 63;$$

et le onzième terme sera $A_{10} = 63$.

209.

209. La solution du problème précédent donne immédiatement un terme quelconque de la série récurrente, lorsque l'indice ou le quantième de ce terme est un nombre entier positif; on peut demander à présent, si l'on ne peut pas trouver des formules finies qui donnent pareillement un terme quelconque de la série récurrente, lorsque l'indice ou quantième de ce terme est un nombre entier négatif : c'est ce que nous allons examiner.

PROBLÈME.

Étant donnée l'équation de relation d'une série récurrente de l'ordre quelconque r, on demande l'expression d'un terme quelconque de la série continuée en arrière, c'est-à-dire, l'expression du terme général à indice ou quantième entier négatif.

Soit la série récurrente, continuée des deux côtés, représentée par

$$\text{etc.} + A_{-3}x^{-3} + A_{-2}x^{-2} + A_{-1}x^{-1} + A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}; \quad \ldots(1)$$

on peut réduire la question à former la fraction génératrice de la partie de la série qui s'étend à la gauche de A, d'après l'équation de relation, ou même d'après la fraction génératrice de la série qui s'étend en avant, à la droite de A.

Pour plus de simplicité nous supposons que la série soit du troisième ordre; la même analyse s'applique à un ordre quelconque. Soit donc l'équation de relation

$$\alpha A_m + \beta A_{m-1} + \gamma A_{m-2} + \delta A_{m-3} = 0; \quad \ldots(2)$$

puisque cette équation est censée vraie pour toutes les valeurs de l'indice m entières, positives et négatives, on pourra mettre $-m+3$ au lieu de m, et l'équation de relation deviendra

$$\delta A_{-m} + \gamma A_{-m+1} + \beta A_{-m+2} + \alpha A_{-m+3} = 0. \quad \ldots(3)$$

Or le premier membre de cette équation n'est autre chose que le coëfficient de x^{-m} dans le développement du produit suivant

$$(\delta + \gamma x^{-1} + \beta x^{-2} + \alpha x^{-3}) . (A_{-1}x^{1} + A_{-2}x^{2} + A_{-3}x^{3} + A_{-4}x^{4} + \text{etc.}), \quad \ldots(4)$$

ainsi qu'il est aisé de le voir en effectuant la multiplication. Soit

$$\mathfrak{a}x^{-1} + \mathfrak{b}x^{-2} + \mathfrak{c}x^{-3} + \mathfrak{d}x^{-4} + \mathfrak{e}x^{-5} + \text{etc.} \quad \ldots(5)$$

la série résultante de cette multiplication; on aura

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \delta A_{-1}, \\
\mathfrak{b} &= \delta A_{-2} + \gamma A_{-1}, \\
\mathfrak{c} &= \delta A_{-3} + \gamma A_{-2} + \beta A_{-1}, \\
\mathfrak{d} &= \delta A_{-4} + \gamma A_{-3} + \beta A_{-2} + \alpha A_{-1}, \\
\mathfrak{e} &= \delta A_{-5} + \gamma A_{-4} + \beta A_{-3} + \alpha A_{-2}, \\
&\text{etc.},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(6)$$

où l'on voit que les valeurs de $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ etc. satisfont à l'équation de relation (3), et que par conséquent elles sont toutes zéro ; mais qu'il n'en est pas de même de celles de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, lesquelles, ne remplissant pas toute l'équation de relation, doivent demeurer indéterminées, ou être données par l'état de la question. On aura donc l'équation suivante

$$\frac{\mathfrak{a}x^{-1}+\mathfrak{b}x^{-2}+\mathfrak{c}x^{-3}}{\delta+\gamma x^{-1}+\beta x^{-2}+\alpha x^{-3}}=A_{.1}x^{-1}+A_{.2}x^{-2}+A_{.3}x^{-3}+A_{.4}x^{-4}+\text{etc.}, \quad \ldots(7)$$

dont le premier membre est la fraction génératrice demandée.

Le numérateur dépend ici des trois premiers termes de la série continuée en arrière : mais on peut aussi le faire dépendre des trois premiers termes de la série étendue en avant, et, en liant ainsi les deux côtés de la série, on pourra mieux comparer la fraction génératrice de la série continuée en arrière avec celle de la même série étendue en avant. A cet effet, je fais $-m$ successivement $=-1, -2, -3$ dans l'équation de relation (3), ce qui donne

$$\begin{aligned}\delta A_{.1} &= -(\alpha C+\beta B+\gamma A),\\ \delta A_{.2}+\gamma A_{.1} &= -(\alpha B+\beta A),\\ \delta A_{.3}+\gamma A_{.2}+\beta A_{.1} &= -\alpha A.\end{aligned}$$

En comparant avec le numéro 204, on aura $\mathfrak{a}=-c$, $\mathfrak{b}=-b$, $\mathfrak{c}=-a$. Donc la fraction génératrice de la série continuée en arrière sera aussi

$$-\frac{cx^{-1}+bx^{-2}+ax^{-3}}{\delta+\gamma x^{-1}+\beta x^{-2}+\alpha x^{-3}}. \quad \ldots\ldots(8)$$

On voit qu'elle résulte de la fraction génératrice de la série étendue en avant,

$$\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3},$$

si l'on multiplie celle-ci haut et bas par x^{-3}, qu'on ordonne suivant les puissances négatives de x, et qu'on mette le signe $-$ devant la fraction.

Cette règle est générale pour une série d'un ordre quelconque r, car l'analyse précédente demeure toujours la même. Ainsi la fraction génératrice (8), n.° 205, étant multipliée haut et bas par x^{-r}, et affectée du signe $-$, donnera pour la fraction génératrice de la série de l'ordre r, continuée en arrière,

$$-\frac{a_{r-1}x^{-1}+a_{r-2}x^{-2}+\text{etc.}+bx^{-r+1}+ax^{-r}}{\alpha_r+\alpha_{r-1}x^{-1}+\alpha_{r-2}x^{-2}+\text{etc.}+\beta x^{-r+1}+\alpha x^{-r}}. \quad \ldots(9)$$

Ce problème a déjà été résolu par LAGRANGE dans les mémoires de Paris,

pour 1772, 1.re partie, page 550 et suivantes; mais notre analyse, qui n'est pas fondée sur la décomposition de la fraction génératrice en fractions simples, est plus directe et paroît ne rien laisser à désirer.

210. Quant à la manière de développer cette dernière fraction, elle est absolument la même que celle par laquelle on développe la fraction (8), n.° 205, pourvu qu'on regarde ici a_{r-1} et α_r comme des premiers termes, et qu'on prenne pour leurs dérivées, non les lettres qui les suivent dans l'ordre alphabétique, mais celles qui les précèdent. En se conformant à cette remarque, on peut indiquer le terme général à indice négatif de la série de l'ordre r, c'est-à-dire, le coëfficient de x^{-m} dans le développement, par

$$A_{-m} = -\mathfrak{D}^{m-1}.\{a_{r-1}(\alpha_r)^{-1}\}; \qquad \ldots\ldots(10)$$

et le terme général à indice négatif de la série du troisième ordre sera

$$A_{-m} = -\mathfrak{D}^{m-1}.(c\delta^{-1}) = -(c\mathfrak{D}^{m-1}.\delta^{-1} + b\mathfrak{D}^{m-2}.\delta^{-1} + a\mathfrak{D}^{m-3}.\delta^{-1}) \qquad \ldots(11)$$

Au lieu d'ordonner les termes de la fraction génératrice de la série continuée en arrière suivant les puissances négatives de x, on peut, pour déduire la fraction génératrice dont il s'agit de celle de la série étendue en avant, se contenter d'écrire à rebours le numérateur et le dénominateur de cette dernière fraction, en affectant toute l'expression du signe $-$. Ainsi la fraction $\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$ donnera celle-ci $-\frac{cx^2 + bx + a}{\delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha}$, car, en développant cette dernière suivant les puissances x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, etc., on aura (n.° 107) les mêmes coëfficiens qu'en développant la fraction (8) du numéro précédent.

211. Nous avons donc des formules et des méthodes pour calculer par dérivation, immédiatement, un terme quelconque d'une série récurrente, toutes les fois que l'indice ou le quantième du terme est un nombre entier positif ou négatif, et cela sans qu'on ait besoin de décomposer le dénominateur de la fraction génératrice en facteurs binomes, ou cette fraction en fractions simples. Quoique l'on voie par l'exemple du n.° 208 que le nombre des termes du développement, toujours très-faciles à former d'après nos méthodes, devient très-considérable pour des termes fort distans du premier et pour des séries d'un ordre fort élevé; cependant, comme rien n'arrête nos développemens, ils donneront toujours le moyen d'avoir immédiatement un terme quelconque de la série.

Il n'en est pas de même des méthodes connues. MOIVRE et ceux qui l'ont suivi sont obligés, pour former l'expression du terme général, de décomposer la fraction génératrice en fractions simples; pour cela il faut décomposer le dénominateur en facteurs binomes, et, si on ne connoît pas d'avance ces facteurs, il est nécessaire d'égaler ce dénominateur à zéro et de résoudre exactement une équation qui peut être d'un degré fort élevé, ce qui surpasse toutes les forces actuelles de l'Analyse. Le terme général qu'on trouve ainsi, lorsqu'on peut y parvenir, est exprimé en puissances des racines du dénominateur, tandis que nos formules le donnent en coëfficiens du même dénominateur. La méthode qui enseigne à trouver le terme général par l'intégration des équations aux différences (finies), fait parvenir à une équation qui n'est autre chose encore que le dénominateur de la fraction génératrice égalé à zéro, et elle exige pareillement qu'on en cherche les racines.

Il nous paroît donc qu'on peut souvent employer nos méthodes avec avantage, lorsque, ne connoissant point les facteurs du dénominateur, les racines de ce dénominateur ne sont pas rationnelles, et que d'ailleurs on ne demande qu'un terme de la série récurrente à indice ou quantième entier : et dans ce cas nos méthodes sont les seules praticables, pour les séries d'un ordre supérieur au quatrième.

Mais si l'on demande des formules qui puissent encore servir pour des indices fractionnaires, il devient indispensable d'employer celles qui résultent de la décomposition du dénominateur de la fraction génératrice en facteurs binomes : alors, supposé que l'on connoisse ces facteurs, on décompose la fraction elle-même en fractions simples à dénominateurs binomes; chacune de ces fractions donne un coëfficient de x^n, et la collection de ces coëfficiens forme le terme général.

Comme cette matière tient aux dérivations, et qu'à leur aide on arrive facilement à des formules élégantes et utiles, elle ne sera pas déplacée ici, et nous allons la traiter succinctement.

212. Démontrons d'abord une proposition qui sert de base à la décomposition des fractions.

Soit en général la fraction $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des polynomes finis, chacun de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc. $+ a_{q-1}x^{q-1} + a_q x^q$, P ayant un terme de moins que Q, c'est-à-dire, étant d'un degré inférieur de l'unité à celui

celui de Q; si Q est le produit de deux autres polynomes connus M et N, on pourra toujours décomposer la fraction proposée en deux autres, de cette manière

$$\frac{K}{M} + \frac{L}{N} = \frac{P}{Q}, \qquad \ldots\ldots (1)$$

telles que K soit un polynome dont le degré est inférieur de l'unité à celui de M, et L un polynome dont le degré est inférieur de l'unité à celui de N.

En effet l'équation (1) donne

$$\frac{KN + LM}{MN} = \frac{P}{Q}, \quad \text{et } KN + LM = P, \qquad \ldots\ldots (2)$$

puisque par supposition $Q = MN$. Soit Q un polynome du degré q, et M du degré m, m étant $< q$: P sera du degré $q - 1$, N du degré $q - m$; K devra être du degré $m - 1$, et L du degré $q - m - 1$; K aura donc m termes et m coëfficiens indéterminés, et L en aura $q - m$. Voyons si ces suppositions s'accordent avec l'équation (2). KN sera du degré $m - 1 + q - m = q - 1$, et LM du degré $q - m - 1 + m = q - 1$; donc $KN + LM$ sera du degré $q - 1$, c'est-à-dire, du même degré que P : ainsi $KN + LM$ contiendra q coëfficiens indéterminés; donc, P ayant q termes, on pourra former, entre les coëfficiens de $KN + LM$ et ceux de P, q équations linéaires qui serviront à déterminer les q coëfficiens de K et de L. D'où il résulte que la décomposition dont il s'agit est toujours possible.

213. Supposons à présent que M soit une puissance de binome, $(a - x)^m$; M sera donc un polynome de $m + 1$ termes et K un polynome de m termes, dont le premier ne sera pas affecté de x, et le dernier sera affecté de x^{m-1}. L'équation (2) donnera

$$K = \frac{P}{N} - \frac{L(a - x)^m}{N}. \qquad \ldots\ldots (3)$$

Si dans cette équation on vouloit tout développer suivant les puissances de $a - x$, il suffiroit de mettre partout, au lieu de x, $a - (a - x)$, ou $a - \omega$, en faisant $a - x = \omega$, pour simplifier; puis, de développer en séries ascendantes, suivant les puissances de ω.

Or il est clair que, K étant du degré $m - 1$ en x, il sera encore du même degré en ω, après qu'on aura mis $a - \omega$ au lieu de x. Donc, si on développe $\frac{P}{N}$ et $-\frac{L\omega^m}{N}$ suivant les puissances ascendantes de ω, aucun terme de $\frac{L\omega^m}{N}$ ne pourra entrer dans la valeur de K, laquelle par conséquent sera égale aux m premiers termes du développement de $\frac{P}{N}$.

De là il s'ensuit que, pour déterminer le numérateur de la fraction partielle $\frac{K}{(\mathbf{a}-x)^m}$, qui est une de celles dans lesquelles on veut décomposer la fraction proposée $\frac{P}{Q}$, il faut diviser Q par le dénominateur $(\mathbf{a}-x)^m$, et en nommant N le quotient, développer $\frac{P}{N}$ en une série ascendante suivant les puissances de $\mathbf{a}-x$; les m premiers termes de cette série, dont le dernier sera affecté de $(\mathbf{a}-x)^{m-1}$, formeront la valeur du numérateur K (*).

Le calcul des dérivations donne un moyen facile de développer $\frac{P}{N}$ suivant les puissances ascendantes de $\mathbf{a}-x$. En effet, soit

$$\frac{P}{N}=\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}+a_{q-1}x^{q-1}}{\pi+\varpi x+\rho x^2+\sigma x^3+\text{etc.}+\pi_{q-m}x^{q-m}};$$

on mettra partout $\mathbf{a}-\omega$ au lieu de x, et désignant par $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ la fraction

$$\frac{a+b\mathbf{a}+c\mathbf{a}^2+d\mathbf{a}^3+\text{etc.}\ a_{q-1}\mathbf{a}^{q-1}}{\pi+\varpi\mathbf{a}+\rho\mathbf{a}^2+\sigma\mathbf{a}^3+\text{etc.}+\pi_{q-m}\mathbf{a}^{q-m}},$$

il est clair qu'en considérant dans cette expression $\mathbf{a}$ seul comme variable, et faisant la dérivée de $\mathbf{a}=-1$, on aura, pour le développement demandé,

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}+\mathrm{D}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\omega+\mathfrak{D}^2\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\omega^2+\mathfrak{D}^3\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\omega^3+\text{etc.}+\mathfrak{D}^{m-1}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\omega^{m-1}=K.$$

D'où il s'ensuit que $\frac{K}{(\mathbf{a}-x)^m}$, c'est à dire les fractions partielles qui résultent du dénominateur $(\mathbf{a}-x)^m$ seront, ω étant $=\mathbf{a}-x$,

$$\frac{K}{(\mathbf{a}-x)^m}=$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}(\mathbf{a}-x)^m}+\mathrm{D}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\frac{1}{(\mathbf{a}-x)^{m-1}}+\mathfrak{D}^2\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\frac{1}{(\mathbf{a}-x)^{m-2}}+\text{etc.}+\mathfrak{D}^{m-1}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\frac{1}{(\mathbf{a}-x)};$$

$\mathbf{a}$ étant seul variable dans $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ et sa dérivée étant -1.

214. On demande à présent le coëfficient de x^n dans la série qui résulte du développement suivant les puissances de x de la valeur précédente de $\frac{K}{(\mathbf{a}-x)^m}$.

(*) Cette méthode, qui a déjà été donnée par LAPLACE dans son mémoire *sur les suites* (Mémoires de Paris, année 1779, page 224) est la même que celle qu'EULER a exposée dans les *Acta* de Pétersbourg pour 1780, 1.re partie, et qu'il a préférée aux méthodes qu'il avoit données précédemment dans l'*introduction à l'Analyse des infinis* et dans son *Calcul différentiel*, parce qu'elle s'applique aux fonctions transcendantes. Elle se trouve ici dégagée de la considération des infinis.

Il est clair qu'il suffira de prendre le terme affecté de x^n que donnera chacun des termes de la formule précédente, $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ demeurant invariable; et l'on aura ainsi, pour le coëfficient cherché,

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\mathfrak{D}^n(a^{-m}) + \mathrm{D}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\mathfrak{D}^n(a^{-m+1}) + \mathfrak{D}^2\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\mathfrak{D}^n(a^{-m+2}) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-1}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\mathfrak{D}^n(a^{-1}).$$

Mais on peut mettre cette série sous une forme plus simple et plus élégante, au moyen d'une transformation que nous allons exposer et qui mérite d'être remarquée.

215. Le coëfficient de x^n dans le développement de $(a-x)^{-r}$ est, par notre méthode, n.° 2, $= \mathfrak{D}^n a^{-r}$, $\mathrm{D}a$ étant $= -1$; je dis que le même coëfficient est aussi égal à $\mathfrak{D}^{r-1}(a^{-n-1})$, $\mathrm{D}a$ étant toujours $= -1$; où l'on voit que l'exposant de $(a-x)$ passe à l'indice de $\mathfrak{D}$ et l'indice de $\mathfrak{D}$ à l'exposant de a, en changeant de signe l'un et l'autre et s'adjoignant -1.

En effet on a, en développant à l'ordinaire, $\mathrm{D}a$ étant $= -1$,

$$\mathfrak{D}^n a^{-r} = \frac{r.r+1.r+2\ldots.(r+n-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots.n}a^{-r-n},$$

et $\mathfrak{D}^{r-1}(a^{-n-1}) = \frac{n+1.n+2\ldots.(n+r-1)}{1.\quad 2\ldots.(r-1)}a^{-r-n}$:

or $\frac{r.r+1.r+2..(r+n-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots.n} = \frac{n+1.n+2..(n+r-1)}{1.\quad 2.\ldots.(r-1)}$,

comme il est aisé de le voir en multipliant en croix, ce qui donne

$1.2\ldots(r-1).r.(r+1)(r+2)..(r+n-1) = 1.2..n(n+1)(n+2)..(n+r-1)$

équation identique. Donc $\mathrm{D}a$ étant $= -1$, on a toujours

$$\mathfrak{D}^n a^{-r} = \mathfrak{D}^{r-1}(a^{-n-1}).$$

216. Si l'on applique cette remarque à la formule du n.° 214, elle devient

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\mathfrak{D}^{m-1}(a^{-n-1}) + \mathrm{D}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\mathfrak{D}^{m-2}(a^{-n-1}) + \mathfrak{D}^2\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.\mathfrak{D}^{m-3}(a^{-n-1}) + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{m-1}\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}.a^{-n-1},$$

$\mathrm{D}a$ étant toujours $= -1$. Or on voit, par le n.° 97, que cette formule peut se mettre sous cette forme fort simple

$$\mathfrak{D}^{m-1}\left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}a^{-n-1}\right],\ \mathrm{D}a \text{ étant } = -1.$$

Donc, pour trouver tout d'un coup la partie du terme général d'une série récurrente qui vient de plusieurs facteurs égaux du dénominateur de la fraction génératrice $\frac{P}{Q}$; soit $(a-x)^m$ le produit de ces facteurs égaux et N le quotient

de Q divisé par $(\mathfrak{a}-x)^m$; mettez partout $\mathfrak{a}$ au lieu de x dans $\frac{P}{N}$, et désignez par $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ ce que devient cette fraction : la partie cherchée du terme général sera $\mathfrak{D}^{m-1}\left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\mathfrak{a}^{-n-1}\right]$, $\mathfrak{D}\mathfrak{a}$ étant $=-1$ et $n+1$ étant l'indice du terme.

On voit que, comme il n'y a ici d'autre variable que $\mathfrak{a}$ et que sa dérivée est $=-1$, on peut aussi exprimer cette formule par les différentielles, et, en laissant subsister x dans $\frac{P}{N}$, dire que la partie cherchée du terme général sera

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left[\frac{P}{N}x^{n-1}\right]}{1.\,2.\,3\ldots(m-1).(-\mathrm{d}x)^{m-1}},$$

en ne faisant varier que x, dx étant constante, et en changeant x en $\mathfrak{a}$ après les différentiations. Ce beau théorème a été donné par LAGRANGE dans ses *recherches sur la manière de former les tables des planètes d'après les seules observations*, Mémoires de Paris pour 1772, 1.re partie, page 527.

On peut aussi voir dans le même endroit une formule générale pour le cas où le dénominateur a des facteurs simples imaginaires.

217. De là il résulte que si l'on a la fraction génératrice

$$\frac{P}{(\mathfrak{a}-x)^m(\mathfrak{b}-x)^r(\mathfrak{c}-x)^s},$$

où P est un polynome en x du degré $m+r+s-1$, le coëfficient de x^n, ou le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série récurrente, sera, en désignant par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ le polynome P dans lequel on a mis successivement $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, au lieu de x,

$$\mathfrak{D}^{m-1}.\{\mathfrak{a}^{-n-1}.\mathfrak{P}.(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})^{-r}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})^{-s}\},\ \mathfrak{a} \text{ seul variant de } -1,$$
$$+\mathfrak{D}^{r-1}.\{\mathfrak{b}^{-n-1}.\mathfrak{Q}.(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{-m}(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})^{-s}\},\ \mathfrak{b} \text{ seul variant de } -1,$$
$$+\mathfrak{D}^{s-1}.\{\mathfrak{c}^{-n-1}.\mathfrak{R}.(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})^{-m}(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^{-r}\},\ \mathfrak{c} \text{ seul variant de } -1;$$

et cette formule peut servir pour toutes les valeurs de n, positives, négatives et fractionnaires.

Cette formule s'accorde avec celle que LAGRANGE a donnée le premier dans un mémoire *sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations*, inséré dans le tome V des Mélanges de Turin (Voyez page 219), et que LAPLACE a aussi donnée dans son mémoire cité *sur les Suites*, page 234.

Si tous les facteurs sont inégaux, si l'on a, par exemple, la fraction

$$\frac{P}{(\mathfrak{a}-x)(\mathfrak{b}-x)(\mathfrak{c}-x)}\,?$$

alors

alors dans la formule précédente les signes de dérivation D, ayant chacun zéro pour indice, disparoissent tous, et le coëfficient de x^n sera simplement

$$\begin{aligned} & a^{-n-1}\mathfrak{P}(b-a)^{-1}(c-a)^{-1} \\ + \; & b^{-n-1}\mathfrak{Q}(a-b)^{-1}(c-b)^{-1} \\ + \; & c^{-n-1}\mathfrak{R}(a-c)^{-1}(b-c)^{-1}. \end{aligned}$$

Si l'on avoit la fraction $\frac{1}{(a-x)^k(b-x)^k(c-x)^k}$ la formule précédente donneroit encore pour le coëfficient de x^n

$$\mathfrak{p}^{k-1}.\left\{\begin{aligned} & a^{-n-1}(b-a)^{-k}(c-a)^{-k}, \text{ a seul variant de } -1, \\ + \; & b^{-n-1}(a-b)^{-k}(c-b)^{-k}, \text{ b seul variant de } -1, \\ + \; & c^{-n-1}(a-c)^{-k}(b-c)^{-k}, \text{ c seul variant de } -1, \end{aligned}\right\}.$$

218. On peut même combiner ces formules avec celles du n.° 204 et suivans, et par là on rendra ces dernières propres à servir pour des quantièmes fractionnaires. En effet, puisque le coëfficient de x^n, dans le développement de

$$\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3},$$

est, n.° 204, $A_n = a\mathfrak{p}^n.\alpha^{-1} + b\mathfrak{p}^{n-1}.\alpha^{-1} + c\mathfrak{p}^{n-2}.\alpha^{-1}$, où $\mathfrak{p}^n.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{p}^{n-1}.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{p}^{n-2}.\alpha^{-1}$ désignent respectivement les coëfficiens de x^n, x^{n-1}, x^{n-2} dans le développement de

$$\frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}:$$

soit cette fraction, après qu'on a décomposé le dénominateur en facteurs binomes, représentée par $-\frac{1}{\delta(a-x)(b-x)(c-x)}$;

on aura pour le coëfficient de x^n de la fraction proposée,

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{\delta}\{a^{-n-1}(b-a)^{-1}(c-a)^{-1}+b^{-n-1}(a-b)^{-1}(c-b)^{-1}+c^{-n-1}(a-c)^{-1}(b-c)^{-1}\} \\ & -\frac{b}{\delta}\{a^{-n}(b-a)^{-1}(c-a)^{-1}+a^{-n}(a-b)^{-1}(c-b)^{-1}+c^{-n}(a-c)^{-1}(b-c)^{-1}\} \\ & -\frac{c}{\delta}\{a^{-n+1}(b-a)^{-1}(c-a)^{-1}+b^{-n+1}(a-b)^{-1}(c-b)^{-1}+c^{-n+1}(a-c)^{-1}(b-c)^{-1}\}, \end{aligned}$$

formule où l'on peut faire n fractionnaire.

Je ne m'arrêterai pas plus long-temps à ces recherches : et j'observerai en général, qu'en appliquant le calcul des dérivations aux objets principaux traités dans le beau mémoire *sur les suites* de LAPLACE (Mém. de Paris, 1779),

on pourra rendre plus faciles la plupart des développemens, même en suivant la marche de ce grand Géomètre.

219. Appliquons ces différentes méthodes à un exemple, afin de comparer le terme général que l'on obtient sans décomposer en facteurs, avec celui que l'on trouve en conséquence de cette décomposition.

Exemple.

On demande l'expression du sinus et du cosinus d'un angle multiple quelconque nt, en cosinus de l'angle simple t.

I.° On sait qu'on a généralement, quel que soit n, entier ou fractionnaire,

$$\begin{aligned} \sin nt &= 2\cos t.\sin(n-1)t - \sin(n-2)t, \\ \cos nt &= 2\cos t.\cos(n-1)t - \cos(n-2)t; \end{aligned} \quad (*) \ldots\ldots (1)$$

ce qui fait voir que les sinus et cosinus des angles en progression équidifférente (arithmétique) forment des séries récurrentes du second ordre, dont l'équation de relation est

$$A_n - 2\cos t.A_{n-1} + A_{n-2} = 0, \qquad \ldots.(2)$$

et partant la fraction génératrice

$$\frac{a+bx}{\alpha - \beta x + \gamma x^2}, \ldots.(3), \text{ ou bien } \frac{A+(B-2\cos t\,A)x}{1-2\cos t.x+x^2}. \qquad \ldots..(4)$$

Cette fraction, à cause que pour les sinus on a $A = \sin 0t = 0$, $B = \sin t$, et pour les cosinus, $A = \cos 0t = 1$, $B = \cos t$, donne les deux suivantes, pour les sinus, $\frac{\sin t.x}{1-2\cos t.x+x^2}$ .. (5), et pour les cosinus, $\frac{1-\cos t.x}{1-2\cos t.x+x^2}$ ... (6)
Le coëfficient de x^n dans la fraction (3) est $A_n = a\,\mathfrak{p}^n.\alpha^{-1} + b\,\mathfrak{p}^{n-1}.\alpha^{-1}$, où il faudra faire, dans les dérivations, $\text{D}.\alpha = -\beta$ et ensuite $\text{D}.\beta = -\gamma$,

---

(*) Comme les formules que nous allons trouver seront démontrées généralement par les méthodes même qui y conduisent, on peut désirer que nous démontrions aussi les équations (1) dont nous partons; d'autant plus qu'il y a d'excellens ouvrages où l'on s'est contenté de traiter par induction une partie de la théorie des fonctions angulaires.

On démontre dans tous les traités de Trigonométrie que, le rayon étant $= 1$, on a

$$\sin(r+t) = \sin r.\cos t + \cos r.\sin t, \qquad \cos(r+t) = \cos r.\cos t - \sin r.\sin t;$$

je fais r successivement $= (n-1)t$, et $= (n-2)t$, et ces formules deviennent

$$\sin nt = \sin(n-1)t.\cos t + \cos(n-1)t.\sin t, \qquad \cos nt = \cos(n-1)t.\cos t - \sin(n-1)t.\sin t;$$
$$\sin(n-1)t = \sin(n-2)t.\cos t + \cos(n-2)t.\sin t, \qquad \cos(n-1)t = \cos(n-2)t.\cos t - \sin(n-2)t.\sin t;$$

ces deux dernières formules étant substituées convenablement dans les deux avant-dernières donnent les formules (1) ci-dessus.

à cause que β dans le dénominateur a le signe —. En mettant à présent au lieu de a et b leurs valeurs relatives aux sinus et aux cosinus, on a

$$\sin nt = \sin t.\, \mathfrak{D}^{n-1}.\, \alpha^{-1} \ldots (7), \qquad \cos nt = \mathfrak{D}^{n}.\, \alpha^{-1} - \cos t.\, \mathfrak{D}^{n-1}.\, \alpha^{-1} \ldots (8)$$

Pour développer $\mathfrak{D}^{n}.\,\alpha^{-1}$, j'ai par le numéro 20, en écrivant la série à rebours,

$$\mathfrak{D}^{n}.\alpha^{-1} = \alpha^{-n-1}\beta^{n} + \alpha^{-n}\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \alpha^{-n+1}\mathfrak{D}^{2}.\beta^{n-3} + \alpha^{-n+2}\mathfrak{D}^{3}.\beta^{n-5} + \text{etc.}$$

et en développant ultérieurement, γ étant une dernière quantité,

$$\mathfrak{D}^{n}.\alpha^{-1} = \alpha^{-n-1}.\beta^{n} - \alpha^{-n}(n-1)\beta^{n-2}\gamma + \alpha^{-n+1}\frac{n-2.\,n-3}{1.\ 2}\beta^{n-4}\gamma^{2}$$
$$- \alpha^{-n+2}\frac{n-3.\,n-4.\,n-5}{1.\ 2.\ 3}\beta^{n-6}\gamma^{3} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots (9)$$

Pour avoir $\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha^{-1}$, il suffit de mettre dans cette série $n-1$, au lieu de n. Ces séries se continuent jusqu'à ce que l'exposant de β devient négatif.

Il ne reste plus qu'à mettre au lieu de α, β, γ leurs valeurs 1, $2\cos t$, 1, et l'on aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$\sin nt = \quad \ldots\ldots (10)$$
$$\sin t.\left\{(2\cos t)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos t)^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\ 2}(2\cos t)^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-7} + \text{etc.}\right\};$$

$$\cos nt =$$
$$(2\cos t)^{n} - (n-1)(2\cos t)^{n-2} + \frac{n-2.\,n-3}{1.\ 2}(2\cos t)^{n-4} - \frac{n-3.\,n-4.\,n-5}{1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-6} + \text{etc.}$$
$$- \cos t.\left\{(2\cos t)^{n-1} - (n-2)(2\cos t)^{n-3} + \frac{n-3.\,n-4}{1.\ 2}(2\cos t)^{n-5} - \frac{n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-7} + \text{etc.}\right\},$$

et en réduisant ces deux séries en une seule, ce qui s'exécute sans peine,

$$\cos nt = \quad \ldots\ldots (11)$$
$$\frac{1}{2}\left\{(2\cos t)^{n} - n(2\cos t)^{n-2} + \frac{n.\,n-3}{1.\ 2}(2\cos t)^{n-4} - \frac{n.\,n-4.\,n-5}{1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-6} + \text{etc.}\right\}.$$

Les séries (10) et (11) résolvent la question; elles se terminent toujours, puisque, conformément au développement (9), il ne faut les continuer que jusqu'aux exposans négatifs des β; mais comme on n'a pas décomposé en facteurs simples le dénominateur des fractions génératrices, ces séries ne peuvent servir que pour n nombre entier positif.

II. Cherchons présentement les séries pour n entier négatif. On aura, par le numéro 209, pour les fractions génératrices

$$\text{du sinus},\ \frac{-\sin t.\,x^{-1}}{1 - 2\cos t.\,x^{-1} + x^{-2}},\ \text{du cosinus},\ \frac{\cos t.\,x^{-1} - x^{-2}}{1 - 2\cos t.\,x^{-1} + x^{-2}}.$$

Donc, les coëfficiens du dénominateur étant les mêmes que précédemment, on a $A_{-n} = \sin(-nt) = -\sin t.\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha^{-1}$, $A_{-n} = \cos(-nt) = \cos t.\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha^{-1} - \mathfrak{D}^{n-2}.\alpha^{-1}$. Or $\mathfrak{D}^{n-1}.\alpha^{-1}$ donne la même série que ci-dessus, et l'on a $\mathfrak{D}^{n-2}.\alpha^{-1}$ en mettant

dans celle de $p^{n}.\alpha^{-1}$, $n-2$ au lieu de n. Si l'on écrit les développemens, et qu'ensuite on réduise en une les deux séries qu'on aura pour $\cos(-nt)$; on trouvera pour $\sin(-nt)$ la même série (5) que l'on a eu pour $\sin nt$, à cela près que chaque terme aura un signe contraire; et pour $\cos(-nt)$ on trouvera absolument la même série (6) qu'on a eu pour $\cos nt$; elles se termineront de même l'une et l'autre, car les n y seront des nombres entiers positifs. Cela s'accorde avec ce qu'on sait d'ailleurs, savoir que $\sin(-nt) = -\sin nt$, et $\cos(-nt) = \cos nt$.

III. Si l'on veut des expressions finies qui servent pour toutes les valeurs de n, positives, négatives, fractionnaires, il faut décomposer le dénominateur $1 - 2\cos t.x + x^2$ en facteurs simples. Ce dénominateur égalé à zéro donne une équation du second degré, dont la solution fait voir que les facteurs sont

$$\cos t + \sqrt{\{(\cos t)^2 - 1\}} - x \qquad \cos t - \sqrt{\{(\cos t)^2 - 1\}} - x,$$

ou bien

$$\cos t + \sqrt{-1}.\sin t - x, \qquad \cos t - \sqrt{-1}.\sin t - x.$$

Je représente l'un par $a - x$, et l'autre par $b - x$; la fraction génératrice (5) donne, en vertu du n.° 217,

$$\sin nt = a^{-n-1}.\sin t.a(b-a)^{-1} + b^{-n-1}.\sin t.b(a-b)^{-1},$$

et en remettant à la place de a et de b leurs valeurs et réduisant, on trouve

$$\sin nt = \frac{(\cos t + \sqrt{-1}.\sin t)^{-n} - (\cos t - \sqrt{-1}.\sin t)^{-n}}{-2\sqrt{-1}} \quad \ldots (12)$$

La fraction (6), en vertu du même numéro 217, donne

$$\cos nt = a^{-n-1}(1 - \cos t.a)(b-a)^{-1} + b^{-n-1}(1 - \cos t.b)(a-b)^{-1},$$

ce qui, en subsituant pour a et b leurs valeurs, se réduit à

$$\cos nt = \frac{(\cos t + \sqrt{-1}.\sin t)^{-n} + (\cos t - \sqrt{-1}.\sin t)^{-n}}{2}. \quad \ldots (13)$$

On a $\cos t + \sqrt{-1}.\sin t = \dfrac{1}{\cos t - \sqrt{-1}.\sin t}$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier en multipliant par le dénominateur; d'où il s'ensuit qu'on pourra donner aux formules (12) et (13) des exposans positifs, et l'on aura ainsi

$$\sin nt = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{(\cos t + \sqrt{-1}.\sin t)^n - (\cos t - \sqrt{-1}.\sin t)^n\}, \quad \ldots (14)$$

$$\cos nt = \tfrac{1}{2}\{(\cos t - \sqrt{-1}.\sin t)^n + (\cos t + \sqrt{-1}.\sin t)^n\}. \quad \ldots (15)$$

Ce sont les formules connues, lesquelles sont vraies pour n quelconque, positif, négatif, et fractionnaire (*).

(*) EULER a donné les séries (10) et (11) dans le chapitre 14.e de l'*Introduction etc.*, sans les démontrer d'une manière générale; il a remarqué ensuite dans un mémoire qui vient d'être publié dans le tome IX

220. Lorsque le dénominateur d'une fraction génératrice a des facteurs imaginaires, comme ces facteurs vont toûjours deux à deux, en prenant le produit de deux facteurs imaginaires correspondans, on évite les expressions imaginaires, et la fraction génératrice se décompose en fractions partielles de la forme suivante

$$\frac{R + Sx}{1 - 2\cos t . x + x^2};$$

voyez le chapitre 13.ᵉ de l'*Introduction etc.* d'EULER. Pour avoir sur-le-champ le coëfficient de x^n dans le développement, je représente le dénominateur par $\alpha - \beta x + \gamma x^2$, et j'ai

$$A_n = R\,\mathfrak{p}^n . \alpha^{-1} + S\,\mathfrak{p}^{n-1} . \alpha^{-1}.$$

Or, en comparant avec l'équation (7) du numéro précédent, où $\mathfrak{p}^n . \alpha^{-1}$, $\mathfrak{p}^{n-1} . \alpha^{-1}$ désignent la même chose qu'ici, à cause que les dénominateurs sont les mêmes dans les deux cas, l'équation (7) donne $\mathfrak{p}^{n-1} . \alpha^{-1} = \frac{\sin nt}{\sin t}$,

---

des *nova Acta* de Pétersbourg, que ces séries ne sont vraies que pour les cas où n est un nombre entier positif, pourvu qu'on ait soin de rejeter tous les termes où l'exposant de $2\cos t$ devient négatif; que, pour avoir des expressions généralement vraies de $\sin nt$ et $\cos nt$, il faut à chacune de ces séries en joindre une autre où les exposans de $2\cos t$ soient négatifs, et il a trouvé pour ces expressions

$$\sin nt = \sin t . \left\{ \begin{array}{l} (2\cos t)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\cos t)^{n-3} + \frac{n-3 . n-4}{1 . 2}(2\cos t)^{n-5} - \frac{n-4 . n-5 . n-6}{1 . 2 . 3}(2\cos t)^{n-7} + \text{etc.} \\ -(2\cos t)^{-n-1} - \frac{n+2}{1}(2\cos t)^{-n-3} - \frac{n+3 . n+4}{1 . 2}(2\cos t)^{-n-5} - \frac{n+4 . n+5 . n+6}{1 . 2 . 3}(2\cos t)^{-n-7} - \text{etc.} \end{array} \right\}, \ldots (16)$$

$$\cos nt = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} (2\cos t)^{n} - n(2\cos t)^{n-2} + \frac{n . n-3}{1 . 2}(2\cos t)^{n-4} - \frac{n . n-4 . n-5}{1 . 2 . 3}(2\cos t)^{n-6} + \text{etc.} \\ +(2\cos t)^{-n} + n(2\cos t)^{-n-2} + \frac{n . n+3}{1 . 2}(2\cos t)^{-n-4} + \frac{n . n+4 . n+5}{1 . 2 . 3}(2\cos t)^{-n-6} + \text{etc.} \end{array} \right\} . \ldots (17)$$

Il a démontré généralement que pour n entier positif ces expressions se terminent toujours, parce que les termes à exposans négatifs des premières séries sont tous détruits par les secondes. Dans les cas de n entier négatif, ce sont les premières séries qui détruisent les termes à exposans négatifs des secondes. Quand n est fractionnaire, ces séries vont à l'infini.

Ces expressions (16) et (17) ne sont autre chose que les développemens suivant les puissances de $2\cos t$ des formules (14) et (15) ci-dessus; comme on peut le voir dans le mémoire cité d'EULER, et mieux encore dans un autre du professeur FUSS, inséré dans le même volume de l'Académie de Pétersbourg. Ainsi il ne faut pas s'étonner si elles s'étendent à toutes les valeurs de n.

La manière dont nous avons résolu la question proposée nous paroît avoir l'avantage, 1.° de démontrer généralement les séries (10) et (11); 2.° de faire voir comment il faut les employer dans le cas de n négatif entier; 3.° de faire voir d'avance qu'elles ne sont plus vraies pour n fractionnaire, et d'indiquer la véritable cause de cette limitation; 4.° enfin, de démontrer facilement les formules finies vraies pour tous les cas.

On en conclud encore que, puisque les séries pour $\sin nt$ et $\cos nt$, que donne EULER au chapitre VIII, n.° 133, de l'*Introduction*, et FUSS, au §. 12 du mémoire cité, ne sont que le simple développement des formules (14) et (15), ces séries sont aussi vraies quel que soit n.

et, en mettant $n+1$ au lieu de n, $\mathfrak{d}^n.\alpha^{-1} = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$; d'où l'on tire sur-le champ, pour le coëfficient de x^n,

$$A_n = R\,\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} + S\,\frac{\sin nt}{\sin t},$$

comme le trouve Euler dans le chapitre cité.

S'il y a plusieurs facteurs imaginaires égaux, on aura une suite de fractions partielles de la forme

$$\frac{R + Sx}{(1 - 2\cos t.x + x^2)^k};$$

or, au moyen de nos formules, on aura sur-le-champ pour le coëfficient de x^n

$$A_n = R\mathfrak{d}^n.\alpha^{-k} + S\mathfrak{d}^{n-1}.\alpha^{-k}.$$

Rien n'est si aisé que de développer $\mathfrak{d}^n.\alpha^{-k}$, le polynome étant $\alpha - \beta x + \gamma x^2$, car il suffit d'employer nos formules en faisant $\mathrm{D}.\alpha = -\beta$, et $\mathrm{D}.\beta = -\gamma$; on a ainsi, par le n.° 20,

$$\mathfrak{d}^n.\alpha^{-k} = k\alpha^{-k-1}\mathfrak{d}^{n-1}.\beta + \frac{k.k+1}{1.\ 2}\alpha^{-k-2}\mathfrak{d}^{n-2}.\beta^2 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{k.k+1\ldots(k+n-2)}{1.\ 2\ldots(n-1)}\alpha^{-k-n+1}\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \frac{k.k+1\ldots(k+n-1)}{1.\ 2\ldots\ldots n}\alpha^{-k-n}.\beta^n.$$

J'écris la série à rebours, je continue les développemens, et je mets en même temps au lieu de α, β, γ leurs valeurs 1, $2\cos t$, 1; ensuite, pour avoir le développement de $\mathfrak{d}^{n-1}.\alpha^{-k}$, il suffira de changer dans la série trouvée n en $n-1$. On aura ainsi

$$A_n =$$
$$R\left\{\begin{array}{l} \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.\ 2\ldots\ldots n}(2\cos t)^n - \frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.\ 2\ldots(n-2).\ 1}(2\cos t)^{n-2} \\ + \frac{k(k+1)\ldots(k+n-3)}{1.\ 2\ldots(n-4).\ 1.\ 2}(2\cos t)^{n-4} - \frac{k(k+1)\ldots(k+n-4)}{1.\ 2\ldots(n-6).\ 1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-6} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$
$$+ S\left\{\begin{array}{l} \frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.\ 2\ldots(n-1)}(2\cos t)^{n-1} - \frac{k(k+1)\ldots(k+n-3)}{1.\ 2\ldots(n-3).\ 1}(2\cos t)^{n-3} \\ + \frac{k(k+1)\ldots(k+n-4)}{1.\ 2\ldots(n-5).\ 1.\ 2}(2\cos t)^{n-5} - \frac{k(k+1)\ldots(k+n-5)}{1.\ 2\ldots(n-7).\ 1.\ 2.\ 3}(2\cos t)^{n-7} + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

séries qu'on continuera jusqu'à ce que les exposans de $2\cos t$ deviennent négatifs.

J'avertirai, en terminant ce paragraphe, dans lequel j'ai traité des séries récurrentes simples dont la théorie a été inventée pour résoudre plusieurs problèmes sur les probabilités, que les ouvrages de Moivre et de Montmort sur les hasards offrent différens cas où le calcul des dérivations s'emploie avec avantage, soit en conservant les analyses de ces auteurs, soit en s'en écartant.

§. II.

Des séries récurrentes doubles et triples.

221. La série suivante

$$\begin{array}{rl} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 & + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + D'x^2y & + \text{etc.} \\ C''y^2 + D''xy^2 & + \text{etc.} \\ + D'''y^3 & + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots (1)$$

a toujours été mise jusqu'ici sous cette forme triangulaire ; on peut aussi la mettre sous la forme suivante de rectangle

$$\begin{array}{lllll} A & + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + \text{etc.} \\ + B'y & + C'xy & + D'x^2y & + E'x^3y & + \text{etc.} \\ + C''y^2 & + D''xy^2 & + E''x^2y^2 & + F''x^3y^2 & + \text{etc.} \\ + D'''y^3 & + E'''xy^3 & + F'''x^2y^3 & + G'''x^3y^3 & + \text{etc.} \\ + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.} & + \text{etc.}, \end{array} \quad \ldots\ldots (2)$$

et toutes les fois que par la suite nous parlerons de termes de la première, de la seconde, etc., lignes horizontales, de la première, de la seconde, etc., lignes verticales, nous supposerons que l'on considère la série comme arrangée suivant la forme de rectangle.

Si l'on veut se contenter d'écrire les coëfficiens, et les caractériser par des indices inférieurs (n.° 130), en les disposant sous forme de rectangle, on aura le tableau suivant, où, pour plus de clarté, nous avons laissé les indices zéro, quoique, pour abréger, nous les omettions ordinairement sans inconvénient,

$$\begin{array}{lllllll} A_{0,0} & A_{1,0} & A_{2,0} & A_{3,0} & \text{etc.} & A_{m,0} & \text{etc.} \\ A_{0,1} & A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & \text{etc.} & A_{m,1} & \text{etc.} \\ A_{0,2} & A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} & \text{etc.} & A_{m,2} & \text{etc.} \\ A_{0,3} & A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} & \text{etc.} & A_{m,3} & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \\ A_{0,n} & A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} & \text{etc.} & A_{m,n} & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots (3)$$

Comme ces séries (2) peuvent être continuées des côtés des exposans de x et des exposans de y négatifs, de cette manière :

	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	
3.e région.	etc.	$A_{-2,-2}x^{-2}y^{-2}$	$A_{-1,-2}x^{-1}y^{-2}$	$A_{,-2}y^{-2}$	$A_{1,-2}xy^{-2}$	etc.	4.e région.
	etc.	$A_{-2,-1}x^{-2}y^{-1}$	$A_{-1,-1}x^{-1}y^{-1}$	$A_{,-1}y^{-1}$	$A_{1,-1}xy^{-1}$	etc.	...(4)
	etc.	$A_{-2,}x^{-2}$	$A_{-1,}x^{-1}$	A	Bx	etc.	
2.de région.	etc.	$A_{-2,1}x^{-2}y$	$A_{-1,1}x^{-1}y$	$B'y$	$C'xy$	etc.	1.re région.
	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc. ;	

on distingue quatre régions. Nous nommerons *première région* celle des exposans de x et de y positifs, ou des indices m et n positifs; *seconde région*, celle des exposans de x négatifs et des exposans de y positifs; *troisième région*, celle des exposans de x et y à la fois négatifs; et *quatrième région*, celle des exposans de x positifs et des exposans de y négatifs.

222. Supposons qu'on ait constamment entre ces sortes de termes ou de coëfficiens une équation de relation de cette forme

$$\begin{aligned} 0 = {} & \alpha A_{m,n} + \beta A_{m-1,n} + \gamma A_{m-2,n} + \text{etc.} \\ & + \beta' A_{m,n-1} + \gamma' A_{m-1,n-1} + \text{etc.} + \alpha_{r,s-1} A_{m-r,n-s+1} \qquad \ldots (5) \\ & + \gamma'' A_{m,n-2} + \text{etc.} + \alpha_{r-1,s} A_{m-r+1,n-s} + \alpha_{r,s} A_{m-r,n-s}, \end{aligned}$$

α, β, β', γ, γ', γ'', etc., $\alpha_{r,s}$ étant des quantités quelconques constantes et données : la série dans laquelle chaque terme dépend de ceux qui le précèdent de la manière exprimée par cette équation, sera une *série récurrente double*.

Il est aisé, d'après cela, de se faire une idée de la nature des séries récurrentes *triples*, *quadruples*, sans qu'il soit nécessaire de nous y arrêter.

Nous nous proposons de trouver le terme général des séries récurrentes doubles, quel que soit l'ordre de l'équation de relation tant par rapport à m que par rapport à n. Nous supposerons d'abord que α ne soit pas zéro, et que les séries soient renfermées dans la première région; c'est-à-dire, que les termes de la série continuée dans les autres régions, soient tous nuls ou ne doivent pas entrer dans l'équation de relation, ce qui a lieu dans un grand nombre de problèmes : nous passerons ensuite aux cas où les séries s'étendent dans les régions des exposans négatifs et à ceux où α est zéro. Notre méthode consiste à former la fraction génératrice double, et à trouver l'expression d'un coëfficient

coëfficient quelconque de son développement au moyen des dérivations. Si cette méthode n'est pas exempte de difficultés dans les derniers cas, elle réussit ordinairement dans les premiers, et à la facilité elle joint l'avantage d'être uniforme, quel que soit le nombre des termes de l'équation de relation.

(I.)

PROBLÈME.

223. Etant donnée l'équation de relation quelconque d'une série récurrente double, renfermée dans la région des exposans ou indices positifs, et α n'étant point zéro; trouver l'expression du terme général de la série en α, ϵ, ϵ', γ, γ' γ'', etc., coëfficiens de l'équation de relation.

Pour mieux fixer les idées, commençons par un cas particulier. Supposons que l'équation de relation soit

$$\left.\begin{array}{l}\alpha A_{m,n} + \epsilon A_{m-1,n} \\ \quad + \epsilon' A_{m,n-1} + \gamma' A_{m-1,n-1}\end{array}\right\} = 0. \qquad \ldots\ldots (6)$$

Je commence par chercher la fraction génératrice double de cette série, en me conduisant d'une manière semblable à celle qui a donné la fraction génératrice des séries récurrentes simples. J'observe d'abord qu'on peut mettre l'équation donnée sous cette forme rectangulaire,

$$\left.\begin{array}{ll}\gamma' A_{m-1,n-1} & + \epsilon' A_{m,n-1} \\ \epsilon A_{m-1,n} & + \alpha A_{m,n}\end{array}\right\} = 0, \qquad \ldots\ldots (7)$$

en l'écrivant à rebours. Si l'on compare le premier membre de cette équation (7) ou (6) avec les formules des numéros 175, 176, 177, ou bien encore si l'on promène l'échelle $\begin{array}{l}\gamma' + \epsilon' \\ + \epsilon + \alpha\end{array}$ sur le tableau (5) du numéro 221, on verra que le premier membre n'est autre chose que le développement de $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\varphi A)$, c'est-à-dire, le coëfficient de $x^m y^n$ dans le développement du produit

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha + \epsilon x \\ \quad + \epsilon' y + \gamma' xy\end{array}\right\} \times \left(\begin{array}{lllll}A + Bx + Cx^2 & + Dx^3 & + \text{etc.} \\ \quad + B'y + C'xy & + D'x^2y & + \text{etc.} \\ \qquad + C'y^2 & + D''xy^2 & + \text{etc.} \\ \qquad & + D'''y^3 & + \text{etc.} \\ \qquad & & + \text{etc.}\end{array}\right).$$

Représentons le développement de ce produit par la série double

$$\begin{array}{llllll} a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} & & & & & \\ \quad + b'y + c'xy + d'x^2y + \text{etc.} & & & & & \\ \quad\quad + c''y^2 + d''xy^2 + \text{etc.} & & & & & \ldots\ldots(8) \\ \quad\quad\quad + d'''y^3 + \text{etc.} & & & & & \\ \quad\quad\quad\quad + \text{etc.}, & & & & & \end{array}$$

et nous aurons l'équation suivante,

$$\frac{\begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} \\ \quad + b'y + c'xy + d'x^2y + \text{etc.} \\ \quad\quad + c''y^2 + d''xy^2 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + d'''y^3 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad\quad + \text{etc.} \end{array}}{\begin{array}{l} \alpha + \beta x \\ \quad + \beta'y + \gamma'xy \end{array}} = \begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \\ \quad + B'y + C'xy + D'x^2y + \text{etc.} \\ \quad\quad + C'y^2 + D''xy^2 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + D'''y^3 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad\quad + \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots(9)$$

Le second membre de cette équation représente par ses coëfficiens les termes successifs de la série récurrente : le premier membre sera la fraction génératrice de cette série, après que nous aurons déterminé les coëfficiens du numérateur de manière que l'équation de relation (6), dont le second membre est zéro, soit satisfaite.

Il résulte de là que la plupart des coëfficiens du numérateur doivent être zéro; voyons quels sont ceux qui restent et qui demeurent indéterminés.

224. A cet effet, je multiplie l'équation (9) par son dénominateur; le second membre deviendra

$$\begin{array}{l} \alpha A + (\alpha B + \beta A)x + (\alpha C + \beta B)x^2 + (\alpha D + \beta C)x^3 + \text{etc.} \\ \quad + (\alpha B' + \beta' A)y + \left\{\begin{array}{l} \alpha C' + \beta B' \\ + \beta' B + \gamma' A \end{array}\right\} xy + \left\{\begin{array}{l} \alpha D' + \beta C' \\ + \beta' B' + \gamma' B \end{array}\right\} x^2y + \text{etc.} \\ \quad\quad + (\alpha C'' + \beta' B')y^2 + \left\{\begin{array}{l} \alpha D'' + \beta C'' \\ + \beta' C' + \gamma' B' \end{array}\right\} xy^2 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + (\alpha D''' + \beta' C'')y^3 + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad\quad + \text{etc.}, \end{array}$$

produit qu'il est facile de continuer par dérivation. Or il est aisé de voir

que dans ce produit les coëfficiens de x^0, x, x^2, x^3, etc. ne remplissent pas toute l'étendue de l'équation de relation; qu'il en est de même de ceux de y, y^2, y^3, etc.; mais que tous les autres coëfficiens remplissent l'équation de relation, et qu'ils sont par conséquent zéro, en vertu de cette équation. D'où il résulte que, puisque le produit est égal au numérateur de la fraction génératrice, il ne se conserve dans ce numérateur que deux lignes indéfinies, savoir la première ligne horizontale et la première oblique, l'une toute en x sans y, l'autre toute en y sans x. Ainsi la fraction génératrice sera en général

$$\frac{\begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} \\ \quad + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + \text{etc.} \end{array}}{\begin{array}{l} \alpha + \mathit{6}x \\ \quad + \mathit{6}'y + \gamma'xy \end{array}} \quad \ldots\ldots (10)$$

Il est aisé de voir que si le terme $\gamma' A_{x-1,x-1}$ manquoit dans l'équation de relation (6), c'est-à-dire, si γ' étoit zéro, le numérateur de la fraction génératrice seroit formé en général des mêmes deux lignes, et la fraction seroit précisément la même que celle (10) que nous venons de trouver, au terme $\gamma'y$ près qui disparoît dans ce cas.

225. Les valeurs de a, b, c, d, etc., b', c'', d''', etc. doivent être données immédiatement par les conditions de la question, ou bien il faut que l'on connoisse deux lignes de termes de la série récurrente, qui servent à déterminer ces valeurs, comme les termes de la première ligne horizontale et ceux de la première verticale (n.° 221); car alors on aura facilement a, b, c, d, etc., b', c'', d''', etc.

En effet, l'équation (9) du n.° 223 donne $a = \alpha A$; d'où l'on tire $b = \text{D}.(\alpha A)$, $c = \text{D}^2.(\alpha A)$, $d = \text{D}^3.(\alpha A)$, etc.; $b' = \text{D}'.(\alpha A)$, $c'' = \text{D}'^2.(\alpha A)$, $d''' = \text{D}'^3.(\alpha A)$, etc.: en développant, et observant que $\mathit{6}$ et γ' sont des dernières dérivées par rapport à D, et $\mathit{6}'$ et γ' des dernières dérivées par rapport à D', on a

$$\begin{array}{ll} a = \alpha A, & \\ b = \alpha B + \mathit{6}A, & b' = \alpha B' + \mathit{6}'A, \\ c = \alpha C + \mathit{6}B, & c'' = \alpha C'' + \mathit{6}'B', \\ d = \alpha D + \mathit{6}E, & d''' = \alpha D''' + \mathit{6}'C'', \\ \text{et généralement} & \text{et généralement} \\ a_r = \alpha A_r + \mathit{6}A_{r-1}, & a_{,r} = \alpha A_{,r} + \mathit{6}'A_{,r-1}; \end{array} \quad \ldots\ldots (11)$$

c'est aussi ce que donne le produit développé du n.° 224.

On peut trouver à la fois et l'espèce et les valeurs des termes à conserver au numérateur, en promenant simplement sur le tableau (3) du n.° 221, après y avoir mis les valeurs données par les conditions de la question, l'échelle de relation $\begin{matrix} \gamma' + \mathsf{C}' \\ + \mathsf{C} + \alpha \end{matrix}$, séparée de l'équation de relation (7). C'est même dans cette vue que nous donnons à l'équation de relation la forme de rectangle (7), et nous en userons ainsi à l'avenir pour les autres équations de relation. Chaque position de l'échelle sera un cas particulier de l'équation de relation, et les positions où l'équation de relation n'est point satisfaite donnent les valeurs des termes à conserver au numérateur.

226. La fraction génératrice étant ainsi déterminée, rien n'est si facile que de calculer immédiatement un terme quelconque de son développement (n.° 187). La fraction (10) donne, au moyen de nos formules, pour le terme général de la série récurrente,

$$A_{m,n} \doteq \mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . (a\alpha^{-1}) = \qquad \ldots . (12)$$

$$a\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1} + b\mathrm{D}^{m-1} . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1} + c\mathrm{D}^{m-2} . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1} + d\mathrm{D}^{m-3} . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1}$$
$$+ \text{etc.} + a_{m-2,}\mathrm{D}^2 . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1} + a_{m-1,}\mathrm{D} . \mathrm{D}'^n . \alpha^{-1} + a_{m,}\mathrm{D}'^n . \alpha^{-1}$$
$$+ b'\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^{n-1} . \alpha^{-1} + c''\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^{n-2} . \alpha^{-1} + d'''\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^{n-3} . \alpha^{-1} + \text{etc.}$$
$$+ a_{,n-2}\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^2 . \alpha^{-1} + a_{,n-1}\mathrm{D}^m . \mathrm{D}' . \alpha^{-1} + a_{,n}\mathrm{D}^m . \alpha^{-1},$$

formule qui est toujours composée d'un nombre fini de termes, et qu'il est aisé de développer ultérieurement, sur tout si l'on en écrit les séries à rebours: on se souviendra, dans le développement, que C et γ' sont des dernières dérivées par rapport à D, et C' et γ' par rapport à D'.

227. La formule que nous venons de trouver peut être mise sous une forme un peu différente, en ordonnant les développemens suivant A, B, C, etc., B', C', etc., c'est-à-dire suivant les termes des lignes données de la série. Par là les résultats s'approchent davantage de ceux auxquels on parvient par d'autres méthodes.

Ainsi, tout demeurant comme dans les numéros précédens, si l'on met au lieu de a, b, c, etc. b', c'', d''', etc. leurs valeurs données par les équations (11) et qu'on ordonne comme nous venons de le dire, on aura pour le terme général

$A_{m,n} =$

$$A_{m,n} =$$

$$\begin{aligned}
& A\{\alpha \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} + \beta'\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha^{-1}\} \\
+ & B\{\alpha \mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}\} \\
+ & C\{\alpha \mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}\} \\
+ & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & A_{m-1,}\{\alpha \mathfrak{D}.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} + \beta\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}\} \\
+ & A_{m,}.\alpha\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} \\
+ & B'\{\alpha \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\alpha^{-1} + \beta'\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha^{-1}\} \\
+ & C''\{\alpha \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-2}.\alpha^{-1} + \beta'\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-3}.\alpha^{-1}\} \\
+ & \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & A_{,n-1}\{\alpha \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'.\alpha^{-1} + \beta'\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1}\} \\
+ & A_{,n}.\alpha\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

228. Appliquons tout de suite cette solution à un exemple.

EXEMPLE I.er (*)

Étant donnée l'équation de relation suivante, dans laquelle $q = 1 - p$,

$$\left.\begin{array}{r} - qA_{m,n-1} \\ - pA_{m-1,n} + A_{m,n} \end{array}\right\} = 0\,,$$

avec les conditions, 1.° que $A_{m,0} = 1$ tant que m est un nombre entier positif quelconque, et $A_{m,0} = 0$ si $m = 0$; 2.° que $A_{0,n} = 0$ lorsque n est zéro ou un entier positif quelconque ; 3.° que la série soit renfermée dans la région des m et n positifs, c'est-à-dire, que $A_{m,n} = 0$ toutes les fois que m ou n devient négatif : on demande l'expression du terme général de la série récurrente.

En comparant avec l'équation du n.° 223, on voit qu'ici $\gamma' = 0$, et que partant la fraction génératrice sera de cette forme,

$$\frac{\begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} \\ \quad + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + e^{IV}y^4 + \text{etc.} \end{array}}{\alpha + \beta x + \beta' y},$$

(*) Voici une question des probabilités, dont cet exemple est la traduction analytique : « On suppose » qu'à chaque coup il puisse arriver deux événemens dont les probabilités respectives sont p et q; et on » demande le sort d'un joueur qui parieroit d'amener, dans un nombre de coups indéterminé, le second » des deux événemens n fois avant que le premier fût arrivé m fois. »
(Voyez le mémoire cité de LAGRANGE, dans le recueil de Berlin pour 1775, page 246.)

où il faut déterminer a, b, c, d, etc. b', c'', d''', etc., au moyen des équations (11) du n.° 225, par les conditions 1.re et 2.de ci-dessus. Ces conditions donnent $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 1$, et généralement $A_{r,} = 1$, et $B' = 0$, $C'' = 0$, $D''' = 0$, et généralement $A_{,r} = 0$: on a de plus $\alpha = 1$, $\beta = -p$, $\beta' = -q = -(1-p)$. Les équations (11) donneront $a = 0$; $b = 1$, $c = 1 - p$, $d = 1 - p$, $e = 1 - p$, etc. $a_{r,} = 1 - p$; $b' = 0$, $c'' = 0$, $d''' = 0$, etc. $a_{,r} = 0$. Ainsi la fraction génératrice se réduit à

$$\frac{x + (1-p)x^2 + (1-p)x^3 + (1-p)x^4 + \text{etc.}}{1 - px - qy}.$$

La formule (12) du n.° 226 donnera donc pour le terme général demandé, en écrivant la série à rebours,

$$A_{m,n} =$$

$$(1-p)(\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1} + \text{D}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^{2}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^{3}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \mathfrak{p}^{m-2}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1}) \\ + 1.\mathfrak{p}^{m-1}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1}.$$

Le développement réduit de cette formule se trouve facilement; car, puisque β et β' sont des dernières quantités, dont les dérivées sont zéro, on aura $\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1} = \pm\, \alpha^{-n-1}\beta'^{n}$, où l'on prendra le signe + ou —, suivant que n sera pair ou impair. De là on déduira $\text{D}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{p}^{2}.\mathfrak{p}'^{n}.\alpha^{-1}$, etc. en prenant les dérivées divisées successives D de $\pm\, \alpha^{-n-1}\beta'^{n}$, α seul variant de β : on aura ainsi

$$A_{m,n} =$$

$$(1-p)\left\{\begin{array}{l} \pm\,\alpha^{-n-1}\beta'^{n} \mp (n+1)\alpha^{-n-2}\beta\beta'^{n} \pm \frac{n+1.n+2}{1.\;2}\alpha^{-n-3}\beta^{2}\beta'^{n} \\ \qquad \mp \text{etc.} \pm \frac{n+1.n+2\ldots.(n+m-2)}{1.\;2\ldots\ldots(m-2)}\alpha^{-n-m+1}\beta^{m-2}.\beta'^{n} \end{array}\right\}$$
$$\mp \frac{n+1.n+2\ldots\ldots(n+m-1)}{1.\;2\ldots\ldots(m-1)}\alpha^{-n-m}\beta^{m-1}\beta'^{n}.$$

En mettant présentement à la place de α, β, β' leurs valeurs 1, $-p$, $-q$, on trouve

$$A_{m,n} =$$

$$q^{n}(1-p)\left\{\begin{array}{l} 1 + (n+1)p + \frac{n+1.n+2}{1.\;2}p^{2} + \frac{n+1.n+2.n+3}{1.\;2.\;3}p^{3} \\ \qquad + \text{etc.} + \frac{n+1.n+2\ldots\ldots(n+m-2)}{1.\;2\ldots\ldots\ldots(m-2)}p^{m-2} \end{array}\right\}$$
$$+ q^{n}\frac{n+1.\;n+2\ldots\ldots(n+m-1)}{1.\;2\ldots\ldots\ldots(m-1)}p^{m-1},$$

formule qu'on peut réduire à celle-ci

$$q^n\left\{1+np+\frac{n.n+1}{1.\ 2}p^2+\frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3}p^3+\text{etc.}+\frac{n.n+1\ldots(n+m-2)}{1.\ 2\ldots.(m-1)}p^{m-1}\right\},$$

que Lagrange trouve par des principes différens à la fin du n.° 52 du mémoire cité dans la note précédente. Il suffit pour cela d'effectuer la multiplication par $1-p$, puis de réduire les coëfficiens en n. On parviendroit immédiatement à ce résultat en employant la formule du n.° 227.

229. On peut suivre les procédés des numéros 223 et suivans et de la fin du numéro 225 pour des équations de relation plus compliquées; on peut, si l'on veut, les appliquer à l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon'' A_{m-2,n-2} + \delta'' A_{m-1,n-2} + \gamma'' A_{m,n-2} \\ + \delta' A_{m-2,n-1} + \gamma' A_{m-1,n-1} + \zeta' A_{m,n-1} \\ + \gamma A_{m-2,n} + \zeta A_{m-1,n} + \alpha A_{m,n} \end{array}\right\} = 0,$$

et l'on verra que, dans ce cas, il se conserve généralement quatre lignes au numérateur de la fraction génératrice, savoir les deux premières lignes horizontales et les deux premières verticales.

Il arrive quelquefois que, d'après l'état de la question, l'équation de relation commence à avoir lieu avant qu'elle soit remplie dans toute son étendue; alors le nombre des lignes du numérateur peut être moindre.

Si l'équation précédente manquoit des termes $\varepsilon'' A_{m-2,n-2}$, $\delta'' A_{m-1,n-2}$, et $\delta' A_{m-2,n-1}$; on trouveroit encore, de la même manière, qu'en général il se conserve les mêmes lignes au numérateur que lorsque ces termes ne manquent point, c'est à-dire les deux premières lignes horizontales et les deux premières verticales.

230. Mais, sans nous arrêter à des cas particuliers, il sera facile de tirer de ce qui précède les conclusions suivantes, générales pour une équation de relation quelconque, en supposant toujours que la série soit renfermée dans la première région et que α ne soit pas zéro.

Une équation de relation double quelconque étant donnée, on fera toujours en sorte que les plus hauts indices de A soient m et n, car s'il y avoit les indices $m+1$, ou $m+2$, on n'auroit qu'à mettre $m-1$, ou $m-2$, au lieu de m dans tous les termes de l'équation; on en useroit de même à l'égard

de n, s'il y avoit des indices $n+1$, $n+2$; et comme l'équation auroit toujours lieu, cela n'ôteroit rien à sa généralité.

Tous les termes de l'équation de relation ainsi préparée étant mis dans un seul membre, l'autre étant zéro ; il est clair qu'on pourra toujours regarder ce premier membre comme le développement de $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\alpha A)$, en prenant pour dernières dérivées de α celles qui le sont dans l'équation de relation donnée ; c'est-à-dire qu'on peut toujours regarder ce premier membre comme le coëfficient de $x^m y^n$ dans le produit de

$$\begin{array}{llll} A + Bx & + Cx^2 & + \text{etc.} \\ \quad + B'y & + C'xy & + \text{etc.} \\ & + C''y^2 & + \text{etc.} \\ & & + \text{etc.} \end{array}$$

multiplié par le polynome double que donne l'équation de relation si l'on y met au lieu de $A_{m,n}$, $A_{m-1,n}$, $A_{m,n-1}$, $A_{m-2,n}$, $A_{m-1,n-1}$, etc. les quantités 1, x, y, x^2, xy, etc. respectivement, et généralement $x^r y^s$ au lieu de $A_{m-r,n-s}$. De là il s'ensuit que

1.°, Comme ce polynome est le dénominateur de la fraction génératrice, on formera toujours le dénominateur d'après l'équation de relation mise toute entière dans un seul membre, en substituant dans cette équation 1, x, y, x^2, xy, etc. à la place de $A_{m,n}$, $A_{m-1,n}$, $A_{m,n-1}$, $A_{m-2,n}$, $A_{m-1,n-1}$, etc., respectivement.

2.° Si l'on représente par $a_{m,n}$ le coëfficient de $x^m y^n$ du produit ci-dessus, $a_{m,n}x^m y^n$ sera un terme quelconque du numérateur de la fraction génératrice : on aura donc pour le coëfficient de ce terme

$$a_{m,n} = \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\alpha A), \qquad \ldots\ldots.(1)$$

où, en donnant des valeurs particulières à m et à n, il faut faire $a_{m,n}$ égal à zéro, dans tous les cas où les conditions de la question le permettent sans absurdité, afin de satisfaire à l'équation de relation, laquelle est ici représentée par $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\alpha A)$.

3.° La fraction génératrice étant ainsi déterminée, on aura, pour le terme général de la série récurrente la formule,

$$A_{m,n} = \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha^{-1}), \qquad \ldots\ldots.(2)$$

où, en développant le second membre, on ne conservera des dérivées de a que celles qui représentent les coëfficiens conservés du numérateur, les autres étant zéro ; et, en développant ensuite $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}$, on aura soin de prendre pour dernières dérivées de α celles qui le sont dans l'équation de relation.

231.

231. La principale difficulté consiste donc à déterminer les coëfficiens du numérateur. Voici, je pense, ce que l'on peut, d'après ce qui précède, prescrire de plus simple et de plus général à cet égard.

Soit l'équation de relation quelconque représentée par

$$o = [A];$$

on aura pour l'expression d'un coëfficient quelconque du numérateur

$$a_{m,n} = [A].$$

Au moyen de cette équation et des conditions de la question, et en donnant à m et à n des valeurs particulières, on formera le commencement de la série récurrente, dont on disposera les termes sous forme de rectangle; on n'étendra ce commencement de la série que dans la région des m et n positifs, si, comme nous le supposons ici, cette série est toute renfermée dans cette région et si α n'est point zéro. On verra ainsi, en formant les premiers termes de la série, ou, en promenant l'échelle de relation sur le tableau des termes de la série déjà formés, quels sont les lignes ou les termes où $a_{m,n}$ ne devient pas zéro, c'est-à-dire où l'équation de relation n'est pas satisfaite; les valeurs de $a_{m,n}$ pour ces termes seront les coëfficiens des termes à conserver au numérateur de la fraction génératrice. Il sera ordinairement facile, après avoir calculé quelques termes de la série, de voir dans quelles lignes se trouvent les suites de ces coëfficiens : on se bornera donc à les calculer ou à en trouver l'expression générale, ce qui est toujours censé plus simple que de trouver le terme général de la série.

Cela fait, on aura pour le terme général de la série

$$A_{m,n} = \mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^n . (a\alpha^{-1}),$$

comme ci-dessus, 3° du numéro précédent.

On verra par la suite que cette manière de procéder s'étend aux cas où α est zéro et où la série n'est pas bornée à la première région. Avant que de l'appliquer à des exemples qui l'éclairciront, il convient d'indiquer un moyen d'abréger les développemens dans beaucoup de rencontres.

232. L'opération du développement de $\mathfrak{D}^m . \mathfrak{D}'^n . \alpha^{-1}$ conduit en général à un grand nombre de termes lorsque les dérivées de α sont nombreuses; mais la plupart de ces termes deviennent nuls quand α n'a qu'un petit nombre de dérivées : voyons donc quelles sont les simplifications qu'on peut employer

dans ces derniers cas. Prenons un exemple particulier, mais suffisant pour tracer la marche à suivre dans de pareilles rencontres.

Supposons qu'on ait à trouver le coëfficient de $x^m y^n$ dans

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \gamma' xy + \delta''' xy^3)^{-1}. \qquad \ldots\ldots(1)$$

Ce coëfficient est représenté par $\mathrm{D}^m.\mathrm{D}'^n.\alpha^{-1}$, et il est facile de voir que le développement de cette expression ne peut être composé que de termes de la forme $\alpha^{-p}.\beta^q.\gamma^r.\gamma'^s.\delta'''^t$, abstraction faite des coëfficiens numériques.

Pour déduire de α^{-1} un quelconque de ces termes par m dérivations divisées D et n dérivations divisées D'; je remarque, 1.° que, pour aller de α à δ''', il faut, sur le tableau disposé en forme triangulaire, faire un pas horizontal et trois pas obliques; 2.° que, pour aller de α à γ', il faut faire un pas horizontal et un pas oblique; 3.° que, pour aller de α à γ, il faut faire deux pas horizontaux; 4.° enfin, que pour aller de α à β, il ne faut qu'un pas horizontal.

Donc, 1.°, pour déduire δ'''^t de α^{-1} il faut faire t dérivations divisées sur α^{-1}, en donnant à α la seule dérivée β; faire sur β^t qui en résulte, t dérivations divisées D', en ne faisant varier β que de γ'; faire sur γ'^t que l'on obtient, t dérivations divisées D', en ne faisant varier que γ'; faire sur δ''^t que l'on obtient, t dérivations divisées D', en faisant varier δ'' seul : on aura de cette manière, pour le résultat de t dérivations D et $3t$ dérivations D' faites sur α^{-1}, la quantité $\pm\alpha^{-t-1}.\delta'''^t$; ce qu'on peut exprimer ainsi : $\mathrm{D}^t.\mathrm{D}'^{3t}.\alpha^{-1} = \pm\alpha^{-t-1}.\delta'''^t$, le premier membre devant être pris dans un sens restreint, défini par ce qui précède, car autrement il auroit une signification plus étendue. Le signe $+$ ou le signe $-$ a lieu, suivant que t est pair ou impair.

2.° Pour avoir γ'^s, il faut, dans le résultat précédent, faire s dérivations divisées D sur α^{-t-1}, en faisant varier α seul, ce qui donne

$$\pm\frac{(-t-1)(-t-2)\ldots\ldots(-t-s)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots s}\,\alpha^{-t-s-1}.\beta^s.\delta'''^t;$$ ensuite il faut faire, sur cette quantité, s dérivations divisées D', en ne faisant varier que β, et l'on aura

$$\pm\frac{(-t-1)(-t-2)\ldots\ldots(-t-s)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots s}\,\alpha^{-t-s-1}.\gamma'^s.\delta'''^t = \mathrm{D}^{t+s}.\mathrm{D}'^{3t+s}.\alpha^{-1}.$$

3.° Pour avoir γ^r, il faut dans le résultat précédent faire r dérivations divisées D sur α^{-t-s-1}, α seul variant, ce qui donne

$$\pm\frac{(-t-1)(-t-2)\ldots\ldots(-t-s)(-t-s-1)\ldots\ldots(-t-s-r)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots s.\quad 1.\quad 2\ldots\ldots\ldots r}\,\alpha^{-t-s-r-1}.\beta^r\gamma'^s.\delta'''^t;$$

il faut ensuite faire sur β^r, r dérivations divisées D, β seul variant, et l'on a

$$\pm \frac{(-t-1)(-t-2)(-t-3)\ldots\ldots\ldots(-t-s-r)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots s.\ 1.\ 2.\ 3\ldots\ldots r}\,\alpha^{-t-s-r-1}.\gamma^{r}.\gamma'^{s}.\varepsilon'''^{t}$$
$$= \mathfrak{D}^{t+s+2r}.\mathfrak{D}'^{3t+s}.\alpha^{-1}.$$

4.° Enfin, pour avoir $\mathfrak{C}^{q}$, il faut faire sur $\alpha^{-t-s-r-1}$ dans le résultat précédent q dérivations divisées D, α seul variant, et l'on trouve

$$\pm \frac{(-t-1)(-t-2)..(-t-s-r)(-t-s-r-1)..(-t-s-r-q)}{1.\ 2.\ 3\ldots s.\ 1.\ 2.\ 3\ldots r.\ 1.\ 2.\ 3\ldots q}\,\alpha^{-t-s-r-q-1}.\mathfrak{C}^{q}.\gamma^{r}.\gamma'^{s}.\varepsilon'''^{t}$$
$$= \mathfrak{D}^{t+s+2r+q}.\mathfrak{D}'^{3t+s}.\alpha^{-1} = \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$\pm \frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots(q+r+s+t)}{1.\ 2.\ 3\ldots q.\ 1.\ 2.\ 3\ldots r.\ 1.\ 2.\ 3\ldots s.\ 1.\ 2.\ 3\ldots t}.\alpha^{-q-r-s-t-1}.\mathfrak{C}^{q}.\gamma^{r}.\gamma'^{s}.\varepsilon'''^{t},$$

le signe $+$ ou $-$ ayant lieu suivant que $q+r+s+t$ est pair ou impair.

On a donc $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.\alpha^{-1} = \mathfrak{D}^{t+s+2r+q}.\mathfrak{D}'^{3t+s}.\alpha^{-1}$, avec la condition cependant que les lettres q, r, s, t doivent recevoir autant de valeurs différentes qu'il y en a en nombres entiers positifs ou zéro qui satisfont aux deux équations

$$\begin{aligned} m &= q + 2r + s + t, \\ n &= s + 3t. \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

Or il y a quatre indéterminées et deux équations seulement, ce qui montre qu'il y a plusieurs manières d'y satisfaire, qu'on déterminera toutes facilement par les méthodes de l'Analyse indéterminée : quand elles le seront, on les mettra successivement dans la valeur précédente de $\mathfrak{D}^{t+s+2r+q}.\mathfrak{D}'^{3t+s}.\alpha^{-1}$, et la somme de toutes les quantités qui en résulteront sera la valeur de $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.\alpha^{-1}$.

Si l'on a $(\alpha + \mathfrak{C}x + \gamma' xy)^{-1}$, on n'a qu'à faire dans ce qui précède r et t zéro, et l'on aura $m = q + s$, et $n = s$. Dans ce cas, il y a autant d'équations que d'indéterminées, et q et s n'ont chacun qu'une valeur, savoir $q = m - n$ et $s = n$. Donc le développement de $\mathfrak{D}^{m}.\mathfrak{D}'^{n}.\alpha^{-1}$ se réduit au seul terme

$$\pm \frac{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots(m-n).\ 1.2.3\ldots n}\,\alpha^{-m-1}\mathfrak{C}^{m-n}\gamma'^{n} = \pm \frac{n+1.n+2\ldots m}{1.\ 2\ldots(m-n)}\,\alpha^{-m-1}\mathfrak{C}^{m-n}\gamma'^{n}, \ldots(4)$$

le signe $+$ ayant lieu pour m pair et le signe $-$ pour m impair.

Il suit des formules ci-dessus que, si le polynome ne renferme, outre α, que deux autres termes quelconques, ou, plus généralement, s'il n'est composé que de trois termes, on a autant d'inconnues que d'équations, c'est-à-dire deux, et que partant chacune des inconnues n'a qu'une seule valeur, ce qui fait que dans ce cas le coëfficient de $x^{m}y^{n}$ dans le développement se réduit à un monome.

On peut facilement tirer du procédé et du résultat précédens une règle générale, pour trouver hors de rang le coëfficient quelconque de $x^m y^n$ dans le développement de la puissance -1 d'un polynome où manquent tant de termes qu'on voudra, quels que soient les intervalles des termes restans, et même le coëfficient de $x^m y^n$ dans le développement d'une fonction quelconque d'un pareil polynome, par exemple, de $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \gamma' xy + \delta''' xy^3)$; mais ce n'est pas ici le lieu de nous arrêter davantage à cet objet.

On peut même arriver par des voies différentes au résultat (2) ci-dessus; car on peut commencer par faire sur α^{-1} de (1) un nombre $q + r + s + t$ de dérivations divisées D, en ne faisant varier que α seul; puis faire sur $\beta^{q+r+s+t}$ dans le résultat, r dérivations divisées D en ne faisant varier que β; puis faire encore sur β^{q+s+t}, $s + t$ dérivations divisées D'; ensuite faire sur γ'^{s+t} dans le résultat, t dérivations divisées D' en ne faisant varier que γ'; enfin sur δ'''^{t} du résultat, encore t dérivations divisées D'.

EXEMPLE II.

233. Trouver le terme général de la table suivante, qui est le triangle arithmétique de PASCAL, mis sous forme de rectangle,

1	1	1	1	1	1	etc.
0	1	2	3	4	5	etc.
0	0	1	3	6	10	etc.
0	0	0	1	4	10	etc.
0	0	0	0	1	5	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Dans cette table, toute renfermée dans la première région, la première ligne horizontale est toute formée d'unités, la première ligne verticale l'étant toute de zéro, à l'exception du premier terme. La loi de formation consiste en ce que chaque terme est égal à la somme de celui qui le précède dans la même ligne horizontale et de celui qui est au-dessus de ce dernier dans la même ligne verticale.

En désignant par $A_{m,n}$ le terme général demandé, la loi de formation de la table donne cette équation de relation

$$A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}, \text{ ou } 0 = \begin{cases} -A_{m-1,n-1} \\ -A_{m-1,n} + A_{m,n}. \end{cases} \quad \ldots\ldots(1)$$

Comme la table ne s'étend pas hors de la première région, il faut faire zéro les termes des trois autres régions, comme il suit :

etc.

etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.
etc.	o*	o	o	o	o	o	o	etc.
etc.	o*	1*	1	1	1	1	1	etc.
etc.	o	o	1	2	3	4	5	etc.
etc.	o	o	o	1	3	6	10	etc.
etc.	o	o	o	o	1	4	10	etc.
etc.	o	o	o	o	o	1	5	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Si maintenant on met $a_{m,n}$ pour premier membre de l'équation de relation (1), en sorte qu'on ait
$$a_{m,n} = \left\{\begin{array}{l} -A_{m-1,n-1} \\ -A_{m-1,n} + A_{m,n}, \end{array}\right.$$
et si l'on donne à m et à n des valeurs particulières, en promenant le second membre de cette équation sur le tableau précédent, on voit que $a_{m,n}$ est zéro pour toutes les valeurs de m et de n, excepté à l'endroit désigné par des *, et que ce cas unique répond à $m = 0$ et $n = 0$; partant tous les termes du numérateur de la fraction génératrice sont nuls à l'exception du terme $a_{0,0} = a$, lequel devient $= 1$, parce qu'on a, pour le cas marqué par des *,
$$a_{0,0} = \left\{\begin{array}{l} -A_{-1,-1} \\ -A_{-1,0} + A_{0,0} \end{array}\right\} = A_{0,0} = 1.$$
La fraction génératrice est par conséquent
$$\frac{a}{\alpha + \beta x + \gamma' xy} = \frac{1}{1 - x - xy}.$$
On a donc pour le terme général demandé
$$A_{m,n} = \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(a\alpha^{-1}) = a\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1} = \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}.$$
Or $\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\alpha^{-1}$ développé dans le cas présent se réduit (n.° précédent) à ce seul terme $\pm \frac{n+1.\ n+2 \ldots m}{1.\ 2 \ldots (m-n)} \alpha^{-m-1} \beta^{m-n} \gamma'^n$; et, en mettant pour α, β, γ' leurs valeurs 1, -1, -1, on a
$$A_{m,n} = \frac{n+1.\ n+2.\ n+3 \ldots\ldots m}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (m-n)} = \frac{m.\ m-1.\ m-2 \ldots\ldots (m-n+1)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots n}.$$
LAGRANGE parvient à la même expression par des voies différentes, numéros 10 et 14 du mémoire cité.

234. Si l'on suppose que les termes de la première ligne horizontale d'une table pareille à celle du numéro précédent forment la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc.; que la première ligne verticale, au premier terme près, soit toute formée de zéro, et que l'équation de relation soit

$$0 = A_{m,n} - 2A_{m-1,n} - 2A_{m-1,n-1};$$

on trouvera pareillement que l'équation de relation a lieu dans toute la table, excepté à un seul endroit, à l'origine, où l'on aura $a = 1$. Donc le numérateur n'aura de même qu'un seul terme, et la fraction génératrice sera

$$\frac{a}{\alpha + \mathcal{C}x + \gamma' xy} = \frac{1}{1 - 2x - 2xy};$$

d'où l'on tire le terme général

$$A_{m,n} = \frac{m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots\ldots n} 2^m,$$

comme le trouvent Laplace, *Mémoires présentés*, tome VII, pages 96 et suivantes, et d'après lui Cousin, n.° 576 de son *traité de Calcul différentiel et intégral.*

235. Enfin, si l'on suppose que l'équation de relation soit la même que n.° 233, mais que la première ligne horizontale et la première ligne verticale de la série soient des quantités quelconques données, la série étant toujours bornée à la première région : alors il est clair que a, b, c, d, etc., et b', c'', d''', etc. ne sont pas nuls, et que la fraction génératrice est

$$\frac{\begin{matrix} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} \\ + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + e^{IV}y^4 + \text{etc.} \end{matrix}}{1 - x - xy},$$

ce qui, par les numéros 226 et 232, donne, à cause qu'ici $\alpha = 1$, $\mathcal{C} = -1$, $\mathcal{C}' = 0$, $\gamma' = -1$,

$$\begin{aligned} A_{m,n} = {} & a\,\frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots(m-n)} \\ & + b\,\frac{(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots(m-1-n)} \quad + b'\,\frac{m(m-1)\ldots\ldots n}{1.\ 2\ldots.(m-n+1)} \\ & + c\,\frac{(m-2)(m-3)\ldots.(n+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots(m-2-n)} \quad + c''\,\frac{m(m-1)\ldots.(n-1)}{1.\ 2\ldots.(m-n+2)} \\ & + d\,\frac{(m-3)(m-4)\ldots.(n+1)}{1.\quad 2\ldots\ldots(m-3-n)} \quad + d'''\,\frac{m(m-1)\ldots.(n-2)}{1.\ 2\ldots.(m-n+3)} \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si on veut ordonner par rapport aux termes même de la série qui sont supposés donnés, on aura, par la formule du n.° 227, et en mettant au lieu de $\frac{m.(m-1)\ldots.(n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots.(m-n)}$ l'expression $\frac{m.(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots.n}$ qui lui est égale,

$$A_{m,n}=A_{0,0}\frac{(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2\ldots\ldots.(n-1)}$$
$$+A_{1,0}\frac{(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots(n-1)}+A_{0,1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots(n-1)}$$
$$+A_{2,0}\frac{(m-3)(m-4)\ldots.(m-1-n)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots.(n-1)}+A_{0,2}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+3)}{1.\ 2\ldots\ldots.(n-2)}$$
$$+A_{3,0}\frac{(m-4)(m-5)\ldots.(m-2-n)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots(n-1)}+A_{0,3}\frac{m(m-1)\ldots..(m-n+4)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots(n-3)}$$
$$+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.},$$

formule qui s'accorde avec celle que trouve LAGRANGE n.° 14 du mémoire cité, pourvu qu'on change en + les — qui se sont glissés dans cette dernière. Cet accord peut se vérifier facilement, si l'on donne à m et n des valeurs particulières.

EXEMPLE III. (*).

236. Étant proposée l'équation de relation

$$A_{m,n}=pA_{m-1,n-1}+(1-p)A_{m-1,n},$$

avec les conditions que, la série étant renfermée dans la première région, $A_{m,0}=1$, m étant zéro ou un entier positif quelconque, et que $A_{0,n}=0$, tant que n est >0, c'est-à-dire, tant que n est un entier positif; trouver l'expression du terme général $A_{m,n}$ en p et $1-p$.

Je fais, pour abréger, $1-p=q$, et j'écris ainsi l'équation de relation

$$0=\left\{\begin{array}{l}-pA_{m-1,n-1}\\-qA_{m-1,n}+A_{m,n}\end{array}\right\}=a_{m,n}.$$

Les termes de la série étant zéro dans toutes les régions autres que la pre-

(*) Cet exemple est la traduction analytique du problème suivant, qui est le premier de LAGRANGE. Voyez le numéro 49 du mémoire cité.

« Un joueur parie d'amener un événement donné n fois ou moins en un nombre m de coups, la pro« babilité de l'amener à chaque coup étant p, et par conséquent celle de ne pas l'amener $1-p=q$; « on demande le sort de ce joueur. »

mière, il est facile de voir, en calculant au moyen de l'équation de relation et des termes donnés les commencemens de quelques lignes horizontales et verticales de la série, et même sans les calculer, que l'équation de relation n'a pas lieu quand $n = 0$, m étant $= 0$ ou > 0, c'est-à-dire que $a_{m,0}$ n'est pas zéro quand $m = 0$ ou > 0; mais que $a_{m,n} = 0$ pour toutes les autres valeurs de m et de n. On a donc

$$a_{m,0} = \left\{ \begin{array}{l} -pA_{m-1,-1} \\ -qA_{m-1,0} + A_{m,0} \end{array} \right\} = -qA_{m-1,0} + A_{m,0},$$

d'où l'on tire $a_{0,0} = -qA_{-1,0} + A_{0,0} = A_{0,0} = 1$, et $a_{1,0} = a_{2,0} = a_{3,0} = a_{4,0} = \ldots\ldots = a_{m,0} = -q + 1 = p$.

La fraction génératrice sera donc

$$\frac{1 + px + px^2 + px^3 + px^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma' xy},$$

les valeurs de α, β, γ' étant 1, $-q$, $-p$.

Le terme général $A_{m,n} = \text{D}^m.\text{D}^n.(a\alpha^{-1})$ sera donc, puisqu'il ne faut conserver que les termes où les dérivées de a ne sont point zéro,

$$\text{D}^m.\text{D}^{n\prime}.\alpha^{-1} + p\text{D}^{m-1}.\text{D}'^n.\alpha^{-1} + p\text{D}^{m-2}.\text{D}'^n.\alpha^{-1} + p\text{D}^{m-3}.\text{D}'^n.\alpha^{-1} + \text{etc.}$$
$$+ p\text{D}^{n+2}.\text{D}'^n.\alpha^{-1} + p\text{D}^{n+1}.\text{D}'^n.\alpha^{-1} + p\text{D}^n.\text{D}'^n.\alpha^{-1}.$$

J'arrête le développement au terme $\text{D}^n.\text{D}'^n.\alpha^{-1}$, parce que dans le cas actuel l'indice de D ne peut être moindre que celui de D'; car on a ici (n.° 232) m de la forme $l + s$ et $n = s$, l ne pouvant pas être négatif et sa plus petite valeur étant zéro. On a d'ailleurs, par le même numéro 232,

$$\text{D}^m.\text{D}'^n.\alpha^{-1} =$$
$$\pm \frac{n+1.\ n+2\ldots\ldots m}{1.\ \ 2\ldots\ldots(m-n)} \alpha^{-m-1} \beta^{m-n} \gamma'^n = \frac{n+1.\ n+2\ldots\ldots m}{1.\ \ 2\ldots\ldots(m-n)} q^{m-n} p^n.$$

Substituant cette valeur dans l'expression précédente du terme général et écrivant la série à rebours, on trouve

$$A_{m,n} =$$
$$p^n \left\{ \begin{array}{l} p + (n+1)pq + \frac{n+1.\ n+2}{1.\ \ 2} pq^2 + \frac{n+1.\ n+2.\ n+3}{1.\ \ 2.\ \ 3} pq^3 + \text{etc.} \\ \quad + \frac{n+1.\ n+2\ldots\ldots(m-1)}{1.\ \ 2\ldots\ldots(m-n-1)} pq^{m-n-1} + \frac{n+1.\ n+2\ldots\ldots m}{1.\ \ 2\ldots\ldots(m-n)} q^{m-n} \end{array} \right\}.$$

C'est l'expression demandée. On peut la mettre sous une forme un peu plus simple; car, en substituant $1 - q$ au lieu du p entre les parenthèses et réduisant les coefficiens en n et m, on aura

$$A_{m,n} =$$

$$A_{m,n} =$$

$$p^n \left\{ 1 + nq + \frac{n.\,n+1}{1.\;\;2} q^2 + \frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.\;\;2.\;\;3} q^3 + \text{etc.} + \frac{n.\,n+1 \ldots (m-1)}{1.\;\;2 \ldots (m-n)} q^{m-n} \right\},$$

ce qui est l'expression que trouve LAGRANGE au numéro 49 du mémoire cité.

237. Si dans l'exemple précédent on avoit pour première condition que $A_{m,o} = (1-p)^m = q^m$, m étant un nombre entier positif quelconque ou zéro, le reste demeurant le même qu'au numéro précédent, on verroit aisément que l'équation de relation seroit toujours satisfaite, excepté pour les cas de

$$a_{m,o} = \left\{ \begin{array}{l} -\,pA_{m-1,-1} \\ -\,qA_{m-1,o} + A_{m,o} \end{array} \right. = -\,qA_{m-1,o} + A_{m,o}\,,$$

$A_{m-1,-1}$ étant zéro, puisqu'il tombe hors de la première région.

Pour ces cas même, $a_{o,o} = a = A_{o,o} = q^o = 1$ est le seul terme du numérateur qui ne soit pas zéro; car on a

$$a_{1,o} = -\,qA_{o,o} + A_{1,o} = -\,qq^o + q \;= o,$$
$$a_{2,o} = -\,qA_{1,o} + A_{2,o} = -\,qq \;\; + q^2 = o,$$

et généralement

$$a_{m,o} = -\,qA_{m-1,o} + A_{m,o} = -\,qq^{m-1} + q^m = o;$$

de sorte que la fraction génératrice se réduit à

$$\frac{1}{\alpha + \mathrm{Є}x + \gamma' xy} = \frac{1}{1 - px - qxy}\,;$$

ainsi le terme général se réduit au seul terme $1.\mathrm{p}^m.\mathrm{p}'^n.\alpha^{-1}$, et l'on a, sans aucun détour,

$$A_{m,n} = \frac{n+1.\,n+2 \ldots\ldots m}{1.\;\;2 \ldots\ldots (m-n)} p^n q^{m-n}.$$

C'est ce que trouve LAGRANGE, n.° 50 du mémoire cité.

238. Si l'on avoit l'équation de relation

$$o = \left\{ \begin{array}{l} -\,\dfrac{p}{p+q} A_{m-1,n-1} \\ -\,\dfrac{q}{p+q} A_{m-1,n} + A_{m,n}\,, \end{array} \right.$$

avec les conditions que $A_{m,o} = o$, m étant $= o$ ou $> o$, et que $A_{o,n} = 1$, n étant positif quelconque $> o$; la série étant renfermée dans la première

région (*) ; ce cas se résoudroit d'une manière semblable à celle de l'exemple précédent.

En effet, faisant pour plus de simplicité $\frac{p}{p+q} = k$ et $\frac{q}{p+q} = l$, on mettroit l'équation sous cette forme

$$o = \begin{cases} -kA_{m-1,n-1} \\ -lA_{m-1,n} + A_{m,n}, \end{cases}$$

et, au moyen des conditions, on trouveroit que la fraction génératrice est

$$\frac{b'y + c''y^2 + d'''y^3 + e^{IV}y^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma' xy} = \frac{y + y^2 + y^3 + y^4 + \text{etc.}}{1 - lx - kxy}.$$

Donc le terme général sera

$$A_{m,n} = \mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.(a\alpha^{-1}) =$$
$$\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^{n-1}.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^{n-2}.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^{n-3}.\alpha^{-1} + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^2.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^m.\alpha^{-1}.$$

Donc, puisque $\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\alpha^{-1} = \pm \frac{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots m}{1.\ 2 \ldots\ldots (m-n).\ 1.\ 2 \ldots\ldots n} \alpha^{-m-1}\beta^{m-n}\gamma'^n$ (n.° 232), on a, en mettant pour α, β, γ leurs valeurs 1, $-l$, $-k$, et écrivant la série à rebours,

$$A_{m,n} =$$
$$l^m + ml^{m-1}k + \frac{m.m-1}{1.\ 2} l^{m-2}k^2 + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3} l^{m-3}k^3 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{m.\ m-1.\ m-2 \ldots\ldots (m-n+2)}{1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots (n-1)} l^{m-n+1}k^{n-1};$$

et, en mettant aussi à la place de k et de l leurs valeurs,

$$A_{m,n} =$$
$$\frac{q^m}{(p+q)^m} \left\{ \begin{array}{l} 1 + m\frac{p}{q} + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2}\frac{p^2}{q^2} + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}\frac{p^3}{q^3} \\ \quad + \text{etc.} + \frac{m.\ m-1 \ldots (m-n+2)}{1.\ 2 \ldots\ldots (n-1)}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \end{array} \right\};$$

ce qui coïncide avec l'expression trouvée par LAPLACE, *Mémoires présentés, etc.*, tome VII, pages 130 et 131, en faisant attention que m et n sont ici ce que LAPLACE désigne par $x-1$ et n.

(*) Le problème des probabilités qui conduit à cet exemple est le suivant : « Deux joueurs, dont les adresses « respectives sont dans la raison de p à q, jouent ensemble de manière que sur un nombre m de coups il « en manque n au premier joueur et conséquemment $m-n$ au second, pour gagner ; il s'agit de déterminer « la probabilité respective de ces deux joueurs. » C'est le problème XIV de LAPLACE, *Mém. présentés*, tome VII, page 129, rapporté par COUSIN, numéros 586 et 587 de son *traité de calcul différentiel et intégral.*

239. Ajoutons l'exemple suivant, traité par LAPLACE dans son *mémoire sur les suites* (Acad. de Paris, pour 1779, pag. 287 - 290), afin de faire voir que notre méthode conduit directement à la solution de ce cas.

EXEMPLE IV.

Soit proposée l'équation de relation

$$A_{m+1,n+1} - \beta A_{m,n+1} - \beta' A_{m+1,n} - \gamma' A_{m,n} = 0,$$

avec les conditions que, la série ne s'étendant que dans la première région, les termes $A_{0,0}$, $A_{1,1}$, etc., $A_{m,0}$, etc. de la première ligne horizontale, et les termes $A_{0,1}$, $A_{0,2}$, etc., $A_{0,n}$, etc. de la première verticale soient des quantités données quelconques : on demande l'expression du terme général $A_{m,n}$.

Je mets $m-1$ et $n-1$ à la place de m et de n, et l'équation de relation prend cette forme

$$0 = \begin{cases} -\gamma' A_{m-1,n-1} - \beta' A_{m,n-1} \\ -\beta A_{m-1,n} + A_{m,n}, \end{cases}$$

équation qui coïncide avec celle du n.° 223, si dans celle-ci on fait $\alpha = 1$ et qu'on donne le signe $-$ à β, β', γ'; et les conditions sont aussi les mêmes qu'aux numéros 223 et suivans. On aura donc par la formule du n.° 227, en y écrivant les séries à rebours,

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ (1)$$

$$\begin{aligned} & A_{m,0}\,\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1} + A_{m-1,0}(\text{D}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1} - \beta\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1}) + A_{m-2,0}(\text{ꝑ}^{2}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1} - \beta\text{D}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1}) \\ & + \text{etc.} + A_{1,0}(\text{ꝑ}^{m-1}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1} - \beta\text{ꝑ}^{m-2}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1}) + A_{0,0}(\text{ꝑ}^{m}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1} - \beta\text{ꝑ}^{m-1}.\text{ꝑ}'^{n}.\alpha^{-1}) \\ & + A_{0,n}\text{ꝑ}^{m}.\alpha^{-1} + A_{0,n-1}(\text{ꝑ}^{m}.\text{D}'.\alpha^{-1} - \beta'\text{ꝑ}^{m}.\alpha^{-1}) + A_{0,n-2}(\text{ꝑ}^{m}.\text{ꝑ}'^{2}.\alpha^{-1} - \beta'\text{ꝑ}^{m}.\text{D}'.\alpha^{-1}) \\ & + \text{etc.} + A_{0,1}(\text{ꝑ}^{m}.\text{ꝑ}'^{n-1}.\alpha^{-1} - \beta'\text{ꝑ}^{m}.\text{ꝑ}^{n-2}.\alpha^{-1}) - A_{0,0}.\beta'\text{ꝑ}^{m}.\text{ꝑ}'^{n-1}.\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Il est trop aisé d'avoir, au moyen de nos méthodes, les développemens réduits des quantités affectées de D et de D′, pour que nous les placions ici, il suffira quand on les aura trouvés, de mettre 1, $-\beta$, $-\beta'$, $-\gamma'$, à la place de α, β, β', γ' respectivement, les autres dérivées de α étant zéro.

Si dans la formule à laquelle parvient LAPLACE, page 290, on exécute les substitutions et les développemens indiqués, et qu'on ordonne suivant $A_{m,0}$, $A_{m-1,0}$, etc., $A_{0,n}$, $A_{0,n-1}$, etc., on aura la formule suivante, remarquable par la loi qui y règne,

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots (2)$$

$$A_{m,0}.\,\zeta'^{n}$$

$$+ A_{m-1,0}.\,n(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta'^{n-1}$$

$$+ A_{m-2,0}\left\{n(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta'^{n-1}\zeta + \frac{n.\,n-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta'^{n-2}\right\}$$

$$+ A_{m-3,0}\left\{n(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta'^{n-1}\zeta^2 + 2.\frac{n.\,n-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta'^{n-2}\zeta + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta'^{n-3}\right\}$$

$$+ A_{m-4,0}\left\{\begin{array}{l} n(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta'^{n-1}\zeta^3 + 3.\,\frac{n.\,n-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta'^{n-2}\zeta^2 \\ \qquad + 3.\,\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta'^{n-3}\zeta + \frac{n.\,n-1\ldots.\,n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\gamma' + \zeta\zeta')^4\zeta'^{n-4} \end{array}\right\}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ A_{0,0}\left\{\begin{array}{l} n(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta'^{n-1}\zeta^{m-1} + (m-1)\frac{n.\,n-1}{1.\ 2}(\gamma + \zeta\zeta')^2\zeta'^{n-2}\zeta^{m-2} \\ \qquad + \frac{m-1.\,m-2}{1.\ 2}\,\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta'^{n-3}\zeta^{m-3} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$+ A_{0,n}.\,\zeta^{m}$$

$$+ A_{0,n-1}.\,m(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta^{m-1}$$

$$+ A_{0,n-2}\left\{m(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta^{m-1}\zeta' + \frac{m.\,m-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta^{m-2}\right\}$$

$$+ A_{0,n-3}\left\{m(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta^{m-1}\zeta'^2 + 2.\,\frac{m.\,m-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta^{m-2}\zeta' + \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta^{m-3}\right\}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ A_{0,1}\left\{\begin{array}{l} m(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta^{m-1}\zeta'^{n-2} + (n-2)\frac{m.\,m-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta^{m-2}\zeta'^{n-3} \\ \qquad + \frac{n-2.\,n-3}{1.\ 2}\,\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta^{m-3}\zeta'^{n-4} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$- A_{0,0}\left\{\begin{array}{l} \zeta^{m}\zeta'^{n} + (n-1)m(\gamma' + \zeta\zeta')\zeta^{m-1}\zeta'^{n-1} + \frac{n-1.\,n-2}{1.\ 2}\,\frac{m.\,m-1}{1.\ 2}(\gamma' + \zeta\zeta')^2\zeta^{m-2}\zeta'^{n-2} \\ \qquad + \frac{n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\ 2.\ 3}\,\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\ 2.\ 3}(\gamma' + \zeta\zeta')^3\zeta^{m-3}\zeta'^{n-3} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Il est aisé de s'assurer que le développement réduit de notre formule (1) s'accorde avec la précédente (2), les parties des termes étant seulement ordonnées d'une manière différente dans celle-ci. On peut donner une démonstration générale et rigoureuse de l'accord des deux formules en démontrant d'abord la vérité du développement suivant, remarquable par l'élégance de sa loi, savoir : les seules dérivées de α étant ζ, ζ' et γ', on a

$\mathrm{D}^{m}.\mathrm{D}'^{n}.\alpha^{-1}$

$$\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\alpha^{-1} = \pm\alpha^{-m-n-1}\left\{\begin{matrix} \beta^m\beta'^n + m.n.\beta^{m-1}\beta'^{n-1}(\beta\beta'-\alpha\gamma') \\ +\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2}\beta^{m-2}\beta'^{n-2}(\beta\beta'-\alpha\gamma')^2 + \text{etc.}\end{matrix}\right\}, \quad \ldots(3)$$

en continuant la série jusqu'à ce qu'on arrive à des coëfficiens qui deviennent zéro. Or la démonstration de ce développement se déduit assez facilement (*) de celui de $\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\alpha^{-1}$ qu'on trouve par nos méthodes, et qui est (n.° 150)

$$\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^n.\alpha^{-1} = \quad\quad \ldots\ldots(4)$$

$$\pm\frac{m+1.m+2\ldots(m+n)}{1.\ 2\ldots\ldots n}\alpha^{-m-n-1}\beta^m\beta'^n \mp \frac{m}{1}.\frac{m+1.m+2\ldots(m+n-1)}{1.\ 2\ldots\ldots(n-1)}\alpha^{-m-n}\beta^{m-1}\beta'^{n-1}\gamma'$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{m+1.m+2\ldots\ldots(m+n-2)}{1.\ 2\ldots\ldots(n-2)}\alpha^{-m-n+1}\beta^{m-2}\beta'^{n-2}\gamma'^2 \mp \text{etc.}$$

240. Nous n'apporterons pas un plus grand nombre d'exemples; les précédens, quoiqu'ils soient très-simples et que l'équation de relation n'y soit composée que de peu de termes, suffisent pour faire entendre la méthode et pour montrer qu'elle est générale, quel que soit le nombre des termes de l'équation de relation, pourvu que la série ne s'étende que dans la première région et que α ne soit point zéro. Mais si α est zéro, ou même, en général, si la série s'étend dans d'autres régions que dans la première, alors cette méthode, quoiqu'elle ne soit pas en défaut, à proprement parler, a besoin cependant qu'on lui donne plus d'extension, et présente des difficultés qui ne se rencontrent pas dans les cas déjà traités.

(*) En effet, en développant par le n.° 3 les premiers membres et par le n.° 87 ou 99 les seconds membres des équations

$$\frac{D^n 1^{m+n}}{1.2\ldots n} = \frac{D^n(1^m.1^n)}{1.\ 2\ldots n}, \quad n\frac{D^n 1^{m+n-1}}{1.\ 2\ldots n} = n\frac{D^n(1^m.1^{n-1})}{1.\ 2\ldots n}, \quad \frac{n.n-1}{1.\ 2}\frac{D^n 1^{m+n-2}}{1.2\ldots n} = \frac{n.n-1}{1.\ 2}\frac{D^n(1^m.1^{n-2})}{1.\ 2\ldots n}, \quad \text{etc.},$$

D1 étant = 1, et les dérivées divisées suivantes de 1 étant zéro, on trouve sans peine

$$\frac{m+1.m+2\ldots(m+n)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots n} = 1 + m.n + \frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3} + \text{etc.},$$

$$\frac{m}{1}.\frac{m+1.m+2\ldots(m+n-1)}{1.\ 2\ldots\ldots(n-1)} = m.n + 2.\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2} + 3.\frac{m\ldots m-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{n\ldots n-2}{1.\ 2.\ 3} + 4.\frac{m\ldots m-3}{1.2.3.4}.\frac{n\ldots n-3}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

$$\frac{m-1.m}{1.\ 2}.\frac{m+1.m+2\ldots(m+n-2)}{1.\ 2\ldots\ldots(n-2)} = \frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2} + 3.\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3} + 6.\frac{m\ldots m-3}{1.2.3.4}.\frac{n\ldots n-3}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

etc..... Substituant ces séries dans le développement (4), il devient

$$\pm\alpha^{-m-n-1}\beta^m\beta'^n \quad \pm m.n.\alpha^{-m-n-1}\beta^m\beta'^n \quad \pm\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^{-m-n-1}\beta^m\beta'^n \quad\quad \pm \text{etc.}$$

$$\mp m.n.\alpha^{-m-n}\beta^{m-1}\beta'^{n-1}\gamma' \mp 2.\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^{-m-n}\beta^{m-1}\beta'^{n-1}\gamma' \mp \text{etc.}$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.\ 2}.\frac{n.n-1}{1.\ 2}\alpha^{-m-n+1}\beta^{m-2}\beta'^{n-2}\gamma'^2 \pm \text{etc.}$$

$$\mp \text{etc.}$$

Cette formule, réduite par colonnes verticales, donne la formule (3) ci-dessus.

(II.)

241. Si la série s'étend dans les régions à exposans négatifs de x ou de y, alors, pour former la fraction génératrice d'après l'équation de relation et les conditions de la question, après avoir fait en sorte que les plus hauts indices de A dans cette équation soient m et n, on formera le dénominateur comme 1.°, n.° 230. Ce dénominateur n'aura donc de cette manière que des exposans positifs de x et de y.

Puisque le numérateur est en général égal au produit de la série multipliée par le dénominateur, il est clair qu'en général il s'étend aussi dans les régions des exposans négatifs de x et de y : il est donc nécessaire d'examiner quels sont les termes où $a_{m,n}$, dans

$$a_{m,n} = [A],$$

ne devient pas zéro, en donnant à m et à n des valeurs particulières, non-seulement positives, mais encore négatives; $[A]$ indique, comme ci-dessus n.° 231, l'équation de relation dont on a fait passer tous les termes dans un seul membre.

A cet effet il faut, au moyen de l'équation de relation et des conditions de la question, calculer quelques-uns des premiers termes de la série, non-seulement dans la première région, comme n.° 231, mais encore dans les autres régions : on verra ainsi quels sont les lignes ou les lieux où $a_{m,n}$ ne devient pas zéro, c'est-à-dire, où l'équation de relation n'est point satisfaite; avec ces valeurs de $a_{m,n}$ on formera le numérateur de la fraction génératrice.

242. Cela ne suffit pas dans ces cas : il est de plus nécessaire de savoir par quel terme du dénominateur il faut commencer le développement de la fraction génératrice, c'est-à-dire, si le dénominateur est par exemple $\mathfrak{C}x + \mathfrak{C}'y + \gamma x^2 + \gamma' xy$, il est nécessaire de savoir si c'est $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$, ou un autre coëfficient qu'il faut faire entrer dans l'origine des dérivations : on se décide ordinairement en examinant quelles sont les régions dans lesquelles s'étend la série récurrente, les limites de la série dans ces régions, la direction de ces limites, et ensuite les formes du numérateur et du dénominateur.

Quand α n'est point zéro et que la série est renfermée dans la première région, c'est-à-dire, dans les cas traités précédemment, il faut toujours commencer le développement par α : mais il n'en est pas de même dans le cas où, sans que α soit zéro, la série s'étend hors de la première région, ainsi que nous le ferons voir par la suite.

243. Voici à présent un théorème au moyen duquel on peut trouver l'expression du terme général, en commençant le développement par un terme quelconque du dénominateur, ou bien, pour nous exprimer à notre manière, en faisant entrer dans l'origine des dérivations un coëfficient quelconque du dénominateur.

Théorème.

Étant proposée la fraction

$$\left\{\begin{array}{r} a+bx+cx^2+dx^3\ +\text{etc.} \\ +b'y+c'xy+d'x^2y+\text{etc.} \\ +c''y^2+d''xy^2+\text{etc.} \\ +d'''y^3\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta x+\gamma x\ \ +\delta x^3\ \ +\text{etc.} \\ +\beta' y+\gamma' xy+\delta' x^2y+\text{etc.} \\ +\gamma'' y^2+\delta'' xy^2+\text{etc.} \\ +\delta''' y^3\ +\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}^{-1},$$

et le coëfficient de $x^m y^n$ dans son développement étant représenté par $A_{m,n}$; ce coëfficient, en prenant pour origine des dérivations non $a\alpha^{-1}$, mais en général $a\alpha_{r,s}{}^{-1}$, $\alpha_{r,s}$ étant le coëfficient de $x^r y^s$ dans le dénominateur, sera donné par la formule suivante :

$$A_{m,n} =$$

$$a\{\mathfrak{D}^{m+r}.\mathfrak{D}'^{n+s}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r}.\mathfrak{D}'^{n+2s}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r}.\mathfrak{D}'^{n+3s}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+b\{\mathfrak{D}^{m+r-1}.\mathfrak{D}'^{n+s}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r-1}.\mathfrak{D}'^{n+2s}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r-1}.\mathfrak{D}'^{n+3s}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+c\{\mathfrak{D}^{m+r-2}.\mathfrak{D}'^{n+s}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r-2}.\mathfrak{D}'^{n+2s}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r-2}.\mathfrak{D}^{n+3s}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+b'\{\mathfrak{D}^{m+r}.\mathfrak{D}'^{n+s-1}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r}\,\mathfrak{D}'^{n+2s-1}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r}.\mathfrak{D}'^{n+3s-1}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+c'\{\mathfrak{D}^{m+r-1}.\mathfrak{D}'^{n+s-1}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r-1}.\mathfrak{D}'^{n+2s-1}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r-1}.\mathfrak{D}'^{n+3s-1}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+d'\{\mathfrak{D}^{m+r-2}\mathfrak{D}'^{n+s-1}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r-2}.\mathfrak{D}'^{n+2s-1}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r-2}.\mathfrak{D}'^{n+3s-1}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+c''\{\mathfrak{D}^{m+r}.\mathfrak{D}'^{n+s-2}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r}.\mathfrak{D}'^{n+2s-2}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2})+\mathfrak{D}^{m+3r}.\mathfrak{D}'^{n+2s-2}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\text{etc.}\}$$
$$+d''\{\text{etc.}\}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on a en général pour un terme quelconque qui entre dans la composition de cette formule :

$$a_{p,q}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{D}^{m+r-p}.\mathfrak{D}'^{n+s-q}.\alpha_{r,s}{}^{-1}-\mathfrak{D}^{m+2r-p}.\mathfrak{D}'^{n+2s-q}.(\alpha.\alpha_{r,s}{}^{-2}) \\ +\mathfrak{D}^{m+3r-p}.\mathfrak{D}'^{n+3s-q}.(\alpha^2.\alpha_{r,s}{}^{-3})-\mathfrak{D}^{m+4r-p}.\mathfrak{D}'^{n+4s-q}.(\alpha.^3\alpha_{r,s}{}^{-4})+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

p et q pouvant être positifs ou négatifs ensemble ou séparément. On rejettera les termes et les parties de termes où les indices de $\mathfrak{D}$ ou de $\mathfrak{D}'$ deviennent négatifs, ce qui fait que la formule est toujours composée d'un nombre fini de termes.

Pour le développement réduit de cette formule, il faut observer ce qui suit: Supposons que $\alpha_{r,s}$ soit $\alpha_{3,2} = \zeta''$; en écrivant les coëfficiens du dénominateur suivant l'ordre qu'ils occupent dans le polynome, mais en les disposant en rectangle, on mènera les deux lignes de démarcation comme on les voit ici :

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	etc.
β'	γ'	δ'	ε'	ζ'	η'	θ'	etc.
γ''	δ''	ε''	ζ''	η''	θ''	ι''	etc.
δ'''	ε'''	ζ'''	η'''	θ'''	ι'''	κ'''	etc.
ε^{IV}	ζ^{IV}	η^{IV}	θ^{IV}	ι^{IV}	κ^{IV}	λ^{IV}	etc.
ζ^{V}	η^{V}	θ^{V}	ι^{V}	κ^{V}	λ^{V}	μ^{V}	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

De la position de ces lignes on tire les conséquences suivantes:

1°. Toutes les lettres renfermées dans l'angle ont des dérivées indéfiniment tant par rapport à D que par rapport à D'.

2.° Les lettres des deux premières lignes horizontales ont des dérivées indéfiniment selon D, mais celles de la seconde de ces lignes, à commencer par ε', n'ont pas de dérivées selon D'.

3.° Les lettres des trois premières verticales ont des dérivées indéfiniment selon D'; mais celles de la dernière de ces lignes, à commencer par ε'', n'ont point de dérivées selon D.

Si c'est par $\alpha_{r,s}$ en général que commence le développement, la ligne horizontale de démarcation sera placée après s lignes horizontales, et la ligne verticale, après r lignes verticales de coëfficiens du dénominateur.

On regardera au reste α et ζ'', ou α et $\alpha_{r,s}$, comme des premières quantités.

---

244. Nous allons indiquer l'analyse qui conduit à ce théorème et qui lui sert de démonstration.

Supposons qu'il faille développer la fraction proposée en prenant pour origine des dérivations $a\alpha_{2,1}^{-1}$, c'est-à-dire $a\delta'^{-1}$: je divise le numérateur et le dénominateur par x^2y qui multiplie δ', je fais $x^{-2}y^{-1} = z$ (on feroit $x^{-r}y^{-s} = z$, si l'origine des dérivations étoit $a\alpha_{r,s}^{-1}$), et j'ordonne suivant les dimensions de x, y et z; la fraction proposée prendra cette forme,

$d' +$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
d' & + e'x & + f'x^2 & + g'x^3 & + h'x^4 & + \text{etc.} \\
 & + e''y & + f''xy & + g''x^2y & + h''x^3y & + \text{etc.} \\
 & \vdots & + f'''y^2 & + g'''xy^2 & + h'''x^2y^2 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & + g^{IV}y^3 & + h^{IV}xy^3 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & + h^{V}y^4 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \text{etc.} \\
 & az & + bxz & + cx^2z & + dx^3z & + \text{etc.} \\
 & & + b'yz & + c'xyz & \mathrm{o} & \mathrm{o} \\
 & & & + c''y^2z & + d''xy^2z & \mathrm{o} \\
 & & & & + d'''y^3z & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.}
\end{array}\right\} \ldots\ldots \mathfrak{A},\ \ldots\ldots \mathfrak{B}z$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\delta' & + \varepsilon'x & + \zeta'x^2 & + \eta'x^3 & + \theta'x^4 & + \text{etc.} \\
 & + \varepsilon''y & + \zeta''xy & + \eta''x^2y & + \theta''x^3y & + \text{etc.} \\
 & \vdots & + \zeta'''y^2 & + \eta'''xy^2 & + \theta'''x^2y^2 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & + \eta^{IV}y^3 & + \theta^{IV}xy^3 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & + \theta^{V}y^4 & + \text{etc.} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + \text{etc.} \\
 & \alpha z & + \beta xz & + \gamma x^2z & + \delta x^3z & + \text{etc.} \\
 & & + \beta'yz & + \gamma'xyz & \mathrm{o} & \mathrm{o} \\
 & & & + \gamma''y^2z & + \delta''xy^2z & \mathrm{o} \\
 & & & & + \delta'''y^3z & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.}
\end{array}\right\} \ldots\ldots a,\ \ldots\ldots bz \text{ ou } n''.a.z$$

De cette manière chaque polynome double a été transformé en polynome triple incomplet, car z n'y est qu'à la première puissance; et chaque polynome a été séparé en deux triangles, dont le second n'a que la première ligne horizontale et les deux premières obliques; le nombre de ces lignes est déterminé par les indices de $\alpha_{1,1}$, par lequel on commence le développement : ainsi, si on commençoit par $\alpha_{r,s}$, il y auroit s lignes horizontales et r obliques. Les deux triangles de chaque polynome sont tels que, le premier étant placé dans l'espace vide du second, les coëfficiens vont de suite sans interruption.

On remarque qu'en prenant δ' pour premier terme du dénominateur et

$a\delta'^{-1}$ pour origine des dérivations, il faudra regarder les coëfficiens α, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, etc. du second triangle, indiqué par $\mathfrak{b}z$, comme les dérivées par rapport à z des coëfficiens du premier triangle, indiqué par $\mathfrak{a}$; de sorte qu'en désignant par D'' la dérivation relative à z, on aura $\mathrm{D}''.\delta' = \alpha$, $\mathrm{D}.\mathrm{D}''.\delta'. = \mathrm{D}''.\varepsilon' = \mathfrak{C}$, $\mathrm{D}'.\mathrm{D}''.\delta' = \mathrm{D}''.\varepsilon'' = \mathfrak{C}'$, $\mathrm{D}^2.\mathrm{D}''.\delta' = \mathrm{D}''.\zeta' = \gamma$, et ainsi de suite.

Représentons par (a) la fraction précédente entière et les parties triangulaires qui la composent par les lettres que nous avons mises à la suite de ces parties, et nous aurons

$$(a) = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z}{\mathfrak{a} + \mathrm{D}''.\mathfrak{a}.z} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z)(\mathfrak{a} + \mathrm{D}''.\mathfrak{a}.z)^{-1} =$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z)(\mathfrak{a}^{-1} + \mathrm{D}''.\mathfrak{a}^{-1}.z + \mathrm{D}''^2.\mathfrak{a}^{-1}.z^2 + \mathrm{D}''^3.\mathfrak{a}^{-1}.z^3 + \mathrm{D}''^4.\mathfrak{a}^{-1}.z^4 + \text{etc.}),$$

ou, en effectuant la multiplication par $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z$, et écrivant le produit partiel par $\mathfrak{B}z$ le premier,

$$\begin{aligned}(a) = \quad & \mathfrak{B}.\mathfrak{a}^{-1}.z + \mathfrak{B}.\mathrm{D}''.\mathfrak{a}^{-1}.z^2 + \mathfrak{B}.\mathrm{D}''^2.\mathfrak{a}^{-1}.z^3 + \mathfrak{B}.\mathrm{D}''^3.\mathfrak{a}^{-1}.z^4 + \text{etc.}\\ & + \mathfrak{A}.\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{A}.\mathrm{D}''.\mathfrak{a}^{-1}.z + \mathfrak{A}.\mathrm{D}''^2.\mathfrak{a}^{-1}.z^2 + \mathfrak{A}.\mathrm{D}''^3.\mathfrak{a}^{-1}.z^3 + \mathfrak{A}.\mathrm{D}''^4.\mathfrak{a}^{-1}.z^4 + \text{etc.}\end{aligned}$$

De là on tirera aisément le coëfficient de $x^m y^n$ dans le développement de (a), En effet, puisque z est ici $= x^{-2}y^{-1}$, les termes affectés de $x^m y^n$, $x^{m+2}y^{n+1}z$, $x^{m+4}y^{n+2}z^2$, $x^{m+6}y^{n+3}z^3$, etc., $x^{m+2p}y^{n+p}z^p$, etc. seront tous des mêmes dimensions $x^m y^n$. On voit donc, qu'en substituant dans la dernière équation, au lieu de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{a}$, leurs valeurs en séries ordonnées suivant x et y; pour avoir le coëfficient de $x^m y^n$ dans (a), il faudra prendre le coëfficient de $x^{m+2}y^{n+1}$ dans $\mathfrak{B}.\mathfrak{a}^{-1}.z$, ensuite celui de $x^{m+4}y^{n+2}$ dans $\mathfrak{B}.\mathrm{D}''.\mathfrak{a}^{-1}.z^2$, et ainsi de suite, puis le coëfficient de $x^m y^n$ dans $\mathfrak{A}.\mathfrak{a}^{-1}$, le coëfficient de $x^{m+2}y^{n+1}$ dans $\mathfrak{A}.\mathrm{D}''.\mathfrak{a}^{-1}.z$, et ainsi de suite; de sorte qu'on aura, n.° 187, en ordonnant par rapport à a, b, c, d, etc. b', c', d', e', etc. c'', d'', etc. et désignant par $A_{m,n}$ le coëfficient de $x^m y^n$ dans (a),

$$A_{m,n} =$$

$$\begin{aligned}& a(\mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n+1}.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+6}.\mathrm{D}'^{n+3}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.})\\
& + b(\mathrm{D}^{m+1}.\mathrm{D}'^{n+1}.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+3}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+5}.\mathrm{D}'^{n+3}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.})\\
& + c(\mathrm{D}^{m}.\mathrm{D}'^{n+1}.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n+3}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.}) + \text{etc.}\\
& + b'(\mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n}\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n+1}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+6}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.})\\
& + c'(\mathrm{D}^{m+1}.\mathrm{D}'^{n}.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+3}.\mathrm{D}'^{n+1}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+5}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.})\\
& + d'(\mathrm{D}^{m}.\mathrm{D}'^{n}.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n+1}.\mathrm{D}''.\delta'^{-1} + \mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n+2}.\mathrm{D}''^2.\delta'^{-1} + \text{etc.})\\
& + \text{etc.} + c''(\text{etc.}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

A présent, si on reporte les yeux sur le dénominateur de la fraction proposée, on verra que toutes les dérivées des lettres simples du premier triangle a, où D″ auroit un indice supérieur à l'unité, sont nulles, car il n'entre dans le second triangle bz d'autre puissance de z que la première. Ainsi $\underline{D}^{\prime\prime 2}.\delta' = 0$, $\underline{D}^{2}.D'.\underline{D}^{\prime\prime 3}.\delta' = 0$, $\underline{D}^{\prime\prime 2}.\varepsilon' = 0$, etc. De là il s'ensuit que, α étant la dérivée D″ de δ', comme on l'a vu ci-dessus, il est évident qu'on a

$$D''.\delta'^{-1} = -\delta'^{-2}D''.\delta' = -\delta'^{-2}.\alpha,$$
$$\underline{D}''^{2}.\delta'^{-1} = +\delta'^{-3}.\alpha^{2},$$
$$\underline{D}''^{3}.\delta'^{-1} = -\delta'^{-4}.\alpha^{3},$$
$$\underline{D}''^{4}.\delta'^{-1} = +\delta'^{-5}.\alpha^{4},$$
etc.

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on a pour le coëfficient cherché de $x^m y^n$,

$$A_{m,n} =$$
$$a(\underline{D}^{m+2}.\underline{D}'^{n+1}.\delta'^{-1} - \underline{D}^{m+4}.\underline{D}'^{n+2}.(\alpha.\delta'^{-2}) + \underline{D}^{m+6}.\underline{D}'^{n+3}.(\alpha^{2}.\delta'^{-3}) - \text{etc.})$$
$$+ b(\underline{D}^{m+1}.\underline{D}'^{n+1}.\delta'^{-1} - \underline{D}^{m+3}.\underline{D}'^{n+2}.(\alpha.\delta'^{-2}) + \underline{D}^{m+5}.\underline{D}'^{n+3}.(\alpha^{2}.\delta'^{-3}) - \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ b'(\underline{D}^{m+2}.\underline{D}'^{n}.\delta'^{-1} - \underline{D}^{m+4}.\underline{D}'^{n+1}.(\alpha.\delta'^{-2}) + \underline{D}^{m+6}.\underline{D}'^{n+2}.(\alpha^{2}.\delta'^{-3}) - \text{etc.})$$
$$+ c'(\underline{D}^{m+1}.\underline{D}'^{n}.\delta'^{-1} - \underline{D}^{m+3}.\underline{D}'^{n+1}.(\alpha.\delta'^{-2}) + \underline{D}^{m+5}.\underline{D}'^{n+2}.(\alpha^{2}.\delta'^{-3}) - \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.} + \text{etc.}$$

On voit en outre par la forme du second triangle bz que δ, ε, ζ, η, etc. n'ont pas de dérivées selon D′ et que γ', δ'', ε''', ζ^{IV}, η^{V}, etc. n'en ont point selon D ; ce qui fait voir la nécessité des lignes de démarcation dont nous avons parlé dans le numéro 243.

La même analyse s'étendant en général au cas où l'on prendroit $\alpha_{r,s}x^r y^s$ pour premier terme du dénominateur, on en conclud aisément le théorème précédent, qu'il s'agissoit de démontrer.

Ce théorème est dû à Français, Professeur de Mathématiques à Colmar; je lui avois communiqué mes méthodes de dérivation et l'application que j'en faisois aux séries récurrentes doubles, ce qui lui a fourni l'occasion de trouver ce théorème et de faire des observations sur les cas où les séries récurrentes doubles s'étendent dans différentes régions.

245. Des applications à des exemples vont éclaircir les règles que nous venons de donner.

Exemple V.

Soit proposée l'équation de relation

$$o = \begin{cases} \gamma' A_{m-1,n-1} + \beta' A_{m,n-1}, \\ + \beta A_{m-1,n} \end{cases}$$

dans laquelle α est zéro, qu'on ait pour condition que les termes A, B', C'', D''', etc. de la première ligne verticale de la série soient données ou arbitraires, ceux de la même ligne étendue dans la quatrième région étant zéro, et qu'on suppose zéro tous les termes de la série dans les seconde et troisième régions: on demande l'expression du terme général $A_{m,n}$ de cette série.

En disposant les termes donnés par la question, comme on les voit ici:

o	o
o	$A_{0,0}$
o	$A_{0,1}$
o	$A_{0,2}$
etc.	etc.,

on verra facilement, en promenant sur ce tableau de la série le second membre de l'équation $a_{m,n} = \left\{ \begin{matrix} \gamma' A_{m-1,n-1} + \beta' A_{m,n-1} \\ + \beta A_{m-1,n} \end{matrix} \right\}$, qu'on pourra faire $a_{m,n} = o$ pour toutes les valeurs particulières de m et n, excepté aux endroits qui répondent à $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $a_{0,3}$, etc. $a_{0,n}$, etc., pour lesquels on a généralement

$$a_{0,n} = \left\{ \begin{matrix} \gamma' A_{-1,n-1} + \beta' A_{0,n-1} \\ + \beta A_{-1,n} \end{matrix} \right\} = \beta' A_{0,n-1};$$

ainsi $a_{0,0}$ étant $= o$, les seuls coëfficiens qui restent au numérateur seront $b' = \beta' A_{0,0}$, $c'' = \beta' A_{0,1}$, $d''' = \beta' A_{0,2}$, $e^{IV} = \beta' A_{0,3}$, etc. $a_{0,n} = \beta' A_{0,n-1}$, etc., et la fraction génératrice sera

$$\frac{b'y + c''y^2 + d'''y^3 + e^{IV}y^4 + \text{etc.} + a_{0,n-1}y^n + a_{0,n}y^{n+1} + \text{etc.}}{\beta x + \beta' y + \gamma' xy}.$$

Puisque la série ne s'étend pas dans les régions des exposans négatifs de x, on voit qu'aucun terme n'y sauroit être affecté de x^{-1}, x^{-2}, etc., et que dans le

le développement de cette fraction on ne peut prendre ni βx ni $\gamma' xy$ pour premier terme du dénominateur, mais qu'il faut prendre $\beta' y$; ainsi l'origine des dérivations sera $a\beta^{l-1}$, et l'on aura par la formule du n.° 243, en y faisant $r=0$ et $s=1$, et mettant au lieu de a, b', c'', d''', etc. leurs valeurs précédentes,

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ (1)$$

$$\begin{aligned}
&\beta' A_{0,0}\{\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\beta^{l-1} - \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n+1}.(\alpha.\beta^{l-2}) + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n+2}.(\alpha^2.\beta^{l-3}) - \text{etc.}\}\\
&+\beta' A_{0,1}\{\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n-1}.\beta^{l-1} - \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.(\alpha.\beta^{l-2}) + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{n+1}.(\alpha^2.\beta^{l-3}) - \text{etc.}\}\\
&+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\beta' A_{0,n}\{\mathfrak{D}^m.\beta^{l-1} - \mathfrak{D}^m.\mathrm{D}'(\alpha.\beta^{l-2}) + \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^2.(\alpha^2.\beta^{l-3}) - \text{etc.}\}\\
&+\beta' A_{0,n+1}\{\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{-1}.\beta^{-1} - \mathfrak{D}^m.(\alpha.\beta^{l-2}) + \mathfrak{D}^m.\mathrm{D}'.(\alpha^2.\beta^{l-3}) - \text{etc.}\}\\
&+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\beta' A_{0,n+m}\{\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{-m}.\beta^{l-1} - \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^{-m+1}.(\alpha.\beta^{l-2}) + \text{etc.} \pm \mathfrak{D}^m.(\alpha^m.\beta^{l-m-1})\}.
\end{aligned}$$

Puisque $r=0$ et $s=1$, les lignes d'origine ou de démarcation prennent ici la position suivante (n.° 243), en disposant en rectangle les coëfficiens du dénominateur,

α	β	o
β'	γ'	o
o	o	o

Ainsi ni α ni β' n'ont de dérivées selon D', car γ'' est zéro. Donc tous les termes de la formule précédente (1) affectés de D' avec des indices positifs sont nuls, et, tous ceux à indices négatifs devant être rejetés, la formule se réduit à

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\begin{aligned}
&\beta'\{A_{0,n}\mathfrak{D}^m.\beta^{l-1} - A_{0,n+1}\mathfrak{D}^m.(\alpha.\beta^{l-2}) + A_{0,n+2}\mathfrak{D}^m.(\alpha^2.\beta^{l-3}) - \text{etc.}\\
&\qquad \mp A_{0,n+m-1}\mathfrak{D}^m.(\alpha^{m-1}.\beta^{l-m}) \pm A_{0,n+m}\mathfrak{D}^m.(\alpha^m.\beta^{l-m-1})\}.
\end{aligned}$$

Donc, à cause de $\alpha=0$, $\mathrm{D}.\alpha=\beta$, et $\mathfrak{D}^2.\alpha$, $\mathfrak{D}^3.\alpha$, etc. $=0$, on trouve, en exécutant les dérivations sur α, qu'on fera zéro ensuite,

$$\begin{aligned}
A_{m,n} = \beta'\{&A_{0,n}\mathfrak{D}^m.\beta^{l-1} - A_{0,n+1}\beta\mathfrak{D}^{m-1}.\beta^{l-2} + A_{0,n+2}\beta^2\mathfrak{D}^{m-2}.\beta^{l-3}\\
&- \text{etc.} \pm A_{0,n+m}.\beta^m\beta^{l-m-1}\}.
\end{aligned}$$

Or on a ici

$$\mathfrak{D}^{m-k}.\beta^{l-k-1} =$$

$$\pm\frac{k+1.k+2\ldots.(m-1)m}{1.\ \ 2\ldots\ldots(m-k)}\beta^{l-m-1}\gamma'^{m-k} = \pm\frac{m.m-1\ldots(m-k+1)}{1.\ \ 2\ldots\ldots\ldots k}\beta^{l-m-1}\gamma'^{m-k},$$

le signe $+$ ou $-$ ayant lieu suivant que $m-k$ est pair ou impair.

Donc on a enfin

$$A_{m,n} = \qquad \ldots\ldots (3)$$
$$\pm \zeta'^{-m}\{A_{0,n}.\gamma'^m + A_{0,n+1}.m\gamma'^{m-1}\zeta + A_{0,n-2}.\frac{m.m-1}{1.\ 2}\gamma'^{m-2}\zeta^2$$
$$+ \text{etc.} + A_{0,n+m-1}.m\gamma'\zeta^{m-1} + A_{0,n+m}.\zeta^m\},$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que m est pair ou impair. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on peut déduire d'une solution différente du même exemple, donnée par LAPLACE dans les mémoires de Paris, année 1779, n.° XVII, page 267.

Si l'on fait n négatif dans la formule (1) ci-dessus, on trouve, en rejetant les termes et celles de leurs parties où les indices de D sont négatifs et ceux de D' négatifs ou positifs $>$ o, que cette formule se réduit à la suivante :

$$A_{m,-n} = \qquad \ldots\ldots (4)$$
$$\pm \zeta'\{A_{0,0}\mathrm{D}^m.(\alpha^n.\zeta'^{-n-1}) - A_{0,1}\mathrm{D}^m.(\alpha^{n+1}.\zeta'^{-n-2}) + A_{0,2}\mathrm{D}^m.(\alpha^{n+2}.\zeta'^{-n-3}) - \text{etc.}\}$$

laquelle, à cause que $\alpha = 0$ et que sa seule dérivée D est ζ, devient

$$A_{m,-n} = \qquad \ldots\ldots (5)$$
$$\pm \zeta'\{A_{0,0}.\zeta^n\mathrm{D}^{m-n}.\zeta'^{-n-1} - A_{0,1}.\zeta^{n+1}\mathrm{D}^{m-n-1}.\zeta'^{-n-2} + A_{0,2}.\zeta^{n+2}\mathrm{D}^{m-n-2}.\zeta'^{-n-3} - \text{etc.}\}.$$

D'où il suit que $A_{m,-n}$ n'est zéro qu'autant que m est $< n$. Ainsi la série récurrente s'étend, sous forme de triangle, dans la quatrième région.

EXEMPLE VI.

246. Étant donné le commencement de la table suivante, où chaque terme est formé de la somme de celui qui le précède dans la même ligne horizontale et de celui qui le suit d'un rang dans la ligne horizontale immédiatement supérieure, avec la condition que chacun des termes de la première ligne horizontale soit égal à l'unité : on demande le terme général de cette table :

1	1	1	1	1	etc.
1	2	3	4	5	etc.
2	5	9	14	20	etc.
5	14	28	48	75	etc.
14	42	90	165	275	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

L'équation de relation est $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m+1,n-1}$; j'y mets $m - 1$ au lieu de m, et elle devient

$$o = \left\{ \begin{array}{r} - A_{m,n-1} \\ - A_{m-2,n} + A_{m-1,n} \end{array} \right\};$$

ainsi α est zéro, $\mathcal{C} = 1$, $\mathcal{C}' = -1$, $\gamma = -1$, les autres dérivées de α étant zéro.

Je continue la table proposée dans les autres régions au moyen de l'équation de relation, et j'ai ce tableau

			etc.							etc.			
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
etc.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	o	etc.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.*	o	o	o	
	.	.	.	.	.	.	.*	1*	1	1	1	1	
etc.	.	.	.	.	.*	−1*	o	1	2	3	4	5	etc.
	.	.	.	o	−1	−1	o	2	5	9	14	20	
	.	o	o	−1	−2	−2	o	5	14	28	48	75	
etc.	o	o	−1	−3	−5	−5	o	14	42	90	165	275	etc.
	o	−1	−4	−9	−14	−14	o	42	132	297	572	1001	
		etc.		etc.					etc.		etc.		

où les termes marqués par des points demeurent indéterminés, parce que rien de ce qui est donné ne peut conduire à les déterminer; ils sont donc arbitraires. Faisons les égaux chacun à zéro. On pourroit leur donner d'autres valeurs, sans que la partie de la série comprise dans la première région en fût altérée.

Je vois facilement que dans la supposition que nous venons de faire, l'équation de relation a lieu dans toute l'étendue de la série, excepté aux deux endroits après les termes desquels nous avons mis des *; ces endroits répondent aux termes $a_{1,0}$ et $a_{-1,1}$ du numérateur, dont les valeurs sont

$$a_{1,0} = \left\{ \begin{array}{r} - A_{1,-1} \\ - A_{-1,0} + A_{0,0} \end{array} \right\} = 1, \quad a_{-1,1} = \left\{ \begin{array}{r} - A_{-1,0} \\ - A_{-3,1} + A_{-2,1} \end{array} \right\} = -1;$$

tous les autres coëfficiens du numérateur sont donc zéro. Ainsi le numérateur se réduit à $x - x^{-1}y$, et la fraction génératrice est

$$\frac{x - x^{-1}y}{x - x^2 - y} = \frac{b.x + a_{-1,1}.x^{-1}y}{\mathcal{C}x + \gamma x^2 + \mathcal{C}'y}.$$

Ici le développement doit commencer par $\mathcal{C}$, de sorte que l'origine sera $a\mathcal{C}^{-1}$,

et, en faisant, dans le théorème du n.° 143, $r = 1$ et $s = 0$, on aura, en observant qu'ici l'indice p de $a_{p,q}$ devient aussi négatif,

$$A_{m,n} =$$
$$b\{\mathrm{D}^m.\mathrm{D}'^n.\beta^{-1} - \mathrm{D}^{m+1}.\mathrm{D}'^n.(\alpha.\beta^{-2}) + \mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^n.(\alpha^2.\beta^{-3}) - \text{etc.}\}$$
$$+ a_{-1,1}\{\mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n-1}.\beta^{-1} - \mathrm{D}^{m+3}\mathrm{D}'^{n-1}.(\alpha.\beta^{-2}) + \mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n-1}.(\alpha^2.\beta^{-3}) - \text{etc.}\}.$$

Les lignes d'origine ou de démarcation prennent dans ce cas la position suivante, en mettant les coëfficiens du dénominateur sous la forme de rectangle,

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta' & & \end{array}$$

Ainsi α n'a point de dérivée selon D, donc le signe D n'affecte point α; et puisque, par la nature du dénominateur, α n'a d'autre dérivée selon D' que β', on donnera facilement au développement précédent la forme suivante, en mettant pour b et $a_{-1,1}$ leurs valeurs 1 et -1,

$$A_{m,n} =$$
$$\mathrm{D}^m.\mathrm{D}'^n.\beta^{-1} - \beta'\mathrm{D}^{m+1}.\mathrm{D}'^{n-1}.\beta^{-2} + \beta'^2\mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n-2}.\beta^{-3} - \text{etc.}$$
$$- \mathrm{D}^{m+2}.\mathrm{D}'^{n-1}.\beta^{-1} + \beta'\mathrm{D}^{m+3}.\mathrm{D}'^{n-2}.\beta^{-2} - \beta'^2\mathrm{D}^{m+4}.\mathrm{D}'^{n-3}.\beta^{-3} + \text{etc.}$$

Mais, β n'ayant d'autre dérivée que γ, tous les termes dans lesquels l'indice de D' n'est pas nul ne donneront rien : il n'y aura donc dans la première ligne de cette formule qu'un seul terme à conserver et un seul dans la seconde; et l'on aura ainsi

$$A_{m,n} = \pm \beta'^n\mathrm{D}^{m+n}.\beta^{-n-1} \pm \beta'^{n-1}\mathrm{D}^{m+n+1}.\beta^{-n},$$

ou, en développant encore,

$$A_{m,n} = \begin{cases} \pm \beta'^n.\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n+m)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(m+n)}\beta^{-2n-m-1}\gamma^{m+n} \\ \pm\beta'^{n-1}.\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+m)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(m+n+1)}\beta^{-2n-m-1}\gamma^{m+n+1}. \end{cases}$$

Mettant pour β, β', γ leurs valeurs 1, -1, $-i$, on aura

$$A_{m,n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n+m)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots(m+n)} - \frac{n(n+1)\ldots\ldots(2n+m)}{1.\quad 2\ldots\ldots(m+n+1)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+m)}{1.\quad 2\ldots\ldots\ldots(m+n+1)}(m+1), \text{ ou bien}$$
$$A_{m,n} = (m+1)\frac{(m+n+2)(m+n+3)(m+n+4)\ldots\ldots(m+2n)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n};$$

ce

ce qui est en effet l'expression du terme général, comme il est aisé de le vérifier en donnant à m et à n des valeurs particulières.

EXEMPLE VII. (*)

247. Étant donnée l'équation de relation

$$A_{m,n} = pA_{m-1,n-1} + (1-p)A_{m-1,n+1}, \qquad \ldots\ldots(1)$$

avec les conditions que $A_{m,0} = 1$, m étant un entier positif quelconque, et que $A_{0,n} = 0$, n étant un entier quelconque positif ou négatif, excepté lorsque $n = 0$, auquel cas $A_{0,0} = 1$; que de plus on suppose $A_{m,n} = 0$ pour toutes les valeurs négatives de m : faisant $1 - p = q$, pour plus de simplicité, on demande le terme général.

Je mets d'abord $n-1$ au lieu de n dans l'équation de relation, et je l'écris ainsi

$$0 = \begin{cases} -pA_{m-1,n-2} \\ \quad 0 \qquad + A_{m,n-1}; \\ -qA_{m-1,n} \end{cases} \qquad \ldots\ldots(2)$$

on a mis un o dans le second membre pour conserver aux termes leurs places dans la disposition en rectangle. Au moyen des conditions données et de l'équation (2), je calcule le commencement de la série et je trouve

	etc.			etc.		etc.			etc.
	o	o	o	o	o	q^4	q^4		etc.
etc.	o	o	o	o	q^3	q^3	q^3+3q^4p		etc.
	o	o	o	q^2	q^2	q^2+2q^3p	q^2+2q^3p		etc.
	o*	o*	q*	q*	$q+q^2p$*	$q+q^2p$*	$q+q^2p+2q^3p^2$*		etc.
	o	1*	1*	1*	1*	1*	1*		1*
	o*	o*	p*	p*	$p+p^2q$*	$p+p^2q$*	$p+p^2q+2p^3q^2$*		etc.
etc.	o	o	o	p^2	p^2	p^2+2p^3q	p^2+2p^3q		etc.
	o	o	o	o	p^3	p^3	p^3+3p^4q		etc.
	o	o	o	o	o	p^4	p^4		etc.
	etc.			etc.		etc.			etc.

(*) On est conduit à cet exemple par le problème V de LAGRANGE, numéros 58 et suivens du mémoire cité, savoir : « La probabilité d'amener un événement donné à chaque coup étant p, un joueur parie qu'en « m coups au moins il amènera cet événement un nombre de fois qui surpassera de n le nombre des fois « qu'il ne l'amènera pas. »

Si l'on examine sur ce tableau les lignes et les lieux où l'équation de relation n'est pas satisfaite, c'est-à-dire où $a_{m,n}$ n'est pas zéro dans

$$a_{m,n} = \begin{cases} -\, pA_{m-1,n-2} \\ \quad 0 \qquad + A_{m,n-1}, \\ -\, qA_{m-1,n} \end{cases}$$

on trouvera que cela a lieu pour les seuls termes désignés par des *, et qui répondent aux valeurs de $a_{0,1}$, $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $a_{3,1}$, etc. $a_{m,1}$, etc. indéfiniment; ainsi le numérateur de la fraction génératrice se réduit à une seule ligne, et la fraction elle-même sera

$$\frac{b'y + c'xy + d'x^2y + e'x^3y + f'x^4y + \text{etc.}}{-\, qx + y - pxy^2}.$$

Pour avoir l'expression du terme général $A_{m,n}$, il est aisé de voir que la série ne s'étendant pas dans les régions des exposans négatifs de x, mais bien dans celle des exposans négatifs de y, et $A_{0,0}$ étant $=1$, il faut commencer le développement de la fraction précédente par le terme y du dénominateur, et prendre $a\beta'^{-1}$ pour origine des dérivations; les lignes de démarcation seront donc, à cause de $r=0$ et de $s=1$,

α	β	0
β'	0	0
0	δ''	0

où l'on voit que α et β n'ont point de dérivées selon D'. On aura donc par le théorème du n.° 243, en mettant α hors du signe D', puisqu'il n'a point de dérivée selon D',

$$A_{m,n} =$$

$$\begin{aligned}
& b'\{\mathrm{D}^{m}.\mathrm{D}'^{n}.\beta'^{-1} - \mathrm{D}^{m}.(\alpha\mathrm{D}'^{n+1}.\beta'^{-2}) + \mathrm{D}^{m}.(\alpha^2\mathrm{D}'^{n+2}.\beta'^{-3}) - \text{etc.}\} \\
+\ & c'\{\mathrm{D}^{m-1}.\mathrm{D}'^{n}.\beta'^{-1} - \mathrm{D}^{m-1}.(\alpha\mathrm{D}'^{n+1}.\beta'^{-2}) + \mathrm{D}^{m-1}.(\alpha^2\mathrm{D}'^{n+2}.\beta'^{-3}) - \text{etc.}\} \\
+\ & d'\{\mathrm{D}^{m-2}.\mathrm{D}'^{n}.\beta'^{-1} - \mathrm{D}^{m-2}.(\alpha\mathrm{D}'^{n+1}.\beta'^{-2}) + \mathrm{D}^{m-2}.(\alpha^2\mathrm{D}'^{n+2}.\beta'^{-3}) - \text{etc.}\} \\
+\ & e'\{\mathrm{D}^{m-3}.\mathrm{D}'^{n}.\beta'^{-1} - \mathrm{D}^{m-3}.(\alpha\mathrm{D}'^{n+1}.\beta'^{-2}) + \mathrm{D}^{m-3}.(\alpha^2\mathrm{D}'^{n+2}.\beta'^{-3}) - \text{etc.}\} \\
+\ & f'\{\mathrm{D}^{m-4}.\mathrm{D}'^{n}.\beta'^{-1} - \mathrm{D}^{m-4}.(\alpha\mathrm{D}'^{n+1}.\beta'^{-2}) + \mathrm{D}^{m-4}.(\alpha^2\mathrm{D}'^{n+2}.\beta'^{-3}) - \text{etc.}\} \\
+\ & \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si l'on développe cette formule par rapport à α, elle devient, en faisant après le développement $\alpha = 0$, $\beta = -q$, et γ, δ, ε, etc. $= 0$,

$$A_{m,n} = \qquad\qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\begin{aligned}
& b'\{\mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\zeta'^{-1} + q\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^{n+1}.\zeta'^{-2} + q^2\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n+2}.\zeta'^{-3} + \text{etc.}\} \\
+ & c'\{\mathfrak{D}^{m-1}.\mathfrak{D}'^n.\zeta'^{-1} + q\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^{n+1}.\zeta'^{-2} + q^2\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^{n+2}.\zeta'^{-3} + \text{etc.}\} \\
+ & d'\{\mathfrak{D}^{m-2}.\mathfrak{D}'^n.\zeta'^{-1} + q\mathfrak{D}^{m-3}.\mathfrak{D}'^{n+1}.\zeta'^{-2} + q^2\mathfrak{D}^{m-4}.\mathfrak{D}'^{n+2}.\zeta'^{-3} + \text{etc.}\} \\
+ & e'\{\mathfrak{D}^{m-3}\,\mathfrak{D}'^n.\zeta'^{-1} + q\mathfrak{D}^{m-4}.\mathfrak{D}'^{n+1}.\zeta'^{-2} + q^2\mathfrak{D}^{m-5}.\mathfrak{D}'^{n+2}.\zeta'^{-3} + \text{etc.}\} \\
+ & \text{etc.} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Actuellement, puisqu'en vertu de l'équation de relation la seule quantité qui dérive de ζ' est δ'', les autres étant zéro, j'observe que, pour arriver de ζ' à δ'', il faut nécessairement faire une dérivation $\mathfrak{D}$ et une dérivation $\mathfrak{D}'$. De là on conclud que tous les termes de la formule précédente dans lesquels les indices de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{D}'$ qui affectent ζ' ne sont pas égaux entre eux, ne peuvent donner que des quantités affectées de facteurs nuls, et qu'ils disparoîtront par conséquent. Il ne faut donc conserver que les termes où ces indices sont égaux. Mais il est visible que dans chaque ligne de la formule il ne peut y avoir qu'un seul de ces termes, et que s'il y en a un dans la première, il ne peut y en avoir aucun dans aucune ligne paire; que s'il y en a un dans la seconde ligne, il ne peut y en avoir aucun dans aucune ligne impaire. Le premier cas arrive quand $m + n$ est pair, et le second quand $m + n$ est impair.

Supposons d'abord le premier cas, et que le terme de la première ligne dans lequel les indices de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{D}'$ sont égaux soit $q^l\mathfrak{D}^{m-l}.\mathfrak{D}'^{n+l}.\zeta'^{-l-1}$; il est clair que le terme pareil dans la troisième ligne sera $q^{l-1}\mathfrak{D}^{m-l-1}.\mathfrak{D}'^{n+l-1}.\zeta'^{-l}$, que celui de la cinquième ligne sera $q^{l-2}\mathfrak{D}^{m-l-2}.\mathfrak{D}'^{n+l-2}.\zeta'^{-l+1}$, et ainsi de suite. Or on a généralement

$$\mathfrak{D}^k.\mathfrak{D}'^k.\zeta'^{-i} = \pm \frac{i.\,i+1.\,i+2\ldots\ldots(i+k-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots k}\,\zeta'^{-i-k}\delta''^k;$$

donc $\mathfrak{D}^{m-l}.\mathfrak{D}'^{n+l}.\zeta'^{-l-1} = \dfrac{(l+1)(l+2)\ldots\ldots(m-1)m}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(m-l)}\,p^{m-l}$.

Mais on doit avoir $m - l = n + l$, donc $l = \frac{1}{2}(m-n)$, et $(m-l) = \frac{1}{2}(m+n)$;

donc $\mathfrak{D}^{\frac{m+n}{2}}.\mathfrak{D}'^{\frac{m+n}{2}}.\zeta'^{-\frac{(m-n)}{2}-1} = \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\frac{(m+n-2)}{2})}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots\frac{m+n}{2}}\,p^{\frac{m+n}{2}}$.

On a donc pour le terme général, $m + n$ étant pair,

$$A_{m,n} = b'.p^{\frac{m+n}{2}}.q^{\frac{m-n}{2}}.\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\frac{m+n-2}{2})}{1.\quad 2.\ldots\ldots\ldots(\frac{m+n}{2})}$$

$$+\, d'.p^{\frac{m+n}{2}-1}.q^{\frac{m-n}{2}-1}.\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-\frac{m+n}{2})}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(\frac{m+n}{2}-1)} \quad \ldots\ldots(2)$$

$$+\, f'.p^{\frac{m+n}{2}}.q^{\frac{m-n}{2}-2}.\frac{(m-4)(m-5)\ldots(m-\frac{m+n}{2}-1)}{1.\quad 2.\ldots\ldots(\frac{m+n}{2}-2)}$$

$$+\ \text{etc.}$$

Quand $m+n$ est impair, on trouvera de la même manière

$$A_{m,n} = c'.p^{\frac{m+n-1}{2}}.q^{\frac{m-n-1}{2}}.\frac{(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\frac{m+n-1}{2})}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots(\frac{m+n-1}{2})}$$

$$+\, e'.p^{\frac{m+n-1}{2}-1}.q^{\frac{m-n-1}{2}-1}.\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-\frac{m+n-1}{2}-1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(\frac{m+n-1}{2}-1)} \quad \ldots(3)$$

$$+\, g'.p^{\frac{m+n-1}{2}-2}.q^{\frac{m-n-1}{2}-2}.\frac{(m-5)(m-6)\ldots(m-\frac{m+n-1}{2}-2)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(\frac{m+n-1}{2}-2)}$$

$$+\ \text{etc.}$$

248. Il reste à trouver les valeurs de b', c', d', e', f', etc. Les premiers termes de la série, calculés au commencement du numéro précédent, donnent bien, au moyen de l'équation de relation, $b' = c' = 1$, $d' = e' = 1 - 2pq$, $f' = g' = 1 - 2pq - 2p^2q^2$, $h' = i' = 1 - 2pq - 2p^2q^2 - 4p^3q^3$; mais on ne peut pas conclure de là la valeur générale de $a_{m,1}$: nous allons donner un moyen pour y parvenir. Puisque $A_{m,0} = 1$, la formule (1) donne

$$A_{0,0} = 1 = b'.\zeta'^{-1},$$
$$A_{1,0} = 1 = c'.\zeta'^{-1},$$
$$A_{2,0} = 1 = -\,b'.\zeta\text{D.D}'.\zeta'^{-2} + d'.\zeta'^{-1},$$
$$A_{3,0} = 1 = -\,c'.\zeta\text{D.D}'.\zeta'^{-2} + e'.\zeta'^{-1},$$

etc. et généralement

$$A_{2m,0} = 1 = \pm b'.\zeta^m\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^m.\zeta'^{-m-1} \mp d'.\zeta^{m-1}\mathfrak{p}^{m-1}.\mathfrak{p}'^{m-1}.\zeta'^{-m} \pm f'.\zeta^{m-2}\mathfrak{p}^{m-2}.\mathfrak{p}'^{m-2}.\zeta'^{-m+1}$$
$$\mp\ \text{etc.} - a_{2m-2,1}.\text{D.D}'.\zeta'^{-2} + a_{2m,1}.\zeta'^{-1},$$

$$A_{2m+1,0} = 1 = \pm c'.\zeta^m\mathfrak{p}^m.\mathfrak{p}'^m.\zeta'^{-m-1} \mp e'.\zeta^{m-1}\mathfrak{p}^{m-1}.\mathfrak{p}'^{m-1}.\zeta'^{-m} \pm g'.\zeta^{m-2}\mathfrak{p}^{m-2}.\mathfrak{p}'^{m-2}.\zeta'^{-m+1}$$
$$\mp\ \text{etc.} - a_{2m-1,1}.\text{D.D}'.\zeta'^{-2} + a_{2m+1,1}.\zeta'^{-1},$$

lés

les signes supérieurs étant pour m pair, les inférieurs pour m impair. On conclud d'abord du système de ces équations que l'on a $b' = c'$, $d' = e'$, $f' = g'$ et généralement $a_{2m,1} = a_{2m+1,1}$, parce que ces quantités sont déterminées de la même manière par les équations; on peut donc n'en prendre que celles de rang impair ou celles de rang pair, et réduire à la moitié le nombre des équations précédentes. Cela posé, si on prend les expressions réduites, ou si on les déduit de la formule (2) ci-dessus, on aura

$$b' = 1,$$
$$d' = 1 - b'2pq,$$
$$f' = 1 - d'2pq - b'\frac{3.4}{1.2}p^2q^2,$$
$$h' = 1 - f'2pq - d'\frac{3.4}{1.2}p^2q^2 - b'\frac{4.5.6}{1.2.3}p^3q^3,$$
$$k' = 1 - h'2pq - f'\frac{3.4}{1.2}p^2q^2 - d'\frac{4.5.6}{1.2.3}p^3q^3 - b'\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}p^4q^4,$$

etc., et en général

$$a_{2m,1} = 1 - a_{2m-2,1}.2pq - a_{2m-4,1}.\frac{3.4}{1.2}p^2q^2 - a_{2m-6,1}.\frac{4.5.6}{1.2.3}p^3q^3$$
$$- \text{etc.} - d'\frac{m.m+1..(2m-2)}{1.\ 2.....(m-1)}p^{m-1}q^{m-1} - b'\frac{m+1.m+2..2m}{1.\ 2.......m}p^mq^m.$$

Ces équations sont à termes récurrens avec un terme constant. Quoiqu'il ne soit pas toujours aisé de tirer de ces sortes d'équations la valeur du terme général indépendante des termes précédens, cette recherche est cependant toujours censée plus simple que celle du terme général de la série récurrente double, parce que des équations de la forme des précédentes n'appartiennent qu'à une série récurrente simple.

Voici comment on peut parvenir à avoir l'expression générale de $a_{2m,1}$ dans ce cas et autres semblables : on éliminera successivement, dans le système des équations précédentes, les quantités b', d', f', etc., et quand on sera parvenu ainsi à la valeur de k' ou de la quantité suivante $a_{10,1}$, on verra déjà la loi que suivent les coëfficiens des puissances de pq, et l'on en conclura généralement

$$a_{2m,1} = a_{2m+1,1} =$$
$$1 - 2pq - \frac{2.2}{1.2}p^2q^2 - \frac{2.3.4}{1.2.3}p^3q^3 - \frac{2.4.5.6}{1.2.3.4}p^4q^4$$
$$- \frac{2.3.6.7.8}{1.2.3.4.5}p^5q^5 - \text{etc.} - \frac{2.m.m+1.m+2...(2m-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.........m}p^mq^m.$$

Le problème est donc entièrement résolu, au moyen de cette expression et des formules (2) et (3).

LAGRANGE, à l'endroit cité, a donné trois solutions de cet exemple.

249. Nous allons donner un exemple du cas dont nous avons parlé à la fin du numéro 242, dans lequel, sans que α soit zéro, la série s'étend dans une autre région que la première et où il faut commencer le développement par un terme du dénominateur autre que α.

EXEMPLE VIII. (*)

Soit l'équation de relation

$$A_{m,n} = A_{m-1,n-1} + A_{m+1,n},$$

avec les conditions que $A_{m,0} = 1$, m étant zéro ou négatif quelconque, que $A_{m,0} = 0$, m étant positif, et que $A_{-1,-1} = 0$.

Je mets l'équation de relation sous cette forme

$$a_{m,n} = \begin{Bmatrix} A_{m-2,n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} - A_{m-1,n} + A_{m,n},$$

et je ferai $a_{m,n}$ zéro par tout où cela ne sera pas contraire aux conditions précédentes; au moyen de cette équation et des conditions je formerai le commencement de la série suivant:

	o	o	o	o	o*	o	o	o	o	o	
etc.	1	1	1	1	1	1*	o*	o	o	o	etc.
	7	6	5	4	3	2	1	o	o	o	
etc.	36	28	21	15	10	6	3	1	o	o	etc.
	165	120	84	56	35	20	10	4	1	o	
		etc.		etc.			etc.		etc.		

En examinant cette série, j'aperçois sans peine que $a_{m,n}$ est zéro par tout, excepté au seul endroit dont les termes ont été distingués par des *, et où $a_{m,n}$

(*) Voici une question qui conduit à cet exemple : « Une urne renferme un nombre indéfini de billets « blancs et de billets noirs; quelqu'un les tire un à un successivement, sous les conditions que quand il tire « un billet blanc on lui donne un franc, et qu'il en perde un quand il tire un billet noir : à chaque tirage « on ajoute dans l'urne un billet noir, mais on rejette le billet tiré, blanc ou noir. On demande de combien « de manières il peut se faire que le gain soit de m francs quand le nombre des billets noirs de l'urne « s'est accru de n. «

est $a_{1,0}$; car on a pour ce cas

$$a_{1,0} = \left\{ \begin{array}{l} A_{-1,-1} \\ \qquad - A_{0,0} + A_{1,0} \end{array} \right\} = -1.$$

Le numérateur de la fraction génératrice n'aura donc qu'un seul terme, et la fraction elle-même sera

$$\frac{-x}{1 - x + x^2y} = \frac{x}{-1 + x - x^2y}.$$

Maintenant, si l'on commençoit le développement par le terme -1 du dénominateur, on auroit une série où tous les exposans de x et de y seroient positifs; donc, puisque la série récurrente s'étend dans la seconde région où les exposans de x sont négatifs et ceux de y positifs, et qu'elle ne s'étend pas dans les régions où les exposans de y sont négatifs, il faut commencer le développement par le terme x, c'est-à-dire par βx du dénominateur. Donc, puisqu'ici $r = 1$ et $s = 0$, les lignes de démarcation (n.° 243) seront

$$\begin{array}{c|ccc} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta' & 0 \end{array},$$

ce qui fait voir que α n'a point de dérivée D; il n'a point non plus de dérivée D', car $\beta' = 0$; donc on pourra mettre α hors des signes D et D' dans la formule du n.° 243 : en lui donnant sa valeur -1, et observant qu'il ne reste au numérateur que le seul coëfficient $b = 1$, cette formule donne

$$A_{m,n} = \mathfrak{D}^m.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-1} + \mathfrak{D}^{m+1}.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-2} + \mathfrak{D}^{m+2}.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-3} + \text{etc.} + \mathfrak{D}^n.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-n+m-1} + \text{etc.}$$

Or, puisque la seule dérivée de β est δ', et que pour passer de β à δ' il faut une dérivation D et une dérivation D', il s'ensuit que dans cette formule tous les termes où D et D' n'ont pas des indices égaux seront affectés de facteurs nuls; il ne se conserve donc que le seul terme $\mathfrak{D}^n.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-n+m-1}$, et l'on aura (n.° 232), pour le terme général demandé,

$$A_{m,n} = \mathfrak{D}^n.\mathfrak{D}'^n.\beta^{-n+m-1} = \frac{(-n+m-1)(-n+m-2)\ldots(-2n+m)}{1.\quad 2.\ldots\ldots\ldots n}\beta^{-2n+m-1}\delta'^n;$$

donc, puisque $\beta = 1$, et $\delta' = -1$, partant $\delta'^n = \pm 1$, on a

$$A_{m,n} = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+n)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\ldots n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+n-m)}{1.\quad 2\ldots\ldots(n-m)}.$$

250. Nous ajouterions un plus grand nombre d'exemples, s'il n'étoit temps de finir l'exposition d'une méthode que nous n'offrons que comme un essai

susceptible de perfection. Notre objet a été de faire voir que le calcul des dérivations s'applique avec facilité à la recherche des termes généraux des séries récurrentes doubles : si la méthode que nous venons de donner n'est pas toujours exempte de difficultés, ces difficultés ne tiennent pas aux dérivations, et la méthode même nous paroît digne d'attention, parce que nous la croyons nouvelle à plusieurs égards, et fondée sur des principes simples et directs.

Si nous pouvions nous étendre davantage sur ce sujet, nous examinerions les cas où les termes de la série, donnés par les conditions de la question, forment des lignes droites ou brisées qui traversent l'intérieur des régions; cette matière, où l'on peut quelquefois employer l'élimination d'une manière analogue à celle du n.° 248, demande plus d'espace que nous ne pouvons lui en donner.

Arrêtons-nous un instant aux séries récurrentes triples.

(III.)

251. La méthode que nous venons de donner pour les séries doubles s'étend d'une manière uniforme aux séries récurrentes triples : il n'y a guère de difficultés nouvelles que celles de la complication et de la longueur des calculs. Nous nous bornerons en conséquence à traiter le cas des séries triples qui répond au cas particulier du n.° 223 pour les séries doubles.

Soit proposée l'équation de relation triple

$$\begin{aligned} o = \alpha A_{m,n,r} &+ \beta A_{m-1,n,r} + \gamma A_{m-1,n-1,r} \\ &+ \beta' A_{m,n-1,r} + \gamma'' A_{m-1,n,r-1} \\ &+ \beta'' A_{m,n,r-1} + \gamma''' A_{m,n-1,r-1} + \delta''' A_{m-1,n-1,r-1}\,; \end{aligned}$$

je l'écrirai comme il suit, en supposant que le rectangle (1) soit posé sur le rectangle (2), afin de donner au second membre de cette équation la forme de parallélipipède rectangle

$$o = \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \gamma A_{m-1,n-1,r} & + \beta' A_{m,n-1,r} \\ + \beta A_{m-1,n,r} & + \alpha A_{m,n,r} \end{array}\right\} \ldots.(1) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \left.\begin{array}{ll} + \delta''' A_{m-1,n-1,r-1} & + \gamma''' A_{m,n-1,r-1} \\ + \gamma'' A_{m-1,n,r-1} & + \beta'' A_{m,n,r-1} \end{array}\right\} \ldots.(2) \end{array} \right\} = a_{m,n,r}.$$

Je supposerai aussi que les termes de la série récurrente triple soient disposés sous la forme de parallélipipède rectangle, la base de ce parallélipipède étant le tableau (3) du n.° 221, après qu'on y aura mis l'indice inférieur $_{,0}$ à la suite de chaque

chaque terme ; que sur cette base repose une tranche où les indices inférieurs qui répondent à m et à n soient les mêmes que ceux de la base, chacun des indices qui répondent à n étant suivi de l'indice $_{,1}$ qui est la valeur de r dans cette tranche ; que sur celle-ci repose une autre tranche où les valeurs de m et de n demeurent encore les mêmes, celle de r étant $= 2$ dans toute la tranche, et ainsi de suite en montant.

Il est visible que si la série est continuée dans tous les sens, il y a huit régions différentes, séparées les unes des autres par trois plans, qui se coupent à angles droits ; nommons première région celle dans laquelle les indices m, n, r (ou les exposans de x, y, z) sont tous positifs ou zéro ; et supposons que, dans le cas proposé, la série soit renfermée dans cette région.

Détachons à présent de l'équation donnée l'échelle de relation

$$\begin{array}{ccc} (1) & & (2) \\ \gamma' + \beta' & \ldots\ldots + & \delta''' + \gamma''' \\ + \beta + \alpha & & + \gamma'' + \beta'', \end{array}$$

où l'on suppose la tranche (1) posée sur la tranche (2), et promenons cette échelle dans l'espace du parallélipipède de la série, en la faisant mouvoir dans tous les sens, mais toujours parallèlement à elle-même : à chaque position, les termes de l'échelle appliqués contre ceux de la série donneront un cas particulier de l'équation de relation ; et avec un peu d'attention, on voit que cette équation peut toujours être satisfaite, c'est-à-dire que $a_{m,n,r}$ peut toujours être zéro, excepté aux endroits qui répondent à $a_{m,n,0}$, à ceux qui répondent à $a_{m,0,r}$ et à ceux qui répondent à $a_{0,n,r}$, endroits qui sont compris, savoir les premiers dans le plan des x et y, les seconds dans le plan des x et z, et les troisièmes dans le plan des y et z. On a donc par là les termes qui se conservent au numérateur de la fraction génératrice triple, et cette fraction sera de la forme

$$\frac{\begin{array}{lll} a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} & & \\ + b'y + c'xy + d'x^2y + \text{etc.} & + b''z + c''xz + d''x^2z + \text{etc.} & + c'''yz + d''''y^2z + \text{etc.} \\ \quad + c''y^2 + d''xy^2 + \text{etc.} & \quad + c'''z^2 + d'''xz^2 + \text{etc.} & \quad + d'''''yz^2 + \text{etc.} \\ \quad\quad + d'''y^3 + \text{etc.} & \quad\quad + d''''z^3 + \text{etc.} & \quad\quad + \text{etc.} \\ \quad\quad\quad + \text{etc.} & \quad\quad\quad + \text{etc.} & \end{array}}{\begin{array}{l} \alpha + \beta x + \gamma' xy \\ + \beta' y + \gamma'' xz \\ + \beta'' z + \gamma''' yz + \delta''' xyz \end{array}}$$

On parvient au même résultat en multipliant la série triple en x, y, z, qui représente la série récurrente, par le dénominateur de la fraction génératrice, que l'on obtient en étendant aux équations de relation triples ce qui a été dit aux n.ºs 223 et 224 ; car le procédé précédent n'est qu'une manière d'abréger cette multiplication.

Si l'on suppose donnés les termes de la série récurrente qui répondent à $A_{m,n,o}$, $A_{m,o,r}$ et $A_{o,n,r}$, c'est-à-dire les termes qui touchent aux plans qui séparent la première région des autres, et que de plus on suppose la série bornée à la première région, c'est-à-dire que les termes à indice m, n ou r négatif soient zéro ; on aura, pour déterminer les coëfficiens du numérateur de la fraction génératrice, les équations générales suivantes, qu'on tire facilement de l'équation de relation,

$$\begin{aligned} a_{m,n,o} &= \alpha A_{m,n,o} + \beta A_{m-1,n,o} \\ &\quad + \beta' A_{m,n-1,o} + \gamma' A_{m-1,n-1,o}, \\ a_{m,o,r} &= \alpha A_{m,o,r} + \beta A_{m-1,o,r} \\ &\quad + \beta'' A_{m,o,r-1} + \gamma'' A_{m-1,o,r-1}, \qquad \ldots\ldots (a) \\ a_{o,n,r} &= \alpha A_{o,n,r} + \beta' A_{o,n-1,r} \\ &\quad + \beta'' A_{o,n,r-1} + \gamma''' A_{o,n-1,r-1}. \end{aligned}$$

Après avoir déterminé la fraction génératrice, on aura le terme général en développant par nos règles l'expression

$$A_{m,n,r} = \mathfrak{p}^{m}.\mathfrak{p}^{n}.\mathfrak{p}''^{r}.(a\alpha^{-1}).$$

Dans un premier développement on ne conservera des dérivées de a que celles qui se conservent dans le numérateur de la fraction génératrice, et l'on rejettera tous les termes qui se trouveroient multipliés par d'autres dérivées de a. Dans les développemens ultérieurs et réduits, on aura soin de prendre pour dernières dérivées de α celles qui le sont dans l'équation de relation ou dans le dénominateur de la fraction génératrice.

On voit aussi que toutes les fois que la série ne sort pas de la première région, α n'étant point zéro, il faut commencer le développement par α : mais si la série s'étendoit dans les autres régions, ou que α fût zéro, il faudroit appliquer et étendre aux séries triples les règles et les observations des numéros 241 et suivans. Des détails sur ces cas nous feroient excéder les bornes de cet ouvrage.

EXEMPLE IX. (*)

252. Étant proposée l'équation de relation triple suivante

$$\left.\begin{array}{l} A_{m,n,r} - pA_{m-1,n,r} \\ \quad - qA_{m,n-1,r} \\ \quad - sA_{m,n,r-1} \end{array}\right\} = 0,$$

p, q, s étant des quantités constantes données; qu'on ait pour conditions que la série récurrente triple soit renfermée dans la première région, et que $A_{m,n,0} = 1$, $A_{m,0,r} = 0$, $A_{0,n,r} = 0$, lorsque m, n et s sont des entiers positifs quelconques: on demande l'expression du terme général $A_{m,n,r}$.

Cet exemple est évidemment compris dans le cas précédent, $\alpha, \beta, \beta', \beta''$ étant respectivement égaux à $1, -p, -q, -s$, et $\gamma', \gamma'', \gamma''', \delta''' = 0$. Les équations (a), par les conditions précédentes, donnent zéro pour toutes les valeurs de $a_{m,0,r}$ et de $a_{0,n,r}$; la première de ces équations donne encore zéro pour toutes les valeurs de $a_{m,0,0}$ et de $a_{0,n,0}$; elle donne ensuite

$$\begin{array}{llll} c' = 1, & d' = 1 - p, & e' = 1 - p, & \ldots\ldots\ a_{m,1,0} = 1 - p, \\ & d'' = 1 - q, & e'' = 1 - p - q, & \ldots\ a_{m,2,0} = 1 - p - q, \\ & & e''' = 1 - q, & \ldots\ldots\ a_{m,3,0} = 1 - p - q, \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a_{2,n,0} = 1 - p - q, \\ & & & a_{1,n,0} = 1 - q. \end{array}$$

Ainsi la fraction génératrice triple se réduit à la suivante

$$\frac{\begin{array}{r} c'xy + d'x^2y + e'x^3y + f'x^4y + \text{etc.} \\ + d''xy^2 + e''x^2y^2 + f''x^3y^2 + \text{etc.} \\ + e'''xy^3 + f'''x^2y^3 + \text{etc.} \\ + f^{\text{IV}}xy^4 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}}{\alpha + \beta x + \beta' y + \beta'' z}$$

(*) La solution de cet exemple donne celle du problème suivant de Lagrange, n.° 54 du mémoire cité. « On suppose qu'à chaque coup il puisse arriver trois événemens, que l'on désignera, pour plus de clarté, par « P, Q, S, et que les probabilités de ces événemens soient respectivement égales à p, q, s; on demande « le sort d'un joueur qui parieroit d'amener l'événement S r fois avant que l'événement Q arrive n fois et « l'événement P, m fois. » Ce problème se rapporte à celui de la note de notre exemple premier, puisqu'il n'est autre chose que ce dernier problème étendu à trois événemens.

Le premier développement de $A_{m,n,r} = \mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . \mathrm{D}''^r . (a\alpha^{-1})$, où il faut prendre α pour origine, se réduit donc, en rejetant toutes les dérivées de a qui ne se trouvent pas au numérateur, à cette seule série

$$A_{m,n,r} =$$

$$\begin{aligned}
& c' \mathrm{D}^{m-1} . \mathrm{D}'^{n-1} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + d' \mathrm{D}^{m-2} . \mathrm{D}'^{n-1} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + e' \mathrm{D}^{m-3} . \mathrm{D}'^{n-1} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + \text{etc.} \\
& \qquad + d'' \mathrm{D}^{m-1} . \mathrm{D}'^{n-2} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + e'' \mathrm{D}^{m-3} . \mathrm{D}'^{n-2} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad + e''' \mathrm{D}^{m-3} . \mathrm{D}''^{n-3} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + \text{etc.} \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_{m-2,n,0} \mathrm{D}^2 . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} \\
& + a_{m-1,n-1,0} \mathrm{D} . \mathrm{D}' . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + a_{m-1,n,0} \mathrm{D} . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} \\
& + a_{m,n-2,0} \mathrm{D}'^2 . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + a_{m,n-1,0} \mathrm{D}' . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} + a_{m,n,0} \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

Puisque α n'a ici d'autres dérivées que ς, ς' et ς'', on aura généralement

$$\mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . \mathrm{D}''^r . \alpha^{-1} = \mathrm{D}^m . \mathrm{D}'^n . (\pm \alpha^{-r-1} \varsigma''^r) =$$

$$\pm \frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+m+n)}{1.\ 2\ldots\ldots m.\ 1.\ 2\ldots\ldots n} \alpha^{-m-n-r-1} \varsigma^m \varsigma'^n \varsigma''^r = \frac{(r+1)\ldots(r+m+n)}{1.\ 2\ldots m.\ 1.\ 2\ldots n} p^m q^n s^r;$$

et avec un peu d'attention on voit que le développement réduit de la série précédente, écrite à rebours, sera

$$A_{m,n,r} =$$

$$s^r \left\{ \begin{aligned}
& \{1-(p+q)\} \left\{ \begin{aligned} & 1 + (r+1)(p+q) + \frac{r+1.\ r+2}{1.\ \ 2} (p^2 + 2pq + q^2) \\ & \qquad + \frac{r+1.\ r+2.\ r+3}{1.\ \ 2.\ \ 3} (p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3) + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \\
& + (1-p) \frac{r+1\ldots(r+m+n-4)}{1.2..(m-3).\ 1.2..(n-1)} p^{m-3} q^{n-1} \quad + (1-p) \frac{r+1\ldots(r+m+n-3)}{1.2..(m-2).\ 1.2..(n-1)} p^{m-2} q^{n-1} \\
& + \{1-(p+q)\} \frac{r+1\ldots(r+m+n-4)}{1.2..(m-2).\ 1.2\ldots(n-2)} p^{m-2} q^{n-2} \\
& + (1-q) \frac{r+1\ldots(r+m+n-4)}{1.2..(m-1).\ 1.2..(n-3)} p^{m-1} q^{n-3} \quad + (1-q) \frac{r+1\ldots(r+m+n-3)}{1.2..(m-1).\ 1.2..(n-2)} p^{m-1} q^{n-2} \\
& \qquad + \frac{r+1\ldots\ldots(n+m+n-2)}{1.\ 2\ldots(m-1).\ 1.\ 2,\ldots(n-1)} p^{m-1} q^{n-1}
\end{aligned} \right\}$$

On voit dans cette expression qu'aucune puissance de p ne surpasse $m-1$ et qu'aucune puissance de q ne surpasse $n-1$; de sorte qu'il est aisé de conclure que l'on peut se contenter de dire que le terme général est

$A_{m,n,r}$

$$A_{m,n,r} =$$

$$s^r\{1-(p+q)\}.\left\{\begin{array}{l} 1+(r+1)(p+q)+\frac{r+1.\,r+2}{1.\quad 2}(p^2+2pq+q^2) \\ \frac{r+1.\,r+2.\,r+3}{1.\quad 2.\quad 3}(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

pourvu qu'on ait soin de rejeter du développement toutes les puissances de p plus hautes que $m - 1$ et toutes celles de q plus hautes que $n - 1$.

Si l'on effectue la multiplication par $1 - (p + q)$, on transformera facilement cette dernière expression en celle-ci, qui est un peu plus simple,

$$A_{m,n,r} =$$

$$s^r\{1+r(p+q)+\frac{r.\,r+1}{1.\quad 2}(p^2+2pq+q^2)+\frac{r.\,r+1.\,r+2}{1.\quad 2.\quad 3}(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+\text{etc.}\},$$

série qu'on continuera tant que les puissances de p seront moindres que m, et celles de q moindres que n. C'est cette expression que Lagrange trouve au n.° 54 du mémoire cité.

253. On peut appliquer nos principes au cas que traite Lagrange au n.° 51 du même mémoire, et l'on parviendra à des expressions conformes à celles qu'il trouve : il suffit d'indiquer cette question ; car en voilà assez pour l'intelligence de notre méthode et pour mettre sur la voie ceux qui voudront l'appliquer à un plus grand nombre d'exemples.

ARTICLE CINQUIÈME.

Applications du calcul des dérivations au retour général des séries.

254. Nous ferons dépendre dans cet article le retour des séries de leur transformation, en présentant les propositions les plus étendues sur le retour des séries et des fonctions, comme une suite naturelle d'un théorème fort général sur la transformation des séries : il suffira ensuite d'étendre ce théorème, pour en voir découler plusieurs propositions sur le retour des séries doubles. Les dérivations offrent de grands avantages dans ces recherches, en y apportant la simplicité et la facilité ; et les formules auxquelles elles nous conduiront peuvent encore servir à d'autres usages, comme à trouver la somme de beaucoup de séries, à rendre les séries plus convergentes, etc. : mais nous n'avons pu entrer dans aucun détail sur ces objets ; nous avons cru devoir seulement nous arrêter à quelques conséquences relatives aux dérivations.

(I.)

PROBLÈME.

255. Étant donnée la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Bx^4 + Fx^5 + \text{etc.}, \quad \ldots\ldots(1)$$

on propose de la transformer en une autre de cette forme

$$a + bx(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m + cx^2(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{2m} + dx^3(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{3m} + \text{etc.}, \quad \ldots\ldots(2)$$

A, B, C, etc., et β, γ, δ, etc. étant des quantités quelconques indépendantes les unes des autres et même arbitraires, et m étant aussi quelconque.

Ce problème est l'inverse de l'exemple du numéro 62 ; et c'est de la solution de cet exemple que nous allons déduire celle du présent problème. On voit que la question se réduit à trouver les valeurs de a, b, c, d, etc. en A, B, C, D, etc. et en β, γ, δ, etc.

Prenons donc les coëfficiens de x, x^2, x^3, etc. de la série du numéro 62 sans les développer autrement qu'en β, afin d'en mieux voir la loi ; savoir :

$$A = a\,,$$
$$B = b\beta^{m},$$
$$C = b\,\mathrm{D}.\beta^{m} + c\beta^{2m},$$
$$D = b\,\mathrm{D}^{2}.\beta^{m} + c\,\mathrm{D}.\beta^{2m} + d\beta^{3m}, \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$E = b\,\mathrm{D}^{3}.\beta^{m} + c\,\mathrm{D}^{2}.\beta^{2m} + d\,\mathrm{D}.\beta^{3m} + e\beta^{4m},$$
$$F = b\,\mathrm{D}^{4}.\beta^{m} + c\,\mathrm{D}^{3}.\beta^{2m} + d\,\mathrm{D}^{2}.\beta^{3m} + e\,\mathrm{D}.\beta^{4m} + f\beta^{5m},$$
etc.,

où la loi est facile à saisir, sur tout si l'on fait attention à la remarque du numéro 63.

Tirons à présent de ces formules les valeurs de a, b, c, d, e, etc., en substituant successivement dans chaque équation les valeurs de a, b, c, etc. tirées des équations précédentes et développées en γ. Nous aurons de cette manière :

$$a = A\,,$$
$$b = B\beta^{-m},$$

je substitue cette valeur de b dans la 3.e des équations précédentes, et j'ai

$$c = C\beta^{-2m} - B\beta^{-3m}\,\mathrm{D}.\beta^{m},$$

développant en γ et réduisant, je trouve

$$c = C\beta^{-2m} - B.m\beta^{-2m-1}\gamma\,;$$

mettant les valeurs réduites de b et c dans la 4.e des équations précédentes, j'ai

$$d = D\beta^{-3m} - (C\beta^{-2m} - Bm\beta^{-2m-1}\gamma)\beta^{-3m}\,\mathrm{D}.\beta^{2m} - B\beta^{-4m}\,\mathrm{D}^{2}.\beta^{m},$$

développant en γ et réduisant,

$$d = D\beta^{-3m} - C2m\beta^{-3m-1}\gamma + B\left(-m\beta^{-3m-1}\,\mathrm{D}.\gamma + \frac{m(3m+1)}{1.\ 2}\beta^{-3m-2}\gamma^{2}\right);$$

substituant les valeurs réduites de b, c, d dans la 5.e équation, je trouve

$$e = E\beta^{-4m} - \left\{D\beta^{-3m} - C2m\beta^{-3m-1}\gamma + B\left(-m\beta^{-3m-1}\,\mathrm{D}.\gamma + \frac{m(3m+1)}{1.\ 2}\beta^{-3m-2}\gamma^{2}\right)\right\} \times$$
$$\beta^{-4m}\,\mathrm{D}.\beta^{3m} - (C\beta^{-2m} - Bm\beta^{-2m-1}\gamma)\beta^{-4m}\,\mathrm{D}^{2}.\beta^{2m} - B\beta^{-5m}\,\mathrm{D}^{3}.\beta^{m},$$

développant en γ et réduisant,

$$e = E\beta^{-4m} - D3m\beta^{-4m-1}\gamma + C\left(-2m\beta^{-4m-1}\,\mathrm{D}.\gamma + \frac{2m(4m+1)}{1.\ 2}\beta^{-4m-2}\gamma^{2}\right)$$
$$+ B\left(-m\beta^{-4m-1}\,\mathrm{D}^{2}.\gamma + \frac{m(4m+1)}{1.\ 2}\beta^{-4m-2}\,\mathrm{D}.\gamma^{2} - \frac{m(4m+1)(4m+2)}{1.\ 2.\ 3}\beta^{-4m-3}\gamma^{3}\right);$$

et ainsi de suite.

En examinant dans les valeurs réduites de c, d, e, etc. les quantités en ζ et γ, il est visible que ces valeurs peuvent se mettre sous cette forme

$$
\begin{aligned}
a &= A, \\
b &= B\zeta^{-m}, \\
c &= \tfrac{1}{2}(2C\zeta^{-2m} + B\,\mathrm{D}.\zeta^{-2m}), \\
d &= \tfrac{1}{3}(3D\zeta^{-3m} + 2C\,\mathrm{D}.\zeta^{-3m} + B\mathfrak{D}^2.\zeta^{-3m}), \\
e &= \tfrac{1}{4}(4E\zeta^{-4m} + 3D\,\mathrm{D}.\zeta^{-4m} + 2C\mathfrak{D}^2.\zeta^{-4m} + B\mathfrak{D}^3.\zeta^{-4m}),
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots(4)
$$

etc., où la loi est manifeste et très-simple; de sorte qu'on peut continuer facilement ces formules aussi loin qu'on voudra; et l'on en conclud sur-le-champ que, a_n désignant à l'ordinaire la $n^{\text{ième}}$ lettre après a, on a, pour le terme général,

$$
a_n = \frac{1}{n}\left\{
\begin{array}{l}
nA_n\zeta^{-nm} + (n-1)A_{n-1}\mathrm{D}.\zeta^{-nm} + (n-2)A_{n-2}\mathfrak{D}^2.\zeta^{-nm} \\
\quad + \text{etc.} + 3D\mathfrak{D}^{n-3}.\zeta^{-nm} + 2C\mathfrak{D}^{n-2}.\zeta^{-nm} + B\mathfrak{D}^{n-1}.\zeta^{-nm}
\end{array}
\right\}, \quad \ldots\ldots(5)
$$

ζ devant être regardé comme un premier terme dans les dérivations. Ainsi le problème est résolu.

256. On peut mettre les formules (4) et (5), que nous venons d'obtenir, sous une forme encore plus simple. En effet, si on rapporte B, C, D, etc. à A considéré comme premier terme (n.° 121), on a

$$
B = \mathrm{D}.A,\quad 2C = \mathrm{D}.\mathrm{D}.A,\quad 3D = \mathfrak{D}^2.\mathrm{D}.A,\quad 4E = \mathfrak{D}^3.\mathrm{D}.A, \text{ etc.}
$$

$$
(n-2)A_{n-2} = \mathfrak{D}^{n-3}.\mathrm{D}.A,\quad (n-1)A_{n-1} = \mathfrak{D}^{n-2}.\mathrm{D}.A,\quad nA_n = \mathfrak{D}^{n-1}.\mathrm{D}.A;
$$

ainsi la formule (5), pour le terme général, peut se mettre sous cette forme

$$
a_n = \frac{1}{n}\left\{
\begin{array}{l}
\zeta^{-nm}.\mathfrak{D}^{n-1}.\mathrm{D}.A + \mathrm{D}.\zeta^{-nm}.\mathfrak{D}^{n-2}.\mathrm{D}.A. + \mathfrak{D}^2.\zeta^{-nm}\mathfrak{D}^{n-3}.\mathrm{D}.A + \text{etc.} \\
\quad + \mathfrak{D}^{n-3}.\zeta^{-nm}.\mathfrak{D}^2.\mathrm{D}.A + \mathfrak{D}^{n-2}.\zeta^{-nm}.\mathrm{D}.\mathrm{D}.A + \mathfrak{D}^{n-1}.\zeta^{-nm}.\mathrm{D}.A
\end{array}
\right\}.
$$

Or la quantité A étant indépendante de ζ, cette série se réduit, par le n.° 97, à cette expression très-abrégée

$$
a_n = \frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\zeta^{-nm}.\mathrm{D}.A), \qquad \ldots\ldots(6)
$$

A et ζ étant des premiers termes dans les dérivations. Les formules (4) deviennent ainsi :

$$
\begin{aligned}
a &= A, \\
b &= \zeta^{-m}.\mathrm{D}.A, \\
c &= \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\zeta^{-2m}.\mathrm{D}.A), \\
d &= \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\zeta^{-3m}.\mathrm{D}.A), \\
e &= \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^3.(\zeta^{-4m}.\mathrm{D}.A),
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots(6)
$$

etc.

257.

257. En résumant ce qui précède, on a ce théorème, remarquable par sa généralité, sa simplicité et sa fécondité.

THÉORÈME.

Pour transformer la série quelconque

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(\text{I})$$

en une série de la forme

$$a + bx(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m + cx^2(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{2m} + dx^3(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{3m} + \text{etc.} + a_n x^n(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{nm} + \text{etc.}; \qquad \ldots(\text{II})$$

on fera, pour abréger,

$$\varsigma = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}, \qquad \ldots(\text{III})$$

et l'on aura cette formule

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} =$$
$$A + \beta^{-m}.\mathrm{D}.A.x\varsigma^m + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2m}.\mathrm{D}.A).x^2\varsigma^{2m} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\beta^{-3m}.\mathrm{D}.A).x^3\varsigma^{3m}$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}.\mathrm{D}.A).x^n\varsigma^{nm} + \text{etc.}, \qquad \ldots(\text{IV})$$

A et β étant considérés dans les dérivations comme des premiers termes et comme des quantités indépendantes l'une de l'autre ; de sorte, qu'en faisant $y = x\varsigma^m$, le terme général de la transformée sera

$$a_n.y^n = \frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}.\mathrm{D}.A).y^n = \qquad \ldots\ldots(\text{V})$$

$$\frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l} nA_n.\beta^{-nm} + (n-1)A_{n-1}.\mathrm{D}.\beta^{-nm} + (n-2)A_{n-2}.\mathfrak{D}^2.\beta^{-nm} \\ \qquad + \text{etc.} + 3D.\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^{-nm} + 2C.\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^{-nm} + B.\mathfrak{D}^{n-1}.\beta^{-nm} \end{array}\right\} y^n \ldots(\text{VI})$$

L'exposant m est quelconque, entier, fractionnaire, irrationnel, etc.

258. *Démonstration.* Nous n'avons trouvé d'une manière rigoureuse, à la fin du n.° 255, que les valeurs de a, b, c, d, e ; et nous en avons conclu en général celle de a_n : cette conclusion n'est qu'une induction, fondée à la vérité sur une loi que tout annonce être générale ; et l'on se contente souvent de pareilles inductions. Mais voici une démonstration de notre théorème, qui paroît ne rien laisser à désirer.

Les formules (3) du n.° 255, dont on sait que la loi se conserve toujours, sont toutes des équations du premier degré en b, c, d, e, etc., ainsi qu'en B, C, D, E, etc. : si donc on élimine les quantités b, c, d, e, etc., afin d'avoir successivement leurs valeurs en B, C, D, E, etc., on sait, par l'élimination des inconnues des équations du premier degré, que dans ces valeurs

de b, c, d, e, etc. les quantités B, C, D, E, etc. ne seront que du premier degré, et qu'aucun terme ne contiendra le produit de deux ou de plusieurs de ces quantités; de sorte que ces valeurs seront de la forme suivante

$$\begin{aligned} a &= A, \\ b &= \mathfrak{b}.B, \\ c &= \mathfrak{b}'.C + \mathfrak{c}'.B, \\ d &= \mathfrak{b}''.D + \mathfrak{c}''.C + \mathfrak{d}''.B, \\ e &= \mathfrak{b}'''.E + \mathfrak{c}'''.D + \mathfrak{d}'''.C + \mathfrak{e}'''.B, \\ &\text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \mathfrak{b}^{(n-1)}.A_n + \mathfrak{c}^{(n-1)}.A^{n-1} + \mathfrak{d}^{(n-1)}.A_{n-2} + \text{etc.} + \mathfrak{b}_n^{(n-1)}.B, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Avec un peu d'attention on voit que ces mêmes valeurs peuvent aussi se mettre sous cette forme :

$$a = A, \quad b = p.\text{D}.A, \quad c = \text{D}.(p'.\text{D}.A), \quad d = \text{D}^2.(p''.\text{D}.A),$$
$$e = \text{D}^3.(p'''.\text{D}.A), \text{ et en général } a_n = \text{D}^{n-1}.(p^{(n-1)}.\text{D}.A);$$

p, p', p'', p''', etc. $p^{(n-1)}$, $p^{(n)}$, etc. étant des indéterminées, indépendantes de A, mais fonctions de $\mathfrak{C}$ et de m. Cela posé, soit

$$y = x(\mathfrak{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m, \qquad \ldots.(1)$$

on aura généralement

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} =$$
$$A + p.\text{D}.A.y + \text{D}.(p'.\text{D}.A).y^2 + \text{D}^2.(p''.\text{D}.A).y^3 + \text{D}^3.(p'''.\text{D}.A).y^4 + \text{etc.} + \text{D}^{n-1}.(p^{(n-1)}.\text{D}.A).y^n + \text{etc.}, \qquad \ldots.(2)$$

où il s'agit de déterminer p, p', p'', etc. $p^{(n-1)}$, $p^{(n)}$, etc. en $\mathfrak{C}$ et m.

A cet effet, de l'équation (1) je tire celle-ci

$$x = y(\mathfrak{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^{-m}, \text{ ou bien}$$
$$x = y(\mathfrak{C}^{-m} + \text{D}.\mathfrak{C}^{-m}.x + \text{D}^2.\mathfrak{C}^{-m}.x^2 + \text{D}^3.\mathfrak{C}^{-m}.x^3 + \text{etc.}) \qquad \ldots.(3)$$

Afin d'éliminer x de cette équation, je transforme les deux fonctions de x qui y entrent, savoir x et $\mathfrak{C}^{-m} + \text{D}.\mathfrak{C}^{-m}.x + \text{D}^2.\mathfrak{C}^{-m}x^2 + \text{D}^3.\mathfrak{C}^{-m}.x^3 + \text{etc.}$, en séries ordonnées suivant les puissances de y, et cela au moyen de la formule générale (2). Pour transformer la première, savoir x, il suffira de faire, dans la formule (2), $A = 0$, $B = \text{D}.A = 1$, C, D, etc. $= 0$; et pour transformer la seconde, il suffira de faire, dans la même formule (2), $A = \mathfrak{C}^{-m}$, $B = \text{D}.A = \text{D}.\mathfrak{C}^{-m}$, $C = \text{D}^2.\mathfrak{C}^{-m}$, $D = \text{D}^3.\mathfrak{C}^{-m}$, etc.; et l'on aura les deux transformées suivantes,

$$x = p.y + \text{D}.p'.y^2 + \text{D}^2.p''.y^3 + \text{D}^3.p'''.y^4 + \text{etc.} + \text{D}^{n-1}.p^{(n-1)}.y^n + \text{etc.},$$

et $\quad \varsigma^{-m} + \mathrm{D}.\varsigma^{-m}.x + \mathrm{D}^2.\varsigma^{-m}.x^2 + \mathrm{D}^3.\varsigma^{-m}.x^3 + \text{etc.} =$

$$\varsigma^{-m} + p\mathrm{D}.\varsigma^{-m}.y + \mathrm{D}.(p^{\prime}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^2 + \mathrm{D}^2.(p^{\prime\prime}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^3 + \text{etc.} + \mathrm{D}^{n-1}.(p^{(n-\mathrm{I})}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^n + \text{etc.}$$

Substituant à présent ces deux séries en y dans l'équation (3), elle devient

$$py + \mathrm{D}.p^{\prime}.y^2 + \mathrm{D}^2.p^{\prime\prime}.y^3 + \mathrm{D}^3.p^{\prime\prime\prime}.y^4 + \mathrm{D}^4.p^{\mathrm{IV}}.y^5 + \text{etc.} + \mathrm{D}^{n-1}.p^{(n-\mathrm{I})}.y^n + \text{etc.} =$$
$$\varsigma^{-m}y + p\mathrm{D}.\varsigma^{-m}.y^2 + \mathrm{D}.(p^{\prime}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^3 + \mathrm{D}^2.(p^{\prime\prime}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^4 + \text{etc.} + \mathrm{D}^{n-2}.(p^{(n-\mathrm{II})}.\mathrm{D}.\varsigma^{-m}).y^n + \text{etc.},$$

équation, toute en y, qui sert à déterminer les valeurs de p, $p^{\prime}$, $p^{\prime\prime}$, etc., $p^{(n)}$, etc.

En effet, en égalant entre eux les coëfficiens des mêmes puissances de y, on a

1.° $p = \varsigma^{-m}$,

2.° $\mathrm{D}.p^{\prime} = p\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \varsigma^{-m}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{2}\mathrm{D}.\varsigma^{-2m}$, ς^{-m} étant regardée pour le moment comme la variable. Donc $p^{\prime} = \frac{1}{2}\varsigma^{-2m}$.

3.° $\mathrm{D}.p^{\prime\prime} = p^{\prime}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{2}\varsigma^{-2m}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{2.\,3}\mathrm{D}.\varsigma^{-3m}$. Donc $p^{\prime\prime} = \frac{1}{2.\,3}\varsigma^{-3m}$.

4.° $\mathrm{D}.p^{\prime\prime\prime} = p^{\prime\prime}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{2.\,3}\varsigma^{-3m}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{2.\,3.\,4}\mathrm{D}.\varsigma^{-4m}$. Donc $p^{\prime\prime\prime} = \frac{1}{2.\,3.\,4}\varsigma^{-4m}$;

et ainsi de suite. Si, de cette manière on a trouvé $p^{(n-\mathrm{II})} = \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots(n-1)}\varsigma^{-(n-1)m}$, n étant 5 ou tout autre indice, on aura, pour le terme suivant,

$$\mathrm{D}.p^{(n-\mathrm{I})} = p^{(n-\mathrm{II})}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{1.\,2\ldots(n-1)}\varsigma^{-(n-1)m}\mathrm{D}.\varsigma^{-m} = \frac{1}{1.\,2\ldots n}\mathrm{D}.\varsigma^{-nm}.$$

Donc $p^{(n-\mathrm{I})} = \frac{1}{1.\,2\ldots n}\varsigma^{-nm}$; ce qui fait connoître la valeur d'un terme quelconque, et démontre que ces expressions suivent constamment la même loi.

En substituant dans la série (2) ces valeurs de p, $p^{\prime}$, $p^{\prime\prime}$, $p^{\prime\prime\prime}$, etc., $p^{(n-\mathrm{I})}$, etc., on a

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} =$$
$$A + \varsigma^{-m}.\mathrm{D}.A.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\varsigma^{-2m}.\mathrm{D}.A).y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\varsigma^{-3m}.\mathrm{D}.A).y^3 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(\varsigma^{-nm}.\mathrm{D}.A).y^n + \text{etc.}$$

COROLLAIRE.

259. Puisque, dans le théorème, m est quelconque; si l'on y change m en $-m$, on aura cet autre théorème :

Pour transformer la série quelconque

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \qquad \ldots.(1)$$

en une série de la forme

$$a + \frac{bx}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m} + \frac{cx^2}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{2m}}$$
$$+ \frac{dx^3}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{3m}} + \text{etc.} + \frac{a_n x^n}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^{nm}} + \text{etc.}; \quad \ldots \text{(II)}$$

en faisant pour abréger

$$\varsigma = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}, \quad \ldots \text{(III)}$$

on aura la formule suivante

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} =$$
$$A + \beta^m.\text{D}.A.x\varsigma^{-m} + \frac{1}{2}\text{D}.(\beta^{2m}.\text{D}.A).x^2\varsigma^{-2m} + \frac{1}{3}\text{D}^2.(\beta^{3m}.\text{D}.A).x^3\varsigma^{-3m}$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}.(\beta^{nm}.\text{D}.A).x^n\varsigma^{-nm} + \text{etc.} \quad \ldots \text{(IV)}$$

A et β étant des premiers termes indépendans l'un de l'autre, de sorte que le terme général sera, y étant supposé $= x\varsigma^{-m}$,

$$a_n.y^n = \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}.(\beta^{nm}.\text{D}.A).y^n = \quad \ldots \text{(V)}$$

$$\frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l} nA^{n-1}.\beta^{nm} + (n-1)A_{n-1}.\text{D}.\beta^{nm} + (n-2)A_{n-2}.\text{D}^2.\beta^{nm} \\ + \text{etc.} + 3D.\text{D}^{n-3}.\beta^{nm} + 2C.\text{D}^{n-2}.\beta^{nm} + B.\text{D}^{n-1}.\beta^{nm}\end{array}\right\}y^n \quad \ldots \text{(VI)}$$

---

260. Rien n'est si facile que de développer entièrement l'expression du terme général des numéros 257 et 259, et par conséquent de calculer un terme quelconque de la série transformée, indépendamment des autres. En effet, pour déduire par dérivation les uns des autres les développemens réduits de β^{-nm}, $\text{D}.\beta^{-nm}$, $\text{D}^2.\beta^{-nm}$, $\text{D}^3.\beta^{-nm}$, etc. ou ceux de β^{nm}, $\text{D}.\beta^{nm}$, $\text{D}^2.\beta^{nm}$, $\text{D}^3.\beta^{nm}$, etc., il suffit d'employer la règle du n.° 30, et l'on écrira sur-le-champ ces développemens tout réduits à la suite les uns des autres. Si l'on en veut calculer un séparément, on le trouvera par la règle du n.° 43 ou par celle du n.° 47, en faisant d'abord un premier développement en γ.

Si on vouloit ordonner le développement du terme général du théorème par rapport aux puissances négatives de β, on auroit par le n.° 100, en développant simplement en γ,

$$\tfrac{1}{n}\text{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}.\text{D}.A) = \beta^{-nm}.\text{D}^n.A - m\beta^{-nm-1}.\text{D}^{n-2}.(\gamma\text{D}.A)$$
$$+ \frac{m(nm+1)}{1.\ \ 2}\beta^{-nm-2}.\text{D}^{n-3}.(\gamma^2\text{D}.A) - \frac{m(nm+1)(nm+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}\beta^{-nm-3}.\text{D}^{n-4}.(\gamma^3\text{D}.A)$$
$$+ \text{etc.} \pm \frac{m(nm+1)\ldots\ldots(nm+n-2)}{1.\ \ 2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)}\beta^{-nm-n+1}.\gamma^{n-1}\text{D}.A.$$

261.

261. On peut même, d'après nos principes, trouver des règles pour déduire les uns des autres les développemens réduits des coëfficiens successifs de la série du théorème ou de celle du corollaire : pour y parvenir il suffira de developper, en γ, $\frac{1}{n}\mathfrak{p}^{n-1}.(\zeta^{-nm}.\text{D}.A)$ et $\frac{1}{n+1}\mathfrak{p}^{n}.(\zeta^{-nm-1}.\text{D}.A)$, et de comparer entre eux ces développemens; on en conclura ensuite la règle.

Dans le cas où l'on auroit à déduire du développement réduit de $\frac{1}{s}\mathfrak{p}^{n}.\zeta^{-s}$ celui de $\frac{1}{s+1}\mathfrak{p}^{n+1}.\zeta^{-s-1}$, la règle devient si simple, que nous allons la mettre ici; nous aurons occasion d'en faire usage dans ce qui suit.

Je développe en γ les deux expressions proposées; elles deviennent, savoir :

$$\frac{1}{s}\mathfrak{p}^{n}.\zeta^{-s} =$$

$$\left.\begin{aligned} &-\zeta^{-s-1}\mathfrak{p}^{n-1}.\gamma + \frac{s+1}{2}\zeta^{-s-2}\mathfrak{p}^{n-2}.\gamma^{2} - \frac{s+1.\,s+2}{2.\quad 3}\zeta^{-s-3}\mathfrak{p}^{n-3}.\gamma^{3} \\ &+ \text{etc.} \mp \frac{s+1.\,s+2\ldots\ldots(s+n-1)}{2.\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots n}\zeta^{-s-n}.\gamma^{n}, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(a)$$

$$\frac{1}{s+1}\mathfrak{p}^{n+1}.\zeta^{-s-1} =$$

$$\left.\begin{aligned} &-\zeta^{-s-2}\mathfrak{p}^{n}.\gamma + \frac{s+2}{2}\zeta^{-s-3}\mathfrak{p}^{n-1}.\gamma^{2} - \frac{s+2.\,s+3}{2.\quad 3}\zeta^{-s-4}\mathfrak{p}_{n-2}.\gamma^{3} \\ &+ \text{etc.} \mp \frac{s+2.\,s+3\ldots(s+n)}{2.\quad 3\ldots\ldots n}\zeta^{-s-n-1}\text{D}.\gamma^{n} \pm \frac{s+2.\,s+3\ldots(s+n+1)}{2.\quad 3\ldots\ldots(n+1)}\zeta^{-s-n-2}.\gamma^{n+1} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(b)$$

De la comparaison de la série (b) avec la série (a) découle la règle suivante.

Le développement réduit de $\frac{1}{s}\mathfrak{p}^{n}.\zeta^{-s}$ *étant donné, pour en déduire celui de* $\frac{1}{s+1}\mathfrak{p}^{n+1}.\zeta^{-s-1}$; *dans le premier développement multipliez chaque puissance de* ζ *par son exposant pris positivement, diminuez ensuite cet exposant de l'unité et divisez toute l'expression par* $s+1$; *après cette préparation, prenez la dérivée divisée suivante par la règle du n.° 30.*

262. Pour que le lecteur voie mieux la facilité avec laquelle nos méthodes donnent les développemens réduits des formules précédentes, nous l'engageons à calculer le développement de l'exemple suivant, exemple bien étendu en lui-même, quoiqu'il ne soit qu'un cas particulier du corollaire du n.° 259.

O o o

Exemple.

Transformer la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

en une autre de cette forme,

$$a + \frac{bx}{\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}} + \frac{cx^2}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^2} + \frac{dx^3}{(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^3} + \text{etc.}$$

On fera $m = 1$ dans le corollaire n.° 259, et, en développant la formule comme nous l'avons indiqué au n.° 260, on aura sur-le-champ

$$a = A,$$

$$b = B\beta,$$

$$c = \tfrac{1}{2}\{2C\beta^2 + B2\beta\gamma\},$$

$$d = \tfrac{1}{3}\{3D\beta^3 + 2C3\beta^2\gamma + B(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2)\},$$

$$e = \tfrac{1}{4}\{4E\beta^4 + 3D4\beta^3\gamma + 2C(4\beta^3\delta + 6\beta^2\gamma^2) + B(4\beta^3\varepsilon + 6\beta^2 2\gamma\delta + 4\beta\gamma^3)\},$$

$$f = \tfrac{1}{5}\left\{\begin{array}{r} 5F\beta^5 + 4E5\beta^4\gamma + 3D(5\beta^4\delta + 10\beta^3\gamma^2) + 2C(5\beta^4\varepsilon + 10\beta^3 2\gamma\delta + 10\beta^2\gamma^3) \\ + B(5\beta^4\zeta + 10\beta^3[2\gamma\varepsilon + \delta^2] + 10\beta^2 3\gamma^2\delta + 5\beta\gamma^4) \end{array}\right\},$$

et ainsi de suite. Ici les dérivations se font, non en passant d'un des termes b, c, d, e, etc. à l'autre, mais sur les quantités qui composent chaque terme en particulier, de sorte qu'on peut ainsi calculer le développement réduit d'un terme quelconque a_n sans connoître les autres termes.

Si l'on veut ordonner suivant les puissances de β le développement réduit d'un terme quelconque, du septième par exemple, on prendra pour guide la formule du n.° 100, et l'on aura sur-le-champ

$$g = \tfrac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} \quad \beta^6.6G + 6\beta^5\{\gamma 5F + \delta 4E + \varepsilon 3D + \zeta 2C + \eta B\} \\ + 15\beta^4\{\gamma^2 4E + 2\gamma\delta 3D + (2\gamma\varepsilon + \delta^2)2C + (2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon)B\} \\ + 20\beta^3\{\gamma^3 3D + 3\gamma^2\delta 2C + (3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2)B\} \\ + 15\beta^2\{\gamma^4 2C + 4\gamma^3\delta B\} \quad + 6\beta.\gamma^5 B \end{array}\right\}.$$

263. Parmi les usages qu'on peut faire du théorème précédent, se présentent d'abord les deux suivans:

1.° Introduire dans une série proposée quelconque une autre série arbitraire, en ordonnant la première suivant les puissances de la seconde, et cela sans que

la série proposée change de valeur ; ce qui donne le moyen de connoître les sommes d'un grand nombre de séries.

2.° Rendre une série proposée convergente à volonté, en la transformant en une autre dont les dénominateurs soient les puissances successives d'une série quelconque, à laquelle on peut donner des termes tels et en tel nombre qu'on voudra.

On peut se faire une idée de ces usages en lisant le chapitre 1.er de la 2.e partie du calcul différentiel d'Euler, où, après avoir transformé la série $A + Bx + Cx^2 +$ etc. en $a + by + cy^2 +$ etc., y étant successivement égal à $\frac{x}{1-x}$ et à $\frac{x}{1+x}$, ce qui forme les deux cas les plus simples de l'exemple du numéro précédent, l'auteur se sert de ces transformations pour sommer différentes séries ou pour les rendre plus convergentes. Les autres transformations qui se trouvent ensuite dans le même chapitre, sont des cas particuliers de notre exemple du n.° 62. On voit donc que cet exemple et le théorème du n.° 257 peuvent servir à des applications pareilles, plus nombreuses et plus étendues.

264. On aperçoit facilement combien le théorème du numéro 257 est étendu, en considérant que, x y ayant une valeur quelconque, on peut faire $x = 1$, et alors, comme A, B, C, D, etc., $\mathfrak{C}$, γ, δ, ε, etc. sont quelconques, ces quantités peuvent être ou entièrement indépendantes et arbitraires, ou des fonctions arbitraires, ou des fonctions régulières et continues de x, de x et de y, ou d'autres variables; le théorème subsistera toujours.

On peut, par exemple, regarder la série

$$A + B + C + D + E + \text{etc.}$$

comme le développement de cette fonction de polynome

$$\Psi(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \text{etc.}),$$

et la série $\mathfrak{C} + \gamma + \delta + \varepsilon +$ etc. comme le développement de

$$\Phi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e} + \text{etc.}).$$

(II.)

265. Passant à présent au retour des séries, on verra découler du théorème et du corollaire précédens les propositions les plus belles et les plus générales qu'offre cette matière, et nos méthodes de dérivation donneront les moyens de développer, toujours avec facilité, les formules que l'on obtiendra.

Soit proposée la série

$$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.};$$

on demande à exprimer x en y, c'est-à-dire à déterminer les coëfficiens de la série $x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \text{etc.} + a_n y^n + \text{etc.}$

C'est le cas de NEWTON, dans sa lettre à OLDENBURG, du 24 octobre 1676.

On voit que cette question se ramène à celle-ci : Transformer x en une série de cette forme :

$$bx(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}) + cx^2(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^2 + dx^3(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^3 + \text{etc.}$$

Comparant avec le théorème du n.° 257, on a $m = 1$, $x_\zeta = y$, et la série $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ se réduit ici au seul terme x; on fera donc dans la formule (VI), $B = 1$, et tous les termes A, C, D, etc., A_{n-1}, A_n, etc. $= 0$, ce qui réduit le terme général à

$$a_n . y^n = \frac{1}{n} \mathrm{D}^{n-1} . \beta^{-n} . y^n.$$

Ainsi la série demandée sera

$$x = \qquad \ldots . (a)$$

$$\beta^{-1} . y + \tfrac{1}{2} \mathrm{D} . \beta^{-2} . y^2 + \tfrac{1}{3} \mathrm{D}^2 . \beta^{-3} . y^3 + \tfrac{1}{4} \mathrm{D}^3 . \beta^{-4} . y^4 + \text{etc.} + \frac{1}{n} \mathrm{D}^{n-1} . \beta^{-n} . y^n + \text{etc.},$$

série dont la loi est très-simple. Il est aisé d'en développer séparément un terme quelconque par les règles indiquées au n.° 260; et par la règle du n.° 261, on peut écrire, sans s'arrêter, le développement de la série même, continuée autant qu'on voudra. En voici le commencement :

$$\begin{aligned} x = {} & \beta^{-1} . y - \beta^{-3} \gamma . y^2 + \left\{ - \beta^{-4} \delta + \frac{4}{2} \beta^{-5} \gamma^2 \right\} y^3 \\ & + \left\{ - \beta^{-5} \varepsilon + \frac{5}{2} \beta^{-6} 2\gamma\delta - \frac{5.6}{2.3} \beta^{-7} \gamma^3 \right\} y^4 \\ & + \left\{ - \beta^{-6} \zeta + \frac{6}{2} \beta^{-7} (2\gamma\varepsilon + \delta^2) - \frac{6.7}{2.3} \beta^{-8} 3\gamma^2\delta + \frac{6.7.8}{2.3.4} \beta^{-9} \gamma^4 \right\} y^5 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & - \beta^{-7} \eta + \frac{7}{2} \beta^{-8} (2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon) - \frac{7.8}{2.3} \beta^{-9} (3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2) \\ & \qquad + \frac{7.8.9}{2.3.4} \beta^{-10} 4\gamma^3\delta - \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5} \beta^{-11} \gamma^5 \end{aligned} \right\} y^6 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

266.

266. Soit proposée l'équation

$$x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.};$$

on demande x exprimé par α, β, γ, etc.

Je mets l'équation proposée sous cette forme

$$1 = \frac{x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}};$$

comparant avec le corollaire du n.° 259, j'ai $\varsigma = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$, α, β, γ, etc. remplaçant ici β, γ, δ, etc. du corollaire, de plus $m = 1$, $x\varsigma^{-1} = 1$. Donc, faisant la série $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} = x$, ce qui donne $A = 0$, $B = \mathrm{D}.A = 1$, et toutes les autres dérivées de A égales à zéro, la formule (IV) donnera sur-le-champ

$$x = \alpha + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\alpha^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.\alpha^3 + \frac{1}{4}\mathrm{D}^3.\alpha^4 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\alpha^n + \text{etc.};$$

où l'on fera à l'ordinaire $\mathrm{D}.\alpha = \beta$, $\mathrm{D}.\beta = \gamma$, etc.

Si l'on avoit $x = y(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})$, on trouveroit de la même manière

$$x = \beta.y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\beta^2.y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.\beta^3.y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\beta^n.y^n + \text{etc.}, \quad \ldots(b)$$

et en faisant le développement réduit,

$$x = \beta.y + \beta\gamma.y^2 + \{\beta^2\delta + \frac{2}{2}\beta\gamma^2\}y^3 + \{\beta^3\varepsilon + \frac{3}{2}\beta^2 2\gamma\delta + \frac{3.2}{2.3}\beta\gamma^3\}y^4$$
$$+ \{\beta^4\zeta + \frac{4}{2}\beta^3(2\gamma\varepsilon + \delta^2) + \frac{4.3}{2.3}\beta^2 3\gamma^2\delta + \frac{4.3.2}{2.3.4}\beta\gamma^4\}y^5 + \text{etc.}$$

---

267. Soit proposée l'équation

$$y = x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m; \quad \ldots\ldots(1)$$

on demande à exprimer une puissance quelconque x^r de x par une série en y.

La solution de ce cas se tire du théorème de deux manières différentes : dans la première on supposera l'exposant r un nombre entier positif ; la seconde fera voir que l'on obtient la même formule, r étant quelconque.

Première manière. On a ici $y = x\varsigma^m$, comme dans le n.° 257 ; il suffit donc de comparer x^r avec la série $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} + A_r x^r + \text{etc.}$: cette comparaison donne zéro pour tous les coëfficiens A, B, C, etc. à l'exception de A_r qui est $= 1$; de cette manière l'expression (VI) du terme général se

réduit au terme unique

$$a_n y^n = \frac{r}{n}\mathfrak{D}^{n-r}.\beta^{-rm}.y^n. \qquad \ldots\ldots(2)$$

Ainsi, puisque l'indice de D ne sauroit être négatif, ce qui exige que n ne soit pas $< r$, on voit que le premier terme de la série demandée est $\frac{r}{r}\mathfrak{D}^0.\beta^{-rm}.y^r$; et la série elle-même sera

$$x^r = \qquad \ldots\ldots(c)$$

$$\frac{r}{r}\beta^{-rm}.y^r + \frac{r}{r+1}\text{D}.\beta^{-(r+1)m}.y^{r+1} + \frac{r}{r+2}\mathfrak{D}^2.\beta^{-(r+2)m}.y^{r+2}$$

$$+ \frac{r}{r+3}\mathfrak{D}^3.\beta^{-(r+3)m}.y^{r+3} + \text{etc.} + \frac{r}{r+n}\mathfrak{D}^n.\beta^{-(r+n)m}.y^{r+n} + \text{etc.},$$

formule dont la loi est fort simple.

268. *Seconde manière.* L'exposant r étant quelconque, je mets l'équation proposée (1) sous cette forme $x = y(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^{-m}$; de là il vient, en prenant la puissance r,

$$x^r = y^r(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^{-rm}, \text{ et}$$

$$x^r y^{-r} = \beta^{-rm} + \text{D}.\beta^{-rm}.x + \mathfrak{D}^2.\beta^{-rm}.x^2 + \mathfrak{D}^3.\beta^{-rm}.x^3 + \text{etc.}; \qquad \ldots\ldots(3)$$

égalant le dernier membre de cette équation à la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. du théorème, on a $A = \beta^{-rm}$, $B = \text{D}.A = \text{D}.\beta^{-rm}$; donc $\beta^{-nm}\text{D}.A = \beta^{-nm}\text{D}.\beta^{-rm} = -rm\beta^{-(r+n)m-1}\gamma = \frac{rm}{(r+n)m}\text{D}.\beta^{-(r+n)m}$ $= \frac{r}{r+n}\text{D}.\beta^{-(r+n)m}$. Substituant cette valeur dans le terme général (v) du théorème, on trouve

$$\frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}.\text{D}.A).y^n = \frac{r}{r+n}\mathfrak{D}^n.\beta^{-(r+n)m}.y^n.$$

Multipliant par y^r l'équation (3), on a pour x^r la même série (c) que ci-dessus.

269. Exemple. Soit proposée l'équation

$$0 = -\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.} + a_\nu x^\nu; \qquad \ldots\ldots(4)$$

on demande la puissance quelconque x^r de la racine x.

On fera $m = 1$ et $y = \alpha$ dans la formule (c) ci-dessus, ce qui donne

$$x^r = \beta^{-r}.\alpha^r + \frac{r}{r+1}\text{D}.\beta^{-r-1}.\alpha^{r+1} + \frac{r}{r+2}\mathfrak{D}^2.\beta^{-r-2}.\alpha^{r+2}$$

$$+ \frac{r}{r+3}\mathfrak{D}^3.\beta^{-r-3}.\alpha^{r+3} + \text{etc.} + \frac{r}{r+n}\mathfrak{D}^n.\beta^{-r-n}.\alpha^{r+n} + \text{etc.}; \qquad \ldots\ldots(5)$$

et en développant par la règle du n.° 261, on a sur-le-champ,

$$x^r = \zeta^{-r}.\alpha^r \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$- r\zeta^{-r-2}.\gamma.\alpha^{r+1}$$

$$+ \left\{ - r\zeta^{-r-3}.\delta + \frac{r(r+3)}{1.\ 2}\zeta^{-r-4}.\gamma^2 \right\}.\alpha^{r+2}$$

$$+ \left\{ - r\zeta^{-r-4}.\varepsilon + \frac{r(r+4)}{1.\ 2}\zeta^{-r-5}.2\gamma\delta - \frac{r(r+4)(r+5)}{1.\ 2.\ 3}\zeta^{-r-6}.\gamma^3 \right\}.\alpha^{r+3}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} - r\zeta^{-r-5}.\zeta + \dfrac{r(r+5)}{1.\ 2}\zeta^{-r-6}(2\gamma\varepsilon + \delta^2) - \dfrac{r(r+5)(r+6)}{1.\ 2.\ 3}\zeta^{-r-7}.3\gamma^2\delta \\ \qquad\qquad + \dfrac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\zeta^{-r-8}.\gamma^4 \end{array} \right\}.\alpha^{r+4}$$

$$+ \text{ etc.}$$

Nous voilà parvenus sans aucun détour à la série que Lagrange donna le premier au n.° 19 de sa *nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, imprimée dans les mémoires de Berlin pour 1768; et nous avons de plus un moyen très-expéditif pour continuer cette série aussi loin qu'on voudra; il faudra observer seulement que α, est un dernier terme.

Si l'on donne à la formule (5) ci-dessus un premier développement en γ, et qu'on ordonne suivant les puissances négatives de ζ, on trouve

$$x^r = \zeta^{-r}.\alpha^r - r\zeta^{-r-2}.\gamma.\alpha^{r+1} \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$- r\zeta^{-r-3}.\text{D}.\gamma.\alpha^{r+2}$$

$$- r\zeta^{-r-4}\left(\text{D}^2.\gamma.\alpha^{r+3} - \frac{r+3}{2}\gamma^2.\alpha^{r+2}\right)$$

$$- r\zeta^{-r-5}\left(\text{D}^3.\gamma.\alpha^{r+4} - \frac{r+4}{2}\text{D}.\gamma^2.\alpha^{r+3}\right)$$

$$- r\zeta^{-r-6}\left(\text{D}^4.\gamma.\alpha^{r+5} - \frac{r+5}{2}\text{D}^2.\gamma^2.\alpha^{r+4} + \frac{r+4.\ r+5}{2.\ 3}\gamma^3.\alpha^{r+3}\right)$$

$$- r\zeta^{-r-7}\left(\text{D}^5.\gamma.\alpha^{r+6} - \frac{r+6}{2}\text{D}^3.\gamma^2.\alpha^{r+5} + \frac{r+5.\ r+6}{2.\ 3}\text{D}.\gamma^3.\alpha^{r+4}\right)$$

$$- \text{ etc.};$$

la loi se présente d'elle-même et les développemens ultérieurs n'ont aucune difficulté. Cette série s'accorde avec celle que Lagrange a trouvée au n.° 18 du mémoire dont nous venons de parler.

270. On a $y = x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m$,
et l'on demande l'expression sans x d'une fonction quelconque de x.

On peut tirer du théorème du n.° 257 deux manières de résoudre cette question, l'une lorsque la fonction ψx peut se développer en une série qui procède suivant les puissances de x, l'autre qui s'étend aux cas où ce développement n'a pas lieu.

Première manière. Les valeurs de ς, de y et de m étant ici les mêmes qu'au théorème, et ψx pouvant être convertie en une série ordonnée suivant les puissances de x, je fais $\psi x = \psi(a + x)$, et j'ai

$$\psi x = \psi a + \mathrm{D}\psi a.x + \mathrm{D}^2\psi a.x^2 + \mathrm{D}^3\psi a.x^3 + \text{etc.},$$

pourvu qu'après les dérivations je fasse $a = 0$. Comparant cette série avec la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$, le théorème donne sur-le-champ

$$\psi x =$$

$$\psi a + \beta^{-m}.\mathrm{D}\psi a.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2m}.\mathrm{D}\psi a)y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^{-3m}.\mathrm{D}\psi a).y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}.\mathrm{D}\psi a).y^n + \text{etc.}, \quad \ldots(d)$$

formule dans laquelle $\mathrm{D}a = 1$ et a doit être fait zéro après les dérivations.

Si l'on ne fait pas $a = 0$ après les dérivations, cette même formule donne la valeur de $\psi(a + x)$, a étant quelconque.

271. Exemples. Si $y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$, en faisant $m = 1$, on trouvera ainsi pour e^x, $\sin x$, $\log(1 + x)$, les séries suivantes, e étant la quantité dont le logarithme naturel est $= 1$, et *log* désignant le logarithme naturel.

$$e^x = 1 + \beta^{-1}.y + \frac{1}{2}(\mathrm{D}.\beta^{-2} + \frac{1}{1}\beta^{-2})y^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{D}^2.\beta^{-3} + \frac{1}{1}\mathrm{D}.\beta^{-3} + \frac{1}{1.2}\beta^{-3})y^3$$
$$+ \frac{1}{4}(\mathrm{D}^3.\beta^{-4} + \frac{1}{1}\mathrm{D}^2.\beta^{-4} + \frac{1}{1.2}\mathrm{D}.\beta^{-4} + \frac{1}{1.2.3}\beta^{-4})y^4 + \text{etc.},$$

où la loi est évidente; de sorte qu'on en conclud facilement le terme général.

$$\sin x = \beta^{-1}.y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\beta^{-2}.y^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{D}^2.\beta^{-3} - \frac{1}{1.2}\beta^{-3})y^3$$
$$+ \frac{1}{4}(\mathrm{D}^3.\beta^{-4} - \frac{1}{1.2}\mathrm{D}.\beta^{-4})y^4 + \frac{1}{5}(\mathrm{D}^4.\beta^{-5} - \frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2.\beta^{-5} + \frac{1}{1.2.3.4}\beta^{-5})y^5$$
$$+ \frac{1}{6}(\mathrm{D}^5.\beta^{-6} - \frac{1}{1.2}\mathrm{D}^3.\beta^{-6} + \frac{1}{1.2.3.4}\mathrm{D}.\beta^{-6})y^6 + \text{etc.},$$

où la loi est encore évidente.

Sans

Sans faire $a = 0$, on a $\log(a + x) =$

$$\log a + a^{-1}\mathrm{C}^{-1}.y + \tfrac{1}{2}(a^{-1}\mathrm{D}.\mathrm{C}^{-2} - a^{-2}\mathrm{C}^{-2})y^2 + \tfrac{1}{3}(a^{-1}\mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-3} - a^{-2}\mathrm{D}.\mathrm{C}^{-3} + a^{-3}\mathrm{C}^{-3})y^3$$
$$+ \tfrac{1}{4}(a^{-1}\mathcal{D}^3.\mathrm{C}^{-4} - a^{-2}\mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-4} + a^{-3}\mathrm{D}.\mathrm{C}^{-4} - a^{-4}\mathrm{C}^{-4})y^4 + \text{etc.}$$

Si $a = 1$, cette série devient

$$\log(1 + x) = \mathrm{C}^{-1}.y + \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}.\mathrm{C}^{-2} - \mathrm{C}^{-2})y^2 + \tfrac{1}{3}(\mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-3} - \mathrm{D}.\mathrm{C}^{-3} + \mathrm{C}^{-3})y^5$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\mathcal{D}^3.\mathrm{C}^{-4} - \mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-4} + \mathrm{D}.\mathrm{C}^{-4} - \mathrm{C}^{-4})y^4 + \text{etc.}$$

272. *Seconde manière.* Si ψx est de nature à ne pas pouvoir être développée suivant les puissances de x (telle est la fonction $\log x$), on aura recours au procédé dont nous avons fait usage au n.° 268, et que nous allons généraliser.

Mettant l'équation proposée sous cette forme

$$\frac{x}{y} = (\mathrm{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^{-m} =$$
$$\mathrm{C}^{-m} + \mathrm{D}.\mathrm{C}^{-m}.x + \mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-m}.x^2. + \mathcal{D}^3.\mathrm{C}^{-m}.x^3 + \text{etc.}, \quad \ldots\ldots(1)$$

nous aurons, par nos méthodes,

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi(\mathrm{C}^{-m}) + \mathrm{D}.\psi(\mathrm{C}^{-m}).x + \mathcal{D}^2.\psi(\mathrm{C}^{-m}).x^2 + \mathcal{D}^3.\psi(\mathrm{C}^{-m}).x^3 + \text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Comparant à présent le second membre de cette dernière équation (2) avec $A + Bx + Cx^2 +$ etc. du n.° 257, le théorème donne sur-le-champ

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) =$$
$$\psi(\mathrm{C}^{-m}) + \mathrm{C}^{-m}.\mathrm{D}.\psi(\mathrm{C}^{-m}).y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\{\mathrm{C}^{-2m}.\mathrm{D}.\psi(\mathrm{C}^{-m})\}.y^2 +$$
$$\frac{1}{3}\mathcal{D}^2.\{\mathrm{C}^{-3m}.\mathrm{D}.\psi(\mathrm{C}^{-m})\}.y^3 + \text{etc.}\ \frac{1}{n}\mathcal{D}^{n-1}.\{\mathrm{C}^{-nm}.\mathrm{D}.\psi(\mathrm{C}^{-m})\}.y^n + \text{etc.} \quad \ldots(e)$$

Cette formule présente une loi fort simple.

273. Exemple. Soit $y = x(\mathrm{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})$, on demande $\log x$ par une série en y.

On fera $m = 1$, $\psi(xy^{-1}) = \log(xy^{-1}) = \log x - \log y$, $\psi\mathrm{C}^{-1} = \log\mathrm{C}^{-1} = -\log\mathrm{C}$, donc $\mathrm{D}.\psi\mathrm{C}^{-1} = -\mathrm{C}^{-1}\mathrm{D}.\mathrm{C}$, et le coëfficient de y^n sera $\frac{1}{n}\mathcal{D}^{n-1}.(-\mathrm{C}^{-n-1}\mathrm{D}.\mathrm{C}) = \frac{1}{n}\mathcal{D}^n.\mathrm{C}^{-n}$; ainsi la série sera

$$\log x = \quad \ldots\ldots(3)$$
$$\log(\mathrm{C}^{-1}y) + \mathrm{D}.\mathrm{C}^{-1}.y + \frac{1}{2}\mathcal{D}^2.\mathrm{C}^{-2}.y^2 + \frac{1}{3}\mathcal{D}^3.\mathrm{C}^{-3}.y^3 + \frac{1}{4}\mathcal{D}^4.\mathrm{C}^{-4}.y^4$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathcal{D}^n.\mathrm{C}^{-n}.y^n + \text{etc.},$$

formule remarquable par sa simplicité; elle est facile à développer par la règle du n.° 261, et son développement réduit s'accorde avec la série que trouve LAGRANGE au n.° 19 du mémoire cité.

Si l'on veut que la série soit ordonnée suivant les puissances négatives de $\mathfrak{C}$, il suffit de faire un premier développement en γ, et l'on pourra ordonner la série comme la dernière (7) du n.° 269; on aura ainsi une série qui s'accorde avec celle que trouve LAGRANGE au n.° 18 du même mémoire : mais, après avoir fait ce développement, on peut encore ordonner la série de la manière suivante, ensorte que les colonnes renferment chacune des quantités en γ de même dimension,

$$\begin{aligned}
\log x = \log(\mathfrak{C}^{-1}y) &- \mathfrak{C}^{-2}.\gamma.y + \tfrac{3}{2}\mathfrak{C}^{-4}.\gamma^2.y^2 - \tfrac{4.5}{2.3}\mathfrak{C}^{-6}.\gamma^3.y^3 + \text{etc.}\\
&- \mathfrak{C}^{-3}\mathrm{D}.\gamma.y^2 + \tfrac{4}{2}\mathfrak{C}^{-5}\mathrm{D}.\gamma^2.y^3 - \tfrac{5.6}{2.3}\mathfrak{C}^{-7}\mathrm{D}.\gamma^3.y^4 + \text{etc.}\\
(4)\ldots\ldots\quad &- \mathfrak{C}^{-4}\mathrm{D}^2.\gamma y^3 + \tfrac{5}{2}\mathfrak{C}^{-6}\mathrm{D}^2.\gamma^2.y^4 - \tfrac{6.7}{2.3}\mathfrak{C}^{-8}\mathrm{D}^2.\gamma^3.y^5 + \text{etc.}\\
&- \mathfrak{C}^{-5}\mathrm{D}^3.\gamma.y^4 + \tfrac{6}{2}\mathfrak{C}^{-7}\mathrm{D}^3.\gamma^2.y^5 - \tfrac{7.8}{2.3}\mathfrak{C}^{-9}\mathrm{D}^3.\gamma^3.y^6 + \text{etc.}\\
&- \text{etc.} \quad + \text{etc.} \quad - \text{etc.} \quad + \text{etc.},
\end{aligned}$$

Ici la loi est encore très-facile à saisir.

274. Dans la solution précédente nous avons trouvé l'expression de $\psi(xy^{-1})$, où y est mêlé avec x : voici comment on peut s'y prendre pour avoir une fonction de x seul.

On écrira l'équation (1) du n.° 272 de cette manière :

$$x = \mathfrak{C}^{-m}.y + \mathrm{D}.\mathfrak{C}^{-m}.y.x + \mathrm{D}^2.\mathfrak{C}^{-m}.y.x^2 + \mathrm{D}^3.\mathfrak{C}^{-m}.y.x^3 + \text{etc.}$$

et, en supposant $\mathfrak{C}^{-m}.y = \mathfrak{b}$, $\mathrm{D}.\mathfrak{C}^{-m}.y = \mathfrak{c}$, $\mathrm{D}^2.\mathfrak{C}^{-m}.y = \mathfrak{d}$, etc., y étant invariable, on aura $x = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}x + \mathfrak{d}x^2 + \mathfrak{e}x^3 + \text{etc.}$; donc

$$\psi x = \psi\mathfrak{b} + \mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}.x + \mathrm{D}^2.\psi\mathfrak{b}.x^2 + \mathrm{D}^3.\psi\mathfrak{b}.x^3 + \text{etc.}$$

Comparant ce second membre avec $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ du théorème, on a

$$\psi x = \ldots\ldots(\mathrm{f})$$

$$\psi\mathfrak{b} + \mathfrak{C}^{-m}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{\mathfrak{C}^{-2m}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{\mathfrak{C}^{-3m}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^3$$
$$+ \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\{\mathfrak{C}^{-nm}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^n + \text{etc.};$$

après le développement on remettra à la place de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. leurs valeurs, qu'on développera à leur tour en regardant y comme invariable.

Quoique le développement de cette série ne s'ordonne pas toujours suivant les puissances de φ, puisque y entre sous le signe de fonction, il donne cependant pour x^r et $\log x$, dans les cas des n.os 269 et 273, les mêmes séries que l'on y a trouvées.

---

275. On propose l'équation

$$y = \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(1)$$

p et q étant des exposans positifs ou négatifs, entiers ou quelconques; et l'on demande une fonction quelconque de x par une série en y.

En écrivant, pour plus de commodité, $q:p$ au lieu de $\frac{q}{p}$, et en prenant successivement la puissance $q:p$ et $1:p$ de chaque membre, l'équation (1) devient

$$y^{q:p} = x^q(\beta + \gamma x^q + \delta x^{2q} + \varepsilon x^{3p} + \text{etc.})^{q:p}, \qquad \ldots\ldots(2)$$

et $$y^{1:p} = x(\beta + \gamma x^q + \delta x^{2q} + \varepsilon x^{3q} + \text{etc.})^{1:p}.$$

Cette dernière équation donne

$$x.y^{-1:p} = \beta^{-1:p} + \mathrm{D}.\beta^{-1:p}.x^q + \mathrm{D}^2.\beta^{-1:p}.x^{2q} + \mathrm{D}^3.\beta^{-1:p}.x^{3q} + \text{etc.}, \quad \ldots(3)$$

et prenant la fonction ψ de chaque membre, on a par nos méthodes

$$\psi(x.y^{-1:p}) = \psi(\beta^{-1:p}) + \mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p}).x^q + \mathrm{D}^2.\psi(\beta^{-1:p}).x^{2q} + \mathrm{D}^3.\psi(\beta^{-1:p}).x^{3q} + \text{etc.} + \mathrm{D}^n.\psi(\beta^{-1:p}).x^{nq} + \text{etc.} \quad \ldots(4)$$

Comparant avec le théorème du n.° 257, savoir l'équation (2) avec l'équation

$$y = x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m$$

du théorème, et le second membre de l'équation (4) avec la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} + A_n.x^n + \text{etc.},$$

on voit qu'il suffit de mettre x^q, $y^{q:p}$, $q:p$ au lieu de x, y, m, et $\psi(\beta^{-1:p})$, $\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p})$, au lieu de A, $B = \mathrm{D}.A$, respectivement, et le théorème donnera

$$\psi(x.y^{-1:p}) = \qquad \ldots\ldots(g)$$

$$\psi(\beta^{-1:p}) + \beta^{-q:p}.\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p}).y^{q:p} + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{\beta^{-2q:p}.\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p})\}.y^{2q:p}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{\beta^{-3q:p}.\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p})\}.y^{3q:p} + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\{\beta^{-nq:p}.\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p})\}.y^{nq:p} + \text{etc.}$$

Si l'on veut avoir une fonction de x sans mélange de y, l'équation (3) donne

$$x = \beta^{-1:p}.y^{1:p} + \mathrm{D}.\beta^{-1:p}.y^{1:p}.x^q + \mathrm{D}^2.\beta^{-1:p}.y^{1:p}.x^{2q} + \mathrm{D}^3.\beta^{-1:p}.y^{1:p}.x^{3q} + \text{etc.}$$

Je fais $\beta^{-1:p}y^{1:p} = \mathfrak{b}$, $\mathrm{D}.\beta^{-1:p}.y^{1:p} = \mathfrak{c}$, etc., $y^{1:p}$ étant invariable; cette équation devient par là

$$x = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}x^q + \mathfrak{d}x^{2q} + \mathfrak{e}x^{3q} + \text{etc.},$$

et l'on aura de plus

$$\psi x = \psi\mathfrak{b} + \mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}.x^q + \mathrm{D}^2.\psi\mathfrak{b}.x^{2q} + \mathrm{D}^3.\psi\mathfrak{b}.x^{3q} + \text{etc.}$$

Je compare le second membre de cette équation avec la série $A + Bx + Cx^2 +$ etc., et l'équation (2) comme ci-dessus; et le théorème donne

$$\psi x = \quad \ldots\ldots(\mathrm{h})$$

$$\psi\mathfrak{b} + \beta^{-q:p}\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}.y^{q:p} + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\{\beta^{-2q:p}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^{2q:p} + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{\beta^{-3q:q}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^{3q:p} + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\{\beta^{-nq:p}.\mathrm{D}.\psi\mathfrak{b}\}.y^{nq:p} + \text{etc.}$$

Après le développement, on remettra au lieu de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, etc. leurs valeurs précédentes, qu'on développera à leur tour en regardant $y^{1:p}$ comme invariable.

Si l'on a $yx^t = \beta x^s + \gamma x^{s+q} + \delta x^{s+2q} + \varepsilon x^{s+3q} +$ etc., ce cas se ramène au précédent en divisant par x^t et en faisant $s - t = p$.

Si l'on a $x^t = y(\beta x^s + \gamma x^{s+q} + \delta x^{s+2q} + \varepsilon x^{s+3q} + \text{etc.})$, on peut faire $y = 1 : v$, et ce cas se ramène encore au précédent.

276. Exemple. Étant proposée l'équation

$$0 = -\alpha + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{etc.},$$

p et q étant quelconques, positifs ou négatifs, on demande x^r par une série ordonnée suivant des puissances de α.

Il suffit de faire, dans la formule (g), $\psi(x.y^{-1:p}) = (x.y^{-1:p})^r = x^r.\alpha^{-r:p}$; on aura $\psi(\beta^{-1:p}) = \beta^{-r:p}$, $\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p}) = \mathrm{D}.\beta^{-r:p} = -\frac{r}{p}\beta^{-r:p-1}\mathrm{D}.\beta$; donc $\beta^{-nq:p}\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1:p}) = -\frac{r}{p}\beta^{-(nq+r):p-1}\mathrm{D}.\beta = \frac{r}{r+nq}\mathrm{D}.\beta^{-(r+nq):p}$; ainsi le terme général est $\frac{r}{r+nq}\mathrm{D}^n.\beta^{-(r+nq):p}.\alpha^{nq:p}$, et en multipliant tout par $\alpha^{r:p}$, la série sera

$$x^r = \quad \ldots\ldots(\mathrm{i})$$

$$\beta^{-r:p}.\alpha^{r:p} + \frac{r}{r+q}\mathrm{D}.\beta^{-(r+q):p}.\alpha^{(r+q):p} + \frac{r}{r+2q}\mathrm{D}^2.\beta^{-(r+2q):p}.\alpha^{(r+2q):p} + \frac{r}{r+3q}\mathrm{D}^3.\beta^{-(r+3q):p}.\alpha^{(r+3q):p} + \text{etc.} + \frac{r}{r+nq}\mathrm{D}^n.\beta^{-(r+nq):p}.\alpha^{(r+nq):p} + \text{etc.}$$

Cette formule se développe facilement.

On

On peut aussi, après lui avoir donné un premier développement en γ, l'ordonner par colonnes verticales, chaque colonne contenant des quantités en γ de même dimension, ainsi que nous avons disposé le développement en γ de $\log x$ au n.° 273.

Pour appliquer la formule (i) à un cas très-particulier, prenons le second cas de Newton dans sa lettre citée au n.° 265, savoir : Étant proposée l'équation

$$y = \text{ϐ}x + \gamma x^3 + \delta x^5 + \varepsilon x^7 + \text{etc.},$$

on demande x par une série en y.

On fera $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$, $\alpha = y$, et l'on aura

$$x =$$

$$\text{ϐ}^{-1}.y + \frac{1}{3}\mathrm{D}.\text{ϐ}^{-3}.y^3 + \frac{1}{5}\mathrm{D}^2.\text{ϐ}^{-5}.y^5 + \text{etc.} + \frac{1}{2n+1}\mathrm{D}^n.\text{ϐ}^{-2n-1}.y^{2n+1} + \text{etc.},$$

et en faisant le développement réduit,

$$x = \text{ϐ}^{-1}.y - \text{ϐ}^{-4}\gamma.y^3$$

$$+ \{-\text{ϐ}^{-6}\delta + \frac{6}{2}\text{ϐ}^{-7}\gamma^2\}y^5 + \{-\text{ϐ}^{-8}\varepsilon + \frac{8}{2}\text{ϐ}^{-9}2\gamma\delta - \frac{8.9}{2.3}\text{ϐ}^{-10}\gamma^3\}y^7$$

$$+ \{-\text{ϐ}^{-10}\zeta + \frac{10}{2}\text{ϐ}^{-11}(2\gamma\varepsilon + \delta^2) - \frac{10.11}{2.3}\text{ϐ}^{-12}3\gamma^2\delta + \frac{10.11.12}{2.3.4}\text{ϐ}^{-13}\gamma^4\}y^9$$

$$+ \text{etc.}$$

277. Exemple. On demande $\log x$, dans la supposition de l'exemple général du numéro précédent.

Pour avoir $\log x$ dans cette supposition, on fera $\psi = \log$, et l'on aura $\psi(x.y^{-1:p}) = \log(x.\alpha^{-1:p}) = \log x - \log \alpha^{1:p}$; ensuite $\mathrm{D}.\psi(\text{ϐ}^{-1:p}) = \mathrm{D}.\log \text{ϐ}^{-1:p} = -\frac{1}{p}\mathrm{D}.\log \text{ϐ} = -\frac{1}{p}\frac{\mathrm{D}.\text{ϐ}}{\text{ϐ}} = -\frac{1}{p}\text{ϐ}^{-1}\mathrm{D}.\text{ϐ}$; donc $\text{ϐ}^{-nq:p}\mathrm{D}.\psi(\text{ϐ}^{-1:p})$ devient $= -\frac{1}{p}\text{ϐ}^{-nq:p-1}\mathrm{D}.\text{ϐ} = \frac{1}{nq}\mathrm{D}.\text{ϐ}^{-nq:p}$, et le coëfficient de $\alpha^{nq:p}$ sera $\frac{1}{n.nq}\mathrm{D}^{n-1}.\mathrm{D}.\text{ϐ}^{-nq:p} = \frac{1}{nq}\mathrm{D}^n.\text{ϐ}^{-nq:p}$. La série sera donc

$$\log x =$$

$$\log(\text{ϐ}^{-1:p}.\alpha^{1:p}) + \frac{1}{q}\mathrm{D}.\text{ϐ}^{-q:p}.\alpha^{q:p} + \frac{1}{2q}\mathrm{D}^2.\text{ϐ}^{-2q:p}.\alpha^{2q:p} + \frac{1}{3q}\mathrm{D}^3.\text{ϐ}^{-3q:p}.\alpha^{3q:p}$$

$$+ \text{etc.} + \frac{1}{nq}\mathrm{D}^n.\text{ϐ}^{-nq:p}.\alpha^{nq:p} + \text{etc.}$$

Si l'on avoit $y = \text{ϐ}x + \gamma x^3 + \delta x^5 + \varepsilon x^7 + \text{etc.}$, on feroit $p = 1$, $q = 2$, $\alpha = y$, et l'on auroit

$$\log x =$$

$$\log(6^{-1}y) + \frac{1}{2}\mathrm{D}.6^{-2}.y^2 + \frac{1}{4}\mathrm{D}^2.6^{-4}.y^4 + \frac{1}{6}\mathrm{D}^3.6^{-6}.y^6 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2n}\mathrm{D}^n.6^{-2n}.y^{2n} + \text{etc.}$$

Les formules que nous venons de trouver depuis le n.° 265, sont très-régulières et très-aisées à développer : nous allons passer au retour des fonctions, dont l'usage est encore plus étendu.

---

278. Étant proposée l'équation suivante,

$$y = x\phi(\alpha + x),$$

où ϕ désigne une fonction quelconque ; on demande à exprimer, en α et y, une autre fonction quelconque de x, $\psi(a + x)$, a et α étant des quantités indépendantes.

J'ai d'abord $\phi(\alpha + x) = \phi\alpha + \mathrm{D}\phi\alpha.x + \mathrm{D}^2\phi\alpha.x^2 + \mathrm{D}^3\phi\alpha.x^3 + \text{etc.}$, que je compare avec la série s du théorème du n.° 257 ; je fais $m = 1$, et j'ai $xs = y$; j'ai pareillement, en développant,

$$\psi(a + x) = \psi a + \mathrm{D}\psi a.x + \mathrm{D}^2\psi a.x^2 + \mathrm{D}^3\psi a.x^3 + \text{etc.},$$

que je compare avec la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$, et le théorème donne sur-le-champ

$$\psi(a + x) = \qquad\qquad \ldots\ldots (A)$$

$$\psi a + (\phi\alpha)^{-1}\mathrm{D}\psi a.y + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\phi\alpha)^{-2}\mathrm{D}\psi a\}.y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\phi\alpha)^{-3}\mathrm{D}\psi a\}.y^3$$

$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\phi\alpha)^{-n}\mathrm{D}\psi a\}.y^n + \text{etc.} :$$

nous n'avons pas mis de points après les D, pour indiquer que $\mathrm{D}\alpha = 1$, et $\mathrm{D}a = 1$.

Si l'on avoit $x\phi(\alpha + x) = 1$, ou $x = \dfrac{1}{\phi(\alpha + x)}$, il suffiroit de faire $y = 1$ dans la formule précédente.

279. On a l'équation

$$(t - \alpha)\phi t = y, \quad \text{ou} \quad \alpha - t + \frac{y}{\phi t} = 0,$$

et l'on demande une autre fonction quelconque de t, savoir ψt.

Ce cas se ramène au précédent en faisant $t = \alpha + x$; car, substituant cette valeur dans l'équation proposée, elle devient $x\varphi(\alpha + x) = y$; et puisque $\psi t = \psi(\alpha + t - \alpha)$, en ajoutant et en retranchant α en même temps, on a $\psi t = \psi(\alpha + x)$; il suffit donc de faire $a = \alpha$ dans le numéro précédent, et la formule devient

$$\psi t = \quad \ldots\ldots (B)$$

$$\psi\alpha + (\varphi\alpha)^{-1}\text{D}\psi\alpha.y + \frac{1}{2}\text{D}\{(\varphi\alpha)^{-2}\text{D}\psi\alpha\}.y^2 + \frac{1}{3}\text{D}^2\{(\varphi\alpha)^{-3}\text{D}\psi\alpha\}.y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}\{(\varphi\alpha)^{-n}\text{D}\psi\alpha\}.y^n + \text{etc.},$$

où α est la seule variable, sa dérivée $\text{D}\alpha$ étant $= 1$.

Si l'on avoit $(\alpha - t)\varphi t + 1 = 0$, il suffiroit de faire $y = 1$.

---

280. Étant donnée l'équation suivante

$$x = y\varphi(\alpha + x),$$

on demande à exprimer en α et y une autre fonction quelconque $\psi(a + x)$.

La proposée donne $\frac{x}{\varphi(\alpha + x)} = y$, ou bien en développant,

$$y = \frac{x}{\varphi\alpha + \text{D}\varphi\alpha.x + \text{D}^2\varphi\alpha.x^2 + \text{D}^3\varphi\alpha.x^3 + \text{etc.}};$$

je compare le dénominateur avec ς du corollaire n.° 259, et en faisant $m = 1$, j'ai $y = x\varsigma^{-1}$; je développe pareillement $\psi(a + x)$, ce qui donne

$$\psi a + \text{D}\psi a.x + \text{D}^2\psi a.x^2 + \text{D}^3\psi a.x^3 + \text{etc.},$$

que je compare avec $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + $ etc. du corollaire, et l'équation (IV) me donne sur-le-champ

$$\psi(a + x) = \quad \ldots\ldots (C)$$

$$\psi a + \varphi\alpha.\text{D}\psi a.y + \frac{1}{2}\text{D}\{(\varphi\alpha)^2\text{D}\psi a\}.y^2 + \frac{1}{3}\text{D}^2\{(\varphi\alpha)^3\text{D}\psi a\}.y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}\{(\varphi\alpha)^n\text{D}\psi a\}.y^n + \text{etc.},$$

a et α étant des variables indépendantes, et $\text{D}a$ étant $= 1$, $\text{D}\alpha = 1$.

Si dans le cas présent et dans celui du n.° 278 on vouloit avoir, non $\psi(a + x)$, mais ψx, il suffiroit de faire $a = 0$, dans les séries (A) et (C) après les dérivations effectuées, pourvu toutefois que ψx ou ψa ne soit pas une fonction telle que la supposition de $a = 0$ rende ψa et toutes ses dérivées $\text{D}\psi a$, $\text{D}^2\psi a$, etc. zéro ou infinies, comme cela arrive dans la fonction $\log x$.

281. EXEMPLE. Ayant $x = y\phi(\alpha + x)$, on demande x. En faisant $\mathrm{D}\psi a = 1$, et $\psi a = 0$, on trouve

$$x = \phi\alpha . y + \frac{1}{2}\mathrm{D}(\phi\alpha)^2 y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2(\phi\alpha)^3 . y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}(\phi\alpha)^n . y^n + \text{etc.}$$

282. Étant proposée l'équation

$$\alpha - t + y\phi t = 0, \text{ ou } \frac{t-\alpha}{\phi t} = y,$$

ϕt étant une fonction quelconque de t, on demande la valeur en α et y de ψt, autre fonction quelconque de t.

C'est le cas du beau théorème de LAGRANGE, publié pour la première fois dans les mémoires de Berlin pour 1768, page 275.

J'écris $\alpha + t - \alpha$ au lieu de t dans ϕt et ψt; l'équation proposée devient $\frac{t-\alpha}{\phi(\alpha + t - \alpha)} = y$, et ψt devient $\psi(\alpha + t - \alpha)$; je fais $t - \alpha = x$, et j'ai

$$\frac{x}{\phi(\alpha + x)} = y, \text{ et } \psi t = \psi(\alpha + x).$$

Comparant avec le corollaire, comme on l'a fait au n.° 280, l'équation (IV) donne sur-le-champ

$$\psi t = \qquad \ldots\ldots (\mathrm{D})$$

$$\psi\alpha + \phi\alpha . \mathrm{D}\psi\alpha . y + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\phi\alpha)^2\mathrm{D}\psi\alpha\} . y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\phi\alpha)^3\mathrm{D}\psi\alpha\} . y^3$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\phi\alpha)^n\mathrm{D}\psi\alpha\} . y^n + \text{etc.},$$

α étant la seule variable et $\mathrm{D}\alpha = 1$.

Si l'équation proposée étoit $\alpha - t + \phi t = 0$, il suffiroit de faire $y = 1$, dans cette formule (D), laquelle s'accorde avec celle de LAGRANGE.

Plusieurs Géomètres se sont occupés à donner des démonstrations du théorème de LAGRANGE. On vient de voir la série (D) découler naturellement du théorème du n.° 257, et comme nous avons donné de ce théorème une démonstration rigoureuse et fort simple, celui de LAGRANGE se trouve démontré d'une manière qui réunit la rigueur à la plus grande simplicité.

283. Étant proposée l'équation

$$x = \mathrm{F}(\alpha + y\phi x), \qquad \ldots\ldots (1)$$

F et ϕ indiquant des fonctions quelconques, on demande une autre fonction de x quelconque, ψx, exprimée en α et y.

Je

Je fais $t = \alpha + y\varphi x$; j'aurai $x = \mathrm{F}t$ et $\varphi x = \varphi \mathrm{F} t$; de là on tire

$$y = \frac{t-\alpha}{\varphi \mathrm{F} t}, \quad \text{et } \psi x = \psi \mathrm{F} t; \qquad \ldots\ldots(2)$$

comparant avec le numéro précédent, on voit qu'il suffit d'y changer ψ en $\psi \mathrm{F}$ et φ en $\varphi \mathrm{F}$, et l'on aura, $\mathrm{D}\alpha$ étant $= 1$,

$$\psi x = \qquad \ldots\ldots(\mathrm{E})$$

$$\psi \mathrm{F}\alpha + (\varphi \mathrm{F}\alpha).\mathrm{D}(\psi \mathrm{F}\alpha).y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}\{(\varphi \mathrm{F}\alpha)^2.\mathrm{D}(\psi \mathrm{F}\alpha)\}.y^2 +$$

$$\tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\varphi \mathrm{F}\alpha)^3.\mathrm{D}(\psi \mathrm{F}\alpha)\}.y^3 + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\varphi \mathrm{F}\alpha)^n.\mathrm{D}(\psi \mathrm{F}\alpha)\}.y^n + \text{etc.},$$

formule qui s'accorde avec ce que trouve LAPLACE, mémoires de Paris, année 1777, page 11...

284. Tout demeurant comme ci-dessus, on peut encore donner une autre forme à la série qui exprime ψx en α.

En effet, $x = \mathrm{F}(\alpha + y\varphi x)$ devient, en prenant la fonction φ de part et d'autre et multipliant par y, $y\varphi x = y\varphi \mathrm{F}(\alpha + y\varphi x)$; faisant $y\varphi x = w$, on a $w = y\varphi \mathrm{F}(\alpha + w)$; comparant avec le n.° 281, on trouve, pour w,

$$w = y\varphi x = \varphi \mathrm{F}\alpha.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}(\varphi \mathrm{F}\alpha)^2.y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2(\varphi \mathrm{F}\alpha)^3.y^3 + \text{etc.}$$

$$+ \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}(\varphi \mathrm{F}\alpha)^n.y^n + \text{etc.};$$

substituant cette série dans $x = \mathrm{F}(\alpha + y\varphi x)$, et prenant de part et d'autre la fonction ψ, on a donc aussi

$$\psi x = \qquad \ldots\ldots(\mathrm{E}^*)$$

$$\psi \mathrm{F}\{\alpha + \varphi \mathrm{F}\alpha y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}(\varphi \mathrm{F}\alpha)^2.y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2(\varphi \mathrm{F}\alpha)^3.y^3 + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}(\varphi \mathrm{F}\alpha)^n.y^n + \text{etc.}\}.$$

Cette expression, comparée avec celle du numéro précédent, présente un théorème sur les dérivations dont nous nous occuperons par la suite.

285. EXEMPLE. Étant proposée l'équation

$$x = v(\alpha + \beta x^p + \gamma x^q + \delta x^r + \text{etc.})^s, \qquad \ldots\ldots(1)$$

v étant une constante, et α, β, γ, δ, etc., p, q, r, etc., s, des quantités quelconques; on demande x.

En faisant $\mathrm{f}\alpha = \beta.\alpha^{sp}.v^p + \gamma.\alpha^{sq}.v^q + \delta.\alpha^{sr}.v^r + \text{etc.}$, on aura, par les n.os 284 et 283, en regardant α seul comme variable, la dérivée $\mathrm{D}\alpha$ étant $= 1$,

$$x = \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$v[\alpha + f\alpha + \tfrac{1}{2}D(f\alpha)^2 + \tfrac{1}{3}D^2(f\alpha)^3 + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}D^{n-1}(f\alpha)^n + \text{etc.}]^r$$

$$= v\left[\begin{array}{l}\alpha^r + f\alpha . D\alpha^r + \tfrac{1}{2}D\{(f\alpha)^2 . D\alpha^r\} + \tfrac{1}{3}D^2\{(f\alpha)^3 . D\alpha^r\} \\ \qquad + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}D^{n-1}\{(f\alpha)^n . D . \alpha^r\} + \text{etc.}\end{array}\right].$$

En effet, comparant l'équation proposée avec $x = F(\alpha + \phi x)$, en faisant $y = 1$ dans les n.ºs 283 et 284, on aura $F\alpha = v\alpha'$, donc $\phi F\alpha = \phi(v\alpha')$; ensuite $\phi x = \beta x^p + \gamma x^q + \delta x^r + \text{etc.}$, donc $\phi F\alpha = \beta v^p \alpha'^p + \gamma v^q \alpha'^q + \delta v^r \alpha'^r + \text{etc.}$, série que nous avons représentée par $f\alpha$, donc $\phi F\alpha = f\alpha$. De plus, on a $\psi x = x$, ce qui donne $\psi F\alpha = F\alpha = v\alpha'$. Substituant dans les formules des numéros cités, on trouve la formule ci-dessus.

On résoudra facilement d'une manière semblable les exemples des n.ºs 20 et 21 du mémoire de Lagrange, cité précédemment n.° 269 : nous ne nous y arrêterons pas, l'équation (1) ci-dessus étant plus générale que celles dont part Lagrange.

La formule (2) coïncide avec celle que Giannella a donnée dans les mémoires de Turin, années 1784 et 1785, page 462.

---

286. Soient ϕt et ψt deux fonctions quelconques de t, trouver la relation entre ψt et ϕt, c'est-à-dire exprimer ψt par une série dans laquelle entre la fonction ϕt.

Ajoutant à t et en retranchant en même temps la quantité arbitraire α, on a

$$\psi t = \psi(\alpha + t - \alpha), \quad \text{et } \phi t = \phi(\alpha + t - \alpha),$$

et faisant $t - \alpha = x$, la première de ces équations devient

$$\psi t = \psi(\alpha + x) = \psi\alpha + D\psi\alpha . x + D^2\psi\alpha . x^2 + D^3\psi\alpha . x^3 + \text{etc.},$$

série que je compare avec la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ du théorème n.° 257. La seconde des deux équations précédentes donne

$$\phi t = \phi(\alpha + x) = \phi\alpha + D\phi\alpha . x + D^2\phi\alpha . x^2 + D^3\phi\alpha . x^3 + \text{etc.},$$

partant, $\phi t - \phi\alpha = D\phi\alpha\, x + D^2\phi\alpha . x^2 + D^3\phi\alpha . x^3 + \text{etc.}$,

que je compare avec la série $x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}) = x\varsigma$ du n.° 257, en faisant $m = 1$; j'aurai $x\varsigma = \phi t - \phi\alpha$, $\beta = D\phi\alpha$, $\gamma = D^2\phi\alpha$, $\delta = D^3\phi\alpha$,

etc. Substituant dans la formule (IV) du numéro cité, on trouve

$$\psi t = \quad \ldots\ldots(\mathrm{F})$$

$$\psi\alpha + (\mathrm{D}\phi\alpha)^{-1}.\mathrm{D}\psi\alpha.(\phi t - \phi\alpha) + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-2}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t - \phi\alpha)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-3}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t - \phi\alpha)^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-n}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t - \phi\alpha)^n + \text{etc.}$$

Dans cette formule la quantité α est arbitraire, et dans les dérivations on aura soin de regarder $\psi\alpha$ et $\mathrm{D}\phi\alpha$ comme des premiers termes, ce qui fait que $\mathrm{DD}\psi\alpha$ sera $= 2\mathrm{D}^2\psi\alpha$, $\mathrm{D}^2\mathrm{D}\psi\alpha = 3\mathrm{D}^3\psi\alpha$, etc., tandis qu'il faut prendre $\mathrm{D}^2\phi\alpha$, $\mathrm{D}^3\phi\alpha$, $\mathrm{D}^4\phi\alpha$, etc. pour $\mathrm{DD}\phi\alpha$, $\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi\alpha$, $\mathrm{D}^3\mathrm{D}\phi\alpha$, etc. respectivement.

287. Cette solution peut être employée à différens usages : nous allons en indiquer sommairement quelques-uns.

Mettons, dans la formule (F), t au lieu de α et $t + \Delta t$ au lieu de t, Δ étant la caractéristique des différences (finies), $\phi t - \phi\alpha$ devient $\phi(t + \Delta t) - \phi t = \Delta\phi t$; et la formule prend cette forme

$$\psi(t + \Delta t) = \quad \ldots\ldots(\mathrm{G})$$

$$\psi t + (\mathrm{D}\phi t)^{-1}.\mathrm{D}\psi t.\Delta\phi t + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\mathrm{D}\phi t)^{-2}.\mathrm{D}\psi t\}.(\Delta\phi t)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\mathrm{D}\phi t)^{-3}.\mathrm{D}\psi t\}.(\Delta\phi t)^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\mathrm{D}\phi t)^{-n}.\mathrm{D}\psi t\}.(\Delta\phi t)^n + \text{etc.}$$

Dans cette formule t varie par rapport à D de $\mathrm{D}t = 1$, et par rapport à Δ de Δt, la différence Δt étant tout ce qu'on voudra ; dans les dérivations $\mathrm{D}\phi t$ et ψt doivent être considérés comme des premiers termes.

Cette formule renferme le théorème connu de TAYLOR comme un cas particulier, qu'on obtient en faisant $\phi t = t$: elle donne la solution du problème que LAGRANGE a traité au n.° 200 de la *théorie des fonctions analytiques*, et elle a l'avantage de présenter une loi de progression bien évidente. Nos méthodes la développent avec facilité.

288. Si dans la formule (F) on fait $\phi\alpha = 0$, ce qui suppose que α soit une des racines de $\phi t = 0$, la formule devient

$$\psi t = \quad \ldots\ldots(\mathrm{H})$$

$$\psi\alpha + (\mathrm{D}\phi\alpha)^{-1}.\mathrm{D}\psi\alpha.\phi t + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-2}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-3}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t)^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-n}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi t)^n + \text{etc.};$$

et l'on aura autant de ces séries que l'équation $\phi\alpha = 0$ a de racines. Cette formule sert à convertir ψt en une série ordonnée suivant les puissances de ϕt; elle offre un cas particulier du premier des uages indiqués au n.° 263.

289. Si l'on a l'équation $\phi t = 0$, la formule (F) devient, en y mettant o au lieu de ϕt,

$$\psi t = \quad \ldots\ldots (I)$$

$$\psi\alpha - (\mathrm{D}\phi\alpha)^{-1}.\mathrm{D}\psi\alpha.\phi\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-2}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi\alpha)^2$$
$$-\frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-3}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi\alpha)^3 + \text{etc.} \pm \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-n}.\mathrm{D}\psi\alpha\}.(\phi\alpha)^n \mp \text{etc.}$$

tout demeurant au reste comme au n.° 286. Cette série est remarquable en ce qu'il n'y entre d'autre quantité que α, qui est arbitraire.

290. Exemple. Si dans cette dernière formule (I) on suppose $\psi t = t^r$, elle devient

$$t^r = \alpha^r - (\mathrm{D}\phi\alpha)^{-1}.\mathrm{D}\alpha^r.\phi\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{D}\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-2}.\mathrm{D}\alpha^r\}.(\phi\alpha)^2$$
$$-\frac{1}{3}\mathrm{D}^2\{(\mathrm{D}\phi\alpha)^{-3}.\mathrm{D}\alpha^r\}.(\phi\alpha)^3 + \text{etc.}, \quad \ldots (K)$$

formule qui contient la solution de ce problème : « Étant donnée une équation quelconque $\phi t = 0$, ϕt étant une fonction de t algébrique ou transcendante; trouver une série qui donne non-seulement la valeur d'une des racines t, mais encore celle d'une puissance t^r de cette racine. » Ce problème fait le sujet d'un mémoire d'Euler, inséré dans le tome VI des *nova Acta* de Pétersbourg, sous le titre : *Methodus generalis investigandi radices omnium æquationum per approximationem*, et la formule que l'auteur trouve s'accorde au fond avec la précédente. Il observe qu'afin que la série devienne assez convergente pour servir à trouver la racine par approximation, il faut prendre pour l'arbitraire α une valeur qui approche fort près de cette racine, et que dans ce cas la méthode ordinaire conduit au même but plus commodément. Aussi bien allons-nous faire voir que la méthode ordinaire peut être réduite à une formule qui coïncide avec la précédente (K), en faisant $r = 1$ dans celle-ci.

291. La méthode ordinaire est celle que Newton a donnée dans son *traité des fluxions*; Taylor y appliqua le premier le théorème qui porte son nom, et l'étendit

l'étendit par là aux équations transcendantes (*Transactions philosophiques, tome XXX, pour* 1717). EULER, dans le chap. IX de la 2.de partie de son Calcul différentiel, et COURTIVRON, dans les *mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour* 1744, la réduisirent en formule.

En partant de la considération de NEWTON, soit $\varphi t = 0$ une équation donnée, et α une valeur approchée d'une des racines, et soit p ce qu'il faut ajouter à la valeur de α pour avoir cette racine; on aura $t = \alpha + p$: substituant $\alpha + p$ au lieu de t dans $\varphi t = 0$, on trouve

$$-\varphi\alpha = \mathrm{D}\varphi\alpha . p + \mathrm{D}^2\varphi\alpha . p^2 + \mathrm{D}^3\varphi\alpha . p^3 + \text{etc.}$$

Comparant avec le n.° 278, on aura une série pour p, laquelle ajoutée à α donne

$$t = \alpha - (\mathrm{D}\varphi\alpha)^{-1}.\varphi\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{D}(\mathrm{D}\varphi\alpha)^{-2}.(\varphi\alpha)^2 - \frac{1}{3}\mathrm{D}^2(\mathrm{D}\varphi\alpha)^{-3}.(\varphi\alpha)^3 + \text{etc.},$$

formule qui coïncide avec la formule (K) ci-dessus, si l'on y fait $r = 1$.

292. En considérant d'autres équations, on pourroit encore déduire différentes formules de notre théorème général; mais celles qui précèdent suffisent pour faire connoître la manière de l'appliquer aux différens cas du retour des séries et des fonctions.

Nous n'avons pas cherché à exprimer les coëfficiens des séries précédentes en termes récurrens, c'est-à-dire en formules qui contiennent les coëfficiens précédens, la chose n'ayant aucune difficulté au moyen de nos méthodes. Si cependant on vouloit de ces sortes d'expressions, il suffit d'avertir que, tout demeurant comme dans le problème du n.° 255 et comme dans le théorème du n.° 257, les formules (3) du n.° 255 donnent sur-le-champ

$$a = A,$$

$$b = \frac{B}{\xi^m},$$

$$c = \frac{C - b\mathrm{D}.\xi^m}{\xi^{2m}},$$

$$d = \frac{D - b\mathrm{D}^2.\xi^m - c\mathrm{D}.\xi^{2m}}{\xi^{3m}},$$

$$e = \frac{E - b\mathrm{D}^3.\xi^m - c\mathrm{D}^2.\xi^{2m} - d\mathrm{D}.\xi^{3m}}{\xi^{4m}},$$

etc.

(III.)

Étendons présentement le théorème du n.° 257 aux séries doubles.

PROBLÈME.

293. Étant donnée la série double

$$\begin{array}{llllll} A + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + \text{etc.} & & \\ \quad + B'y & + C'xy & + D'x^2y & + \text{etc.} & & \\ & \quad + C''y^2 & + D''xy^2 & + \text{etc.} & & \ldots\ldots(\text{I}) \\ & & \quad + D'''y^3 & + \text{etc.} & & \\ & & & + \text{etc.}, & & \end{array}$$

et l'équation suivante en x et y,

$$x\left\{\begin{array}{l} b + cx + dx^2 + ex^3 + \text{etc.} \\ \quad + c'y + d'xy + e'x^2y + \text{etc.} \\ \qquad + d''y^2 + e''xy^2 + \text{etc.} \\ \qquad\quad + e'''y^3 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right\}^r = \pi y(\zeta' + \gamma''y + \delta'''y^2 + \varepsilon^{IV}y^3 + \text{etc.})^s; \quad \ldots\ldots(\text{II})$$

tous les coëfficiens, ainsi que π, étant des quantités quelconques, dépendantes ou indépendantes les unes des autres ; on propose d'éliminer x de la série (I) et de transformer celle-ci en une série ordonnée suivant les puissances de y, de cette forme :

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}y^3 + \mathfrak{e}y^4 + \text{etc.}, \quad \ldots\ldots(\text{III})$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, étant des fonctions des coëfficiens de (I) et (II), dans lesquelles il n'entre ni x ni y.

---

294. Pour résoudre ce problème, représentons par une seule lettre chaque série en y affectée d'une puissance différente de x, ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{ll} 'A = A + B'y + C''y^2 + \text{etc.}, & 'B = B + C'y + D''y^2 + \text{etc.}, \\ 'C = C + D'y + E''y^2 + \text{etc.}, & 'D = D + E'y + F''y^2 + \text{etc.}, \text{ etc.}, \\ 'b = b + c'y + d''y^2 + \text{etc.}, & 'c = c + d'y + e''y^2 + \text{etc.}, \\ 'd = d + e'y + f''y^2 + \text{etc.}, & 'e = e + f'y + g''y^2 + \text{etc.}, \text{ etc.}, \\ \multicolumn{2}{c}{'\zeta' = \zeta' + \gamma''y + \delta'''y^2 + \varepsilon^{IV}y^3 + \text{etc.};} \end{array}\right\} \ldots(\text{IV})$$

au moyen de ces notations le problème est ramené à celui du n.° 255, car la série (I) proposée ci-dessus devient

$$'A + 'Bx + 'Cx^2 + 'Dx^3 + \text{etc.},$$

et l'équation (II) prend cette forme

$$x('b + 'cx + 'dx^2 + 'ex^3 + \text{etc.})^r = \pi y . '\varsigma'^s,$$

où π est invariable. Comparant donc avec le théorème du n.° 257, et mettant r au lieu de m et $'\varsigma'^s . \pi y$ au lieu de x_s^m ou y, le théorème donnera

$$'A + 'Bx + 'Cx^2 + 'Dx^3 + \text{etc.} = \quad \ldots\ldots (\text{V})$$

$$'A + 'b^{-r} . \mathrm{D} . 'A . '\varsigma'^s . \pi y + \frac{1}{2} \mathrm{D} . ('b^{-2r} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{2s} . \pi^2 y^2 +$$

$$\frac{1}{3} \mathfrak{D}^2 . ('b^{-3r} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{3s} . \pi^3 y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{m} \mathfrak{D}^{m-1} . ('b^{-mr} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{ms} . \pi^m y^m + \text{etc.}$$

Il n'y a plus de x dans cette dernière série ; ainsi il suffit de la développer suivant les puissances de y, pour avoir la série (III).

Imaginons qu'on ait remis au lieu de $'A$, $'b$, $'\varsigma'$ leurs valeurs (IV), il est visible qu'en développant suivant les puissances de y, on aura, pour le coëfficient de y^n dans le terme général $\frac{1}{m} '\varsigma'^{ms} . \mathfrak{D}^{m-1} . ('b^{-mr} . \mathrm{D} . 'A) . \pi^m y^m$, l'expression suivante

$$\frac{1}{m} \mathfrak{D}'^{n-m} . \{ \varsigma'^{ms} . \mathfrak{D}^{m-1} . (b^{-mr} . \mathrm{D} . A) \} . \pi^m,$$

où le signe D affecte A et b et leurs dérivées mais non ς' et ses dérivées, tandis que D' affecte tant A et b que ς' et leurs dérivées. D'après cela, il est clair que dans $'A$ le coëfficient de y^n sera .... $\mathfrak{D}'^n . A$,
dans $'b^{-r} \mathrm{D} . 'A . '\varsigma'^s . \pi y$ le coëfficient de y^n sera...... $\mathfrak{D}'^{n-1} . \{ \varsigma'^s . b^{-r} . \mathrm{D} . A \} . \pi$,
dans $\frac{1}{2} \mathrm{D} . ('b^{-2r} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{2s} . \pi^2 y^2$ il sera ..... $\frac{1}{2} \mathfrak{D}'^{n-2} \{ \varsigma'^{2s} . \mathrm{D} . (b^{-2r} . \mathrm{D} . A) \} . \pi^2$,
dans $\frac{1}{3} \mathfrak{D}^2 . ('b^{-3r} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{3s} . \pi^3 y^3$ .... $\frac{1}{3} \mathfrak{D}'^{n-3} . \{ \varsigma'^{3s} . \mathfrak{D}^2 . (b^{-3r} . \mathrm{D} . A) \} . \pi^3$,
etc., ...
dans $\frac{1}{n} \mathfrak{D}^{n-1} . ('b^{-nr} . \mathrm{D} . 'A) . '\varsigma'^{ns} . \pi^n y^n$ .... $\frac{1}{n} \varsigma'^{ns} \mathfrak{D}^{n-1} . (b^{-nr} . \mathrm{D} . A) . \pi^n$.

En rassemblant les expressions écrites dans la dernière colonne verticale, on a le coëfficient a_n du terme général $a_n y^n$ de la série (III). De là résulte le théorème suivant.

Je n'ai pas besoin d'avertir que l'équation (II) fait voir que dans les dérivations D', où la lettre change et l'accent, c', d'', e''', f^{IV}, etc. sont des dernières quantités.

THÉORÈME.

295. Étant proposées la série (I) et l'équation (II) du problème précédent n.° 293; pour convertir la série (I) en une série ordonnée suivant les puissances de y et dans laquelle x ne se trouve plus, on aura la formule suivante

$$\left.\begin{array}{rrrrr} A + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + \text{etc.} \\ + B'y & + C'xy & + D'x^2y & + \text{etc.} \\ & + C''y^2 & + D''xy^2 & + \text{etc.} \\ & & + D'''y^3 & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} A \quad + \text{D}'.A & + \mathfrak{D}'^2.A & + \mathfrak{D}'^3.A & \\ + \beta'^s.b^{-r}.\text{D}.A.\pi & + \text{D}'.\{\beta'^s.b^{-r}.\text{D}.A\}.\pi & + \mathfrak{D}'^2.\{\beta'^s.b^{-r}.\text{D}.A\}.\pi & \\ & + \frac{1}{2}\beta'^{2s}\text{D}.(b^{-2r}.\text{D}.A).\pi^2 & + \frac{1}{2}\text{D}'.\{\beta'^{2s}.\text{D}.(b^{-2r}.\text{D}.A)\}.\pi^2 & \\ & & + \frac{1}{3}\beta'^{3s}\mathfrak{D}^2.(b^{-3r}.\text{D}.A).\pi^3 & \end{array} \begin{array}{l} y \qquad y^2 \qquad y^3 \\ + \text{etc.}, \end{array}$$

$$\ldots\ldots\ (\text{VI})$$

le terme général de ce second membre étant

$$a_n.y^n = \qquad\qquad \ldots\ldots(\text{VII})$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}'^n.A + \mathfrak{D}'^{n-1}.\{\beta'^s.b^{-r}.\text{D}.A\}.\pi + \frac{1}{2}\mathfrak{D}'^{n-2}.\{\beta'^{2s}\text{D}.(b^{-2r}.\text{D}.A)\}.\pi^2 + \text{etc.} \\ \quad + \frac{1}{n-1}\text{D}'.\{\beta'^{(n-1)s}.\mathfrak{D}^{n-2}.(b^{-(n-1)r}.\text{D}.A)\}.\pi^{n-1} + \frac{1}{n}\beta'^{ns}.\mathfrak{D}^{n-1}.(b^{-nr}.\text{D}.A).\pi^n \end{array}\right\} y^n.$$

A, b, β' doivent être considérés dans les dérivations comme des premiers termes.

COROLLAIRES.

296. I. Puisque les exposans r et s sont quelconques, on pourra changer r en $-r$, ou changer s en $-s$, ou changer à la fois r et s en $-r$ et $-s$; on aura ainsi quatre formules différentes, y compris celle du théorème, lesquelles répondent chacune à des cas différens de retour de séries.

297. II. Tout demeurant comme aux n.os 293 et 295, si la série à transformer est simple, sans y, c'est-à-dire si l'on a

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

alors A n'a aucune dérivée D', les termes $\text{D}'.A$, $\mathfrak{D}'^2.A$, $\mathfrak{D}'^3.A$, etc. $\mathfrak{D}'^n.A$ disparoissent des formules (VI) et (VII) du théorème, et dans les autres termes de ces

ces formules D' n'affecte plus A, de sorte que A y est constant par rapport à D' et variable seulement par rapport à D.

298. III. Si la série à transformer est double comme au n.° 293, mais si l'équation (II) du même numéro se réduit à la suivante

$$x(b+cx+dx^2+ex^3+\text{etc.})^r=\pi y(\beta'+\gamma''y+\delta'''y^2+\varepsilon^{IV}y^3+\text{etc.})^s;\ \ldots(\text{VIII})$$

alors on aura la même série que dans le théorème, avec la limitation que D' n'affecte point b, qui n'est plus variable que par rapport à D.

299. IV. Enfin, si la série à transformer est simple, savoir

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

et qu'on ait en même temps l'équation

$$x(b+cx+dx^2+ex^3+\text{etc.})^r=\pi y(\beta'+\gamma''y+\delta'''y^2+\text{etc.})^s,$$

où les x et les y sont séparés, alors D' dans la formule (VI) du théorème ne peut affecter que β', et les autres quantités sortiront de dessous de ce signe. Ainsi la formule deviendra

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}= \quad\ldots\ldots(\text{IX})$$

$$A+b^{-r}\mathrm{D}.A.\beta'^{s}.\pi.y+\left.\begin{matrix}b^{-r}\mathrm{D}.A.\mathrm{D}'.\beta'^{s}.\pi\\+\frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2r}.\mathrm{D}.A).\beta'^{2s}.\pi^2\end{matrix}\right|y^2+\left.\begin{matrix}b^{-r}\mathrm{D}.A.\mathfrak{D}'^{2}.\beta'^{s}.\pi\\+\frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2r}.\mathrm{D}.A).\mathrm{D}'.\beta'^{2s}.\pi^3\\+\frac{1}{3}\mathfrak{D}^{2}.(b^{-3r}.\mathrm{D}.A).\beta'^{3s}.\pi^3\end{matrix}\right|y^3+\text{etc.},$$

et le terme général de cette série sera

$$\left\{\begin{matrix}b^{-r}\mathrm{D}.A.\mathfrak{D}'^{n-1}.\beta'^{s}.\pi+\frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2r}.\mathrm{D}.A).\mathfrak{D}'^{n-2}.\beta'^{2s}.\pi^2+\\\frac{1}{3}\mathfrak{D}^{2}.(b^{-3r}.\mathrm{D}.A).\mathfrak{D}'^{n-3}.\beta'^{3s}.\pi^3+\text{etc.}\ldots+\frac{1}{n-2}\mathfrak{D}^{n-3}.(b^{-(n-2)r}.\mathrm{D}.A).\mathfrak{D}'^{2}.\beta'^{(n-2)s}.\pi^{n-2}\\+\frac{1}{n-1}\mathfrak{D}^{n-2}.(b^{-(n-1)r}.\mathrm{D}.A).\mathrm{D}'.\beta'^{(n-1)s}.\pi^{n-1}+\frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(b^{-nr}.\mathrm{D}.A).\beta'^{ns}.\pi^{n}\end{matrix}\right\}y^n,$$

où A, b et β' sont des premiers termes.

Puisque les coëfficiens de y sont séparés de ceux de x dans l'équation précédente, on peut omettre les traits dans le second membre et écrire simplement $\beta+\gamma y+\delta y^2+$ etc., et partant supprimer aussi le trait qui affecte D' dans les formules que nous venons de trouver.

Quant aux développemens ultérieurs des formules que nous venons de donner depuis le n.° 295, ils n'ont aucune difficulté après ce qu'on a vu dans l'article III.

(IV.)

Appliquons maintenant le théorème précédent n.° 295 et ses corollaires au retour des séries doubles et des fonctions à deux quantités. On peut tirer de ce théorème un grand nombre de conséquences, mais nous nous bornerons à quelques-unes, qui suffiront pour en faire voir la fécondité et la manière de l'appliquer.

---

300. Étant donnée l'équation générale d'un degré quelconque,

$$\begin{array}{rllllll} 0 = & bx & + cx^2 & + dx^3 & + ex^4 & + \text{etc.} & \\ & + b'y & + c'xy & + d'x^2y & + e'x^3y & + \text{etc.} & \\ & & + c''y^2 & + d''xy^2 & + e''x^2y^2 & + \text{etc.} & \quad\ldots\ldots(1) \\ & & & + d'''y^3 & + e'''xy^3 & + \text{etc.} & \\ & & & & + e^{IV}y^4 & + \text{etc.} & \\ & & & & & + \text{etc.}\,; & \end{array}$$

on demande la valeur de la racine x, exprimée en y, c'est-à-dire les valeurs des coëfficiens de l'équation

$$x = \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}y^3 + \mathfrak{e}y^4 + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(2)$$

C'est le cas de Leibniz, qu'on trouve dans le tome III de ses œuvres, page 366.

Je mets l'équation proposée sous cette forme

$$x\left\{\begin{array}{llllll} b & + cx & + dx^2 & + ex^3 & + \text{etc.} \\ & + c'y & + d'xy & + e'x^2y & + \text{etc.} \\ & & + d''y^2 & + e''xy^2 & + \text{etc.} \\ & & & + e'''y^3 & + \text{etc.} \\ & & & & + \text{etc.} \end{array}\right\} = -y(b' + c''y + d'''y^2 + e^{V}y^3 + \text{etc.})\,; \qquad \ldots\ldots(3)$$

comparant avec le théorème, n.ºs 293 et 295, on aura, puisque x remplace ici toute la série (I), $A = 0$, $B = \mathrm{D}.A = 1$, et toutes les autres dérivées de $A = 0$; ensuite, en comparant la dernière équation (3) avec l'équation (II) du n.° 293, on aura $r = 1$, $\pi = -1$, $s = 1$, $\beta' + \gamma''y + \delta'''y^2 + \text{etc.} = b' + c''y + d'''y^2 + \text{etc.}$. Ainsi la formule (VI) du théorème donnera celle-ci

$$(a)\ldots\ldots \quad x = -b'.b^{-1}.y \begin{array}{l} -\mathrm{D}'.(b'.b^{-1}) \\ +b'^2.\frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2} \end{array}\Bigg| y^2 \begin{array}{l} -\mathfrak{D}'^2.(b'.b^{-1}) \\ +\mathrm{D}'.(b'^2.\frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}) \\ -b'^3.\frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.b^{-3} \end{array}\Bigg| y^3 \begin{array}{l} -\mathfrak{D}'^3.(b'.b^{-1}) \\ +\mathfrak{D}'^2.(b'^2.\frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}) \\ -\mathrm{D}'.(b'^3.\frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.b^{-3}) \\ +b'^4.\frac{1}{4}\mathfrak{D}^3.b^{-4} \end{array}\Bigg| y^4 + \text{etc.},$$

formule dont la loi est manifeste, et dans laquelle le terme général est

$$\left\{\begin{matrix} -\mathrm{D}'^{n-1}.(b'.b^{-1}) + \mathrm{D}'^{n-2}.(b'^2.\frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}) - \mathrm{D}'^{n-3}.(b'^3.\frac{1}{3}\mathrm{D}^2.b^{-3}) + \text{etc.} \\ \pm\mathrm{D}'^2.(b'^{n-2}.\frac{1}{n-2}\mathrm{D}^{n-3}.b^{-n+2}) \mp \mathrm{D}'.(b'^{n-1}.\frac{1}{n-1}\mathrm{D}^{n-2}.b^{-n+1}) \pm b'^n.\frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.b^{-n} \end{matrix}\right\} y^n.$$

301. Voici les premiers termes du développement réduit de cette série; on peut le continuer aussi loin qu'on voudra par ce qui a été dit aux n.ºs 178 et 150.

$$x =$$

$$-b'b^{-1}.y + b'.b^{-2}c - c''.b^{-1} \,\Big|\, y^2 + b'(b^{-2}d'' - b^{-3}c'^2) + c''.b^{-2}c' - d'''.b^{-1} \,\Big|\, y^3$$

$$- b'^2.b^{-3}c \qquad - b'^2(b^{-3}.d' - 3b^{-4}c'.c) - 2b'c''.b^{-3}c$$

$$+ b'^3(b^{-4}d - \frac{4}{2}b^{-5}c^2)$$

$$+ b'(b^{-2}e''' - b^{-3}2c'd' + b^{-4}c'^3) + c''(b^{-2}d'' - b^{-3}c'^2) + d'''.b^{-2}c' - e^{IV}.b^{-1} \,\Big|\, y^4$$

$$- b'^2[b^{-3}.e'' - 3b^{-4}c'.d' - (3b^{-4}d'' - 6b^{-5}c'^2).c] - 2b'c''(b^{-3}.d' - 3b^{-4}c'.c)$$

$$- (2b'd''' + c''^2)b^{-3}c$$

$$+ b'^3(b^{-4}.e' - 4b^{-5}c'.d \,|\, - \frac{4}{2}b^{-5}.2cd' + \frac{4.5}{2}b^{-6}c'.c^2) + 3b'^2c''(b^{-4}d - \frac{4}{2}b^{-5}c^2)$$

$$- b'^4(b^{-5}e - \frac{5}{2}b^{-6}2cd + \frac{5.6}{2.3}b^{-7}c^3)$$

$$+ b'[b^{-2}f^{IV} - b^{-3}(2c'e''' + d''^2) + b^{-4}3c'^2d'' - b^{-5}c'^4] + \,\Big|\, y^5$$

$$c''(b^{-2}e''' - b^{-3}2c'd'' + b^{-4}c'^3) + d'''(b^{-2}d'' - b^{-3}c'^2) + e^{IV}.b^{-2}c' - f^{V}.b^{-1}$$

$$- b'^2[b^{-3}.f''' - 3b^{-4}c'.e'' - (3b^{-4}d'' - 6b^{-5}c'^2).d' - (3b^{-4}e''' - 6b^{-5}2c'd'' + 10b^{-6}c'^3)c]$$

$$- 2b'c''[b^{-3}.e'' - 3b^{-4}c'.d' - (3b^{-4}d'' - 6b^{-5}c'^2).c] - (2b'd''' + c''^2)(b^{-3}.d' - 3b^{-4}c'.c)$$

$$- (2b'e^{IV} - 2c''d''').b^{-3}c$$

$$+ b'^3[b^{-4}.f'' - 4b^{-5}c'.e' - (4b^{-5}d'' - 10b^{-6}c'^2).d \,|\, - \frac{4}{2}b^{-5}(2ce'' + d'^2)$$

$$+ \frac{4.5}{2}b^{-6}c'.2cd' - \frac{4.5.6}{2.2}b^{-7}c'^2.c^2] + 3b'^2c''(b^{-4}.e' - 4b^{-5}c'.d \,|\, - \frac{4}{2}b^{-5}.2cd'$$

$$+ \frac{4.5}{2}b^{-6}c'.c^2) + (3b'^2d''' + 3b'c''^2)(b^{-4}d - \frac{4}{2}b^{-5}c^2)$$

$$- b'^4[b^{-5}.f' - 5b^{-6}c'.e \,|\, - \frac{5}{2}b^{-6}(2c.e' + 2d'.d) + \frac{5.6}{2}b^{-7}c'.2cd \,|$$

$$+ \frac{5.6}{2.3}b^{-7}.3c^2d' - \frac{5.6.7}{2.3}b^{-8}c'.c^3] - 4b'^3c''(b^{-5}e - \frac{5}{2}b^{-6}2cd + \frac{5.6}{2.3}b^{-7}c^3)$$

$$+ b'^5[b^{-6}f - \frac{6}{2}b^{-7}(2ce + d^2) + \frac{6.7}{2.3}b^{-8}3c^2d - \frac{6.7.8}{2.3.4}b^{-9}c^4]$$

$$+ \{\text{ etc. }\}.y^6 + \text{etc.}$$

302. La règle que Leibniz a donnée est pour résoudre le problême en termes récurrens ; notre solution a l'avantage de donner les termes de la série indépendamment les uns des autres, avec l'expression du terme général : comme cependant la solution en termes récurrens offre une loi simple au moyen de nos notations, et que Leibniz a supprimé l'analyse qu'il a suivie, nous allons aussi donner une solution en termes récurrens.

Puisque l'équation (2) n.° 300 devient, en élevant à la puissance p,

$$x^p = \mathfrak{b}^p y^p + \mathrm{p}.\mathfrak{b}^p.y^{p+1} + \mathfrak{p}^2.\mathfrak{b}^p.y^{p+2} + \mathfrak{p}^3.\mathfrak{b}^p.y^{p+3} + \text{etc.};$$

donnant à p successivement les valeurs 1, 2, 3, etc., et substituant dans l'équation (1), celle-ci devient

$$\begin{array}{rrrrrl}
0 = & b\mathfrak{b}.y & + b\mathfrak{c}.y^2 & + b\mathfrak{d}.y^3 & + b\mathfrak{e}.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & + c\mathfrak{b}^2.y^2 & + c\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2.y^3 & + c\mathfrak{p}^2.\mathfrak{b}^2.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & + d\mathfrak{b}^3.y^3 & + d\mathrm{D}.\mathfrak{b}^3.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & + e\mathfrak{b}^4.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.} \\
 & + b'.y & + c'\mathfrak{b}.y^2 & + c'\mathrm{D}.\mathfrak{b}.y^3 & + c'\mathfrak{p}^2.\mathfrak{b}.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & + d'\mathfrak{b}^2.y^3 & + d'\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & + e'\mathfrak{b}^3.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.} \\
 & & + c''.y^2 & + d''\mathfrak{b}.y^3 & + d''\mathrm{D}.\mathfrak{b}.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & + e''\mathfrak{b}^2.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.} \\
 & & & + d'''.y^3 & + e'''\mathfrak{b}.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.} \\
 & & & & + e^{IV}.y^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.}
\end{array}$$

De là on tire, en égalant à zéro séparément les sommes des coëfficiens des diverses puissances de y,

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{b} = -\dfrac{b'}{b}, \\[2ex]
\mathfrak{c} = -\dfrac{c'' + c'\mathfrak{b} + c\mathfrak{b}^2}{b}, \\[2ex]
\mathfrak{d} = -\dfrac{d''' + d''\mathfrak{b} + d'\mathfrak{b}^2 + d\mathfrak{b}^3 + c'\mathrm{D}.\mathfrak{b} + c\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2}{b}, \\[2ex]
\mathfrak{e} = -\dfrac{e^{IV} + e'''\mathfrak{b} + e''\mathfrak{b}^2 + e'\mathfrak{b}^3 + e\mathfrak{b}^4 + d''\mathrm{D}.\mathfrak{b} + d'\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2 + d\mathrm{D}.\mathfrak{b}^3 + c'\mathfrak{p}^2.\mathfrak{b} + c\mathfrak{p}^2.\mathfrak{b}^2}{b},
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots(\mathfrak{b})$$

etc. : la

la loi se saisit facilement; elle est élégante et simple. Ces formules donnent les mêmes résultats que la règle de LEIBNIZ.

303. LEIBNIZ traita le problème précédent à l'occasion d'un cas, beaucoup moins général, dont MOIVRE avoit publié une solution dans les *Transactions philosophiques*, tome XX, pour 1698. Voici ce cas.

Étant proposée l'équation

$$x(b + cx + dx^2 + ex^3 + \text{etc.}) = y(\beta' + \gamma'' y + \delta''' y^2 + \varepsilon^{IV} y^3 + \text{etc.}),$$

on demande la valeur de x en y.

Il suffit de faire, dans le numéro 299, $r = 1$, $s = 1$, $\pi = 1$, $A = 0$, $B = \mathrm{D}.A = 1$, et C, D, E, etc. $= 0$; et la formule (IX) donne

$$(\mathfrak{c})\ldots\ldots \quad x = b^{-1}b'.y + \left.\begin{array}{l} b^{-1}\mathrm{D}'.\beta' \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}.\beta'^2 \end{array}\right| y^2 + \left.\begin{array}{l} b^{-1}\mathfrak{D}'^2.\beta' \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}.\mathrm{D}'.\beta'^2 \\ + \frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.b^{-3}.\beta'^3 \end{array}\right| y^3 + \left.\begin{array}{l} b^{-1}\mathfrak{D}'^3.\beta' \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}.\mathfrak{D}'^2.\beta'^2 \\ + \frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.b^{-3}.\mathrm{D}'.\beta'^3 \\ + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^3.b^{-4}.\beta'^4 \end{array}\right| y^4 + \text{etc.}$$

Rien n'est si aisé que de faire les développemens réduits, car ici D n'affecte que b et D' que β'; ainsi nous ne nous y arrêterons pas. La solution de MOIVRE est en termes récurrens; et il est aisé de voir qu'en supposant $x = \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}y^3 + \mathfrak{e}y^4 +$ etc., on aura, en comparant avec le numéro précédent,

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{b} = \dfrac{\beta'}{b}, \\ \mathfrak{c} = \dfrac{\gamma'' - c\mathfrak{b}^2}{b}, \\ \mathfrak{d} = \dfrac{\delta''' - d\mathfrak{b}^3 - c\mathrm{D}.\mathfrak{b}^2}{b}, \\ \mathfrak{e} = \dfrac{\varepsilon^{IV} - e\mathfrak{b}^4 - d\mathrm{D}.\mathfrak{b}^3 - c\mathfrak{D}^2.\mathfrak{b}^2}{b}, \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{d})$$

etc. Ces formules développées coïncident avec celles de MOIVRE.

---

304. Dans le cas de LEIBNIZ, c'est-à-dire ayant l'équation (1) du n.° 300, on demande l'expression en y d'une fonction quelconque de x et de y, représentée par $\psi(x, y)$, en supposant que cette fonction puisse se développer suivant les dimensions de x et de y.

Je mets l'équation proposée sous la forme (3) du n.° 300, et je la compare avec (II) du n.° 293, où il faut faire $r = 1$, $s = 1$, et $\pi = -1$; je développe $\psi(a + x, a' + y)$, ce qui donne

$$\begin{array}{rl}\psi(x,y) = \psi(a,a') + \mathrm{D}\psi(a,a').x & + \mathrm{D}^2\psi(a,a').x^2 + \text{etc.} \\ + \mathrm{D}'\psi(a,a').y & + \mathrm{D}'\mathrm{D}\psi(a,a').xy + \text{etc.} \\ & + \mathrm{D}'^2\psi(a,a').y^2 + \text{etc.} \\ & \qquad + \text{etc.},\end{array}$$

pourvu qu'après les dérivations effectuées, dans lesquelles $\mathrm{D}a = 1$ et $\mathrm{D}'a = 1$, on fasse $a = 0$, et $a' = 0$. Je compare ce second membre avec l'équation (1) du n.° 293, et le théorème du n.° 295 donne

$$\psi(x,y) = \qquad\qquad \ldots\ldots(\epsilon)$$

$$\psi(a,a') \left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}'\psi(a,a') \\ - b'.b^{-1}.\mathrm{D}\psi(a,a') \end{array}\right| y \left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}'^2\psi(a,a') \\ - \mathrm{D}'.\{b'.b^{-1}.\mathrm{D}\psi(a,a')\} \\ + \tfrac{1}{2}b'^2.\mathrm{D}.(b^{-2}\mathrm{D}\psi(a,a')) \end{array}\right| y^3 \left.\begin{array}{l} + \mathrm{D}'^3\psi(a,a') \\ - \mathrm{D}'^2.\{b'.b^{-1}.\mathrm{D}\psi(a,a')\} \\ + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}'.\{(b'^2\mathrm{D}.(b^{-2}.\mathrm{D}\psi(a,a'))\} \\ - \tfrac{1}{3}b'^3\mathrm{D}^2.(b^{-3}.\mathrm{D}\psi(a,a')) \end{array}\right| y^4 + \text{etc.},$$

en faisant $a = 0$ et $a' = 0$ après les dérivations.

305. L'équation

$$\begin{array}{rl} 0 = & bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} \\ & - b'y + c'xy + d'x^2y + \text{etc.} \\ & - c''y^2 + d''xy^2 + \text{etc.} \\ & - d'''y^3 + \text{etc.} \\ & - \text{etc.}, \end{array} \qquad \ldots\ldots(1)$$

qui ne diffère de (1) du n.° 300 que dans les signes de b', c'', d''', e^{IV}, etc., étant proposée; on demande l'expression en y de ψx, ou plutôt de $\psi(\frac{x}{y})$, en supposant même que cette fonction ne puisse pas être développée suivant les puissances de x.

Je mets l'équation (1) sous cette forme :

$$xy^{-1} = (b' + c''y + d'''y^2 + \text{etc.}).\left\{\begin{array}{r} b + cx + dx^2 + \text{etc.} \\ + c'y + d'xy + \text{etc.} \\ + d''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}^{-1}, \quad \ldots(2)$$

et en prenant de part et d'autre la fonction ψ, j'ai, b' ne variant que selon D',

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$\begin{aligned}
\psi(b'b^{-1}) &+ \mathrm{D}.\psi(b'b^{-1}).x + \mathfrak{D}^2.\psi(b'b^{-1}).x^2 + \text{etc.} \\
&+ \mathrm{D}'.\psi(b'b^{-1}).y + \mathrm{D}'.\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1}).xy + \text{etc.} \\
&+ \mathfrak{D}'^2.\psi(b'b^{-1}).y^2 + \text{etc.} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned} \quad \ldots.(3)$$

Je compare ce second membre avec la série (I) du n.° 293, et avec l'équation (II) du même numéro l'équation (3) du n.° 300, en y changeant les signes de b', c'', d''', etc., ce qui donne $\pi = 1$; et l'on a, par le théorème du n.° 295,

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) = \quad \ldots..(\mathrm{f})$$

$$\psi(b'b^{-1}) \begin{array}{l} + \mathrm{D}'.\psi(b'b^{-1}) \\ + b'b^{-1}\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1}) \end{array}\Bigg| y \quad \begin{array}{l} + \mathfrak{D}'^2.\psi(b'b^{-1}) \\ + \mathrm{D}'.\{b'b^{-1}.\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1})\} \\ + \tfrac{1}{2}b'^2\mathrm{D}.(b^{-2}.\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1})) \end{array}\Bigg| y^2 \quad \begin{array}{l} + \mathfrak{D}'^3.\psi(b'b^{-1}) \\ + \mathfrak{D}'^2.\{b'b^{-1}\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1})\} \\ + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}'.\{b'^2\mathrm{D}.(b^{-2}\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1})\} \\ + \tfrac{1}{3}b'^3\mathfrak{D}^2.(b^{-3}\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1})) \end{array}\Bigg| y^3 + \text{etc.}$$

En développant on observera que, dans $\psi(b'b^{-1})$, b' et b sont indépendans l'un de l'autre, et que b' n'a point de dérivée par rapport à D sans accent.

306. Exemples. 1.° Supposons que dans le cas présent on veuille avoir la valeur en y de x^k, puissance quelconque de x.

Je ferai $\psi(xy^{-1}) = x^k y^{-k}$, $\psi(b'b^{-1}) = b'^k.b^{-k}$, ce qui donne $b^{-n}\mathrm{D}.\psi(b'b^{-1}) = -\, b'^k.k b^{-n-k-1}\mathrm{D}.b = b'^k.\dfrac{k}{k+n}\mathrm{D}.b^{-k-n}$, à cause que b' n'a point de dérivée suivant D; donc la formule (f) devient, en multipliant tout par y^k,

$$x^k = \quad \ldots..(\mathrm{g})$$

$$b'^k b^{-k}.y^k \begin{array}{l} + \mathrm{D}'.(b'^k b^{-k}) \\ + b'^{k+1}\dfrac{k}{k+1}\mathrm{D}.b^{-k-1} \end{array}\Bigg| y^{k+1} \quad \begin{array}{l} + \mathfrak{D}'^2.(b'^k b^{-k}) \\ + \mathrm{D}'.(b'^{k+1}\dfrac{k}{k+1}\mathrm{D}.b^{-k-1}) \\ + b'^{k+2}\dfrac{k}{k+2}\mathfrak{D}^2.b^{-k-2} \end{array}\Bigg| y^{k+2}$$

$$\begin{array}{l} + \mathfrak{D}'^3.(b'^k b^{-k}) \\ + \mathfrak{D}'^2.(b'^{k+2}\dfrac{k}{k+1}\mathrm{D}.b^{-k-1}) \\ + \mathrm{D}'.(b'^{k+2}\dfrac{k}{k+2}\mathfrak{D}^2.b^{-k-2}) \\ + b'^{k+3}\dfrac{k}{k+3}\mathfrak{D}^3.b^{-k-3} \end{array}\Bigg| y^{k+3} \quad + \text{etc.}$$

2.° Dans la même hypothèse on demande $\log x$.

On fera $\psi(xy^{-1}) = \log(xy^{-1}) = \log x - \log y$, $\psi(b'b^{-1}) = \log(b'b^{-1})$; donc $\mathrm{D}.\log(b'b^{-1}) = b^{-1}\mathrm{D}.b$, $\frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(b^{-n}\mathrm{D}.\log(b'b^{-1}))$ devient $\frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n}.b^{-n}$, et la série sera

$$\log x = \qquad\qquad \ldots\ldots(\mathfrak{h})$$

$$\log(b'b^{-1}y) + \left.\begin{array}{r} \mathrm{D}'.\log(b'b^{-1}) \\ + b'\mathrm{D}.b^{-1} \end{array}\right| y + \left.\begin{array}{r} \mathfrak{D}'^{2}.\log(b'b^{-1}) \\ + \mathrm{D}'.(b'\mathrm{D}.b^{-1}) \\ + \frac{1}{2}b'^{2}\mathfrak{D}^{2}.b^{-2} \end{array}\right| y^{2} + \left.\begin{array}{r} \mathfrak{D}'^{3}.\log(b'b^{-1}) \\ + \mathfrak{D}'^{2}.(b'\mathrm{D}.b^{-1}) \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}'.(b'^{2}\mathfrak{D}^{2}.b^{-2}) \\ + \frac{1}{3}b'^{3}\mathfrak{D}^{3}.b^{-3} \end{array}\right| y^{3} + \text{etc.}$$

307. Dans le cas de Moivre, les formules précédentes pour x^k et $\log x$ deviennent

$$x^k = \qquad\qquad \ldots\ldots(\mathrm{i})$$

$$b^{-k}\beta'^{k}.y^{k} + \left.\begin{array}{r} b^{-k}\mathrm{D}'.\beta'^{k} \\ + \frac{k}{k+1}\mathrm{D}.b^{-k-1}.\beta'^{k+1} \end{array}\right| y^{k+1} + \left.\begin{array}{r} b^{-k}\mathfrak{D}'^{2}.\beta'^{k} \\ + \frac{k}{k+1}\mathrm{D}.b^{-k-1}.\mathrm{D}'.\beta'^{k+1} \\ + \frac{k}{k+2}\mathfrak{D}^{2}.b^{-k-2}.\beta'^{k+2} \end{array}\right| y^{k+2} + \text{etc.}$$

$$\log x = \qquad\qquad \ldots\ldots(\mathfrak{k})$$

$$\log(b^{-1}\beta'y) + \left.\begin{array}{r} \mathrm{D}'.\log\beta' \\ + \mathrm{D}.b^{-1}.\beta' \end{array}\right| y + \left.\begin{array}{r} \mathfrak{D}'^{2}.\log\beta' \\ + \mathrm{D}.b^{-1}\mathrm{D}'.\beta' \\ + \frac{1}{2}\mathfrak{D}^{2}.b^{-2}.\beta'^{2} \end{array}\right| y^{2} + \left.\begin{array}{r} \mathfrak{D}'^{3}.\log\beta' \\ + \mathrm{D}.b^{-1}.\mathfrak{D}'^{2}.\beta' \\ + \frac{1}{2}\mathfrak{D}^{2}.b^{-2}.\mathrm{D}'.\beta'^{2} \\ + \frac{1}{3}\mathfrak{D}^{3}.b^{-3}.\beta'^{3} \end{array}\right| y^{3} + \text{etc.}$$

---

308. Étant proposée l'équation suivante

$$\beta x^{p} + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \varepsilon x^{p+3q} + \text{etc.} = \beta' y^{k} + \gamma'' y^{k+l} + \delta''' y^{k+2l} + \varepsilon^{IV} y^{k+3l} + \text{etc.},$$

on demande à exprimer en y une fonction de x.

Je représente par $\mathfrak{y}$ tout le second membre de l'équation proposée, ce qui ramène ce cas à celui du n.° 275; puis, ayant mis à la place de $\mathfrak{y}$ sa valeur dans la formule (g) ou dans la formule (h), on développera chaque terme en une série en y. Prenons des exemples pour éclaircir le procédé.

1.° Supposons qu'on demande x^r.

La formule (i) n.° 276 donne, en y faisant $\alpha = \mathfrak{y}$, mettant au lieu de $\mathfrak{y}$ sa valeur

valeur et développant chaque terme en une série en y,

$$x^r = \qquad\qquad \ldots\ldots(l)$$

$$\begin{aligned}
&\beta^{-\frac{r}{p}}.\beta'^{\frac{r}{p}}.y^{\frac{kr}{p}} + \beta^{-\frac{r}{p}}.\mathrm{D}'.\beta'^{\frac{r}{p}}.y^{\frac{kr}{p}+l} + \beta^{-\frac{r}{p}}\mathfrak{D}'^2.\beta'^{\frac{r}{p}}.y^{\frac{kr}{p}+2l} + \text{etc.}\\
&+\frac{r}{r+q}\mathrm{D}.\beta^{-\frac{r+q}{p}}.\beta'^{\frac{r+q}{p}}.y^{\frac{k(r+q)}{p}} + \frac{r}{r+q}\mathrm{D}.\beta^{-\frac{r+q}{p}}.\mathrm{D}'.\beta'^{\frac{r+q}{p}}.y^{\frac{k(r+q)}{p}+l} + \text{etc.}\\
&+\frac{r}{r+2q}\mathfrak{D}^2.\beta^{-\frac{r+2q}{p}}.\beta'^{\frac{r+2q}{p}}.y^{\frac{k(r+2q)}{p}} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi n'est pas difficile à saisir. Cet exemple fait le sujet d'un mémoire du Professeur HINDENBURG, qui a pour titre : *Problema solutum maxime universale ad serierum reversionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam paralipomenon*, Leipzig 1793.

2.° Supposons maintenant qu'on demande $\log x$.

La formule générale pour $\log x$ du n.° 277 donne, en faisant $\alpha = \mathfrak{y}$, observant que $\log(\beta^{-1:p}.\mathfrak{y}^{1:p}) = \log(\beta^{-1:p}) + \log(\mathfrak{y}^{1:p})$, puis mettant partout au lieu de $\mathfrak{y}$ sa valeur et développant suivant y,

$$\log x = \qquad\qquad \ldots\ldots(m)$$

$$\begin{aligned}
&\log(\beta^{-\frac{1}{p}}\beta'^{\frac{1}{p}}.y^{\frac{k}{p}}) + \mathrm{D}'.\log\beta'^{\frac{1}{p}}.y^{l} + \mathfrak{D}'^2.\log\beta'^{\frac{1}{p}}.y^{2l} + \mathfrak{D}'^3.\log\beta'^{\frac{1}{p}}.y^{3l} + \text{etc.}\\
&+\frac{1}{q}\mathrm{D}.\beta^{-\frac{q}{p}}.\beta'^{\frac{q}{p}}.y^{\frac{kq}{p}} + \frac{1}{q}\mathrm{D}.\beta^{-\frac{q}{p}}.\mathrm{D}'.\beta'^{\frac{q}{p}}.y^{\frac{kq}{p}+l} + \frac{1}{q}\mathrm{D}.\beta^{-\frac{q}{p}}.\mathfrak{D}'^2.\beta'^{\frac{q}{p}}.y^{\frac{kq}{p}+2l} + \text{etc.}\\
&+\frac{1}{2q}\mathfrak{D}^2.\beta^{-\frac{2q}{p}}.\beta'^{\frac{2q}{p}}.y^{\frac{2kq}{p}} + \frac{1}{2q}\mathfrak{D}^2.\beta^{-\frac{2q}{p}}.\mathrm{D}'.\beta'^{\frac{2q}{p}}.y^{\frac{2kq}{p}+l} + \text{etc.}\\
&+\frac{1}{3q}\mathfrak{D}^3.\beta^{-\frac{3q}{p}}.\beta'^{\frac{3q}{p}}.y^{\frac{3kq}{p}} + \text{etc.}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

---

309. Dans l'équation (1) du n.° 300 le terme sans x et y manque ; soit donc à présent l'équation complette d'un ordre quelconque

$$\left.\begin{aligned}
a + bx + cx^2 &+ \text{etc.}\\
+ b'y + c'xy &+ \text{etc.}\\
+ c''y^2 &+ \text{etc.}\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}\right\} = 0; \qquad\qquad \ldots\ldots(1)$$

on propose de transformer, en une série sans x, la série double

$$\begin{array}{rl} A + Bx + Cx^2 & + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy & + \text{etc.} \\ + C''y^2 & + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots (2)$$

Je mets l'équation proposée sous cette forme

$$x\left\{\begin{array}{r} b + cx + dx^2 + \text{etc.} \\ + c'y + d'xy + \text{etc.} \\ + d''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = -(a + b'y + c''y^2 + d'''y^3 + \text{etc.}). \quad \ldots\ldots (3)$$

Comparant avec le théorème du n.° 295, tout de même que n.° 300, j'ai $r = 1$, $s = 1$; mais de plus je fais $\pi = -y^{-1}$, et $\beta' = a$, $\gamma'' = b'$, $\delta''' = c''$, etc., et la formule (VI) du théorème donne

$$\left.\begin{array}{r} A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + \text{etc.} \\ + C''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \quad \ldots\ldots (n)$$

$$\begin{array}{llll} A & + \mathrm{D}'.A.y & + \mathrm{D}'^2.A.y^2 & + \mathrm{D}'^3.A.y^3 + \text{etc.} \\ -a.b^{-1}.\mathrm{D}.A & -\mathrm{D}'.\{a.b^{-1}.\mathrm{D}.A\}.y & -\mathrm{D}'^2.\{a.b^{-1}\mathrm{D}.A\}.y^2 & - \text{etc.} \\ & +\tfrac{1}{2}a^2\mathrm{D}.(b^{-2}.\mathrm{D}.A) & +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}'.\{a^2\mathrm{D}.(b^{-2}.\mathrm{D}.A)\}.y & + \text{etc.} \\ & & -\tfrac{1}{3}a^3\mathrm{D}^2.(b^{-3}\mathrm{D}.A) & - \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.}, \end{array}$$

formule qui, quoiqu'elle ne soit pas ordonnée suivant les puissances de y, présente une loi fort simple : si on vouloit l'ordonner suivant les puissances de y, il n'y auroit qu'à écrire de suite les lignes obliques en commençant par celle sans y, alors chaque coëfficient formeroit une série infinie. Le terme général se conclud aisément de la loi des termes.

510. Voici à présent un problème très-général. Soit l'équation

$$\varphi\left\{\begin{array}{r} a + bx + cx^2 + \text{etc.} \\ + by + c'xy + \text{etc.} \\ + c''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \psi\left\{\begin{array}{r} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} \\ + \beta'y + \gamma'xy + \text{etc.} \\ + \gamma''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots (4)$$

on demande la valeur en y et sans x de la fonction

$$\mathrm{F}\left\{\begin{array}{r} A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + \text{etc.} \\ + C''y^2 + \text{etc.} \end{array}\right\}. \quad \ldots\ldots(5)$$

La solution se déduit facilement de celle du problème précédent; car, en développant l'équation proposée et en transposant, on a

$$x\left\{\begin{array}{r} \mathrm{D}.\phi a - \mathrm{D}.\psi\alpha + (\mathrm{D}^2.\phi a - \mathrm{D}^2.\psi\alpha).x + (\mathrm{D}^3.\phi a - \mathrm{D}^3.\psi\alpha).x^2 + \text{etc.} \\ + (\mathrm{D}'.\mathrm{D}.\phi a - \mathrm{D}'.\mathrm{D}.\psi\alpha).y + (\mathrm{D}'.\mathrm{D}^2\phi a - \mathrm{D}'.\mathrm{D}^2.\psi\alpha).xy + \text{etc.} \\ + (\mathrm{D}'^2.\mathrm{D}.\phi a - \mathrm{D}'^2.\mathrm{D}.\psi\alpha).y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$-\{(\phi a - \psi\alpha) + (\mathrm{D}'.\phi a - \mathrm{D}'.\psi\alpha).y + (\mathrm{D}'^2.\phi a - \mathrm{D}'^2.\psi\alpha).y^2 + \text{etc.}\}. \quad \ldots(6)$$

De plus, la fonction (5) devient

$$\begin{array}{r} \mathrm{F}A + \mathrm{D}.\mathrm{F}A.x + \mathrm{D}^2.\mathrm{F}A.x^2 + \text{etc.} \\ + \mathrm{D}'.\mathrm{F}A.y + \mathrm{D}'.\mathrm{D}.\mathrm{F}A.xy + \text{etc.} \\ + \mathrm{D}'^2.\mathrm{F}A.y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \quad \ldots\ldots(7)$$

Comparant avec (3) et (2) du numéro précédent, on voit qu'il suffit de mettre $\mathrm{F}A$ au lieu de A, $\phi a - \psi\alpha$ au lieu de a, $\mathrm{D}.\phi a - \mathrm{D}.\psi\alpha$ au lieu de b, et ainsi du reste, et de considérer les expressions $\mathrm{D}.\phi a - \mathrm{D}.\psi\alpha$ et $\phi a - \psi\alpha$, chacune comme un premier terme dans les dérivations; la formule (n) donnera la série demandée.

311. Les cas des séries simples ne sont que des cas particuliers de ceux des séries doubles; on peut donc déduire de la solution précédente celle du cas suivant, qui est très-général : mais il est encore plus simple de la déduire du n.° 295 ou du n.° 299; elle se tire aussi très-facilement du n.° 257.

Soit $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$, $\quad \ldots\ldots\ldots(8)$

on demande à convertir

$$\mathrm{F}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) \quad \ldots\ldots\ldots(9)$$

en une série dans laquelle entrent ϕy et ses puissances, sans x.

On aura, en prenant la fonction ϕ des deux membres de (8),

$$x(\mathrm{D}.\phi a + \mathrm{D}^2.\phi a.x + \mathrm{D}^3.\phi a.x^2 + \text{etc.}) = \phi y - \phi a. \quad \ldots.(10)$$

Je compare cette équation avec l'équation (II) n.° 293; j'aurai $r = 1$, $s = 1$, $b = \mathrm{D}.\varphi a$ (qu'il faut prendre pour un premier terme dans les dérivations), $\pi = (\varphi y - \varphi a)y^{-1}$, $\beta' = 1$, et γ'', δ''', etc. $= 0$; de plus $A = \mathrm{F}A$: et l'on voit que tout ce qui est affecté de D' dans la formule (VI) du n.° 295 en doit disparoître; ainsi cette formule donnera

$$\mathrm{F}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) = \qquad \ldots\ldots(o)$$

$$\mathrm{F}A + (\mathrm{D}.\varphi a)^{-1}.\mathrm{D}.\mathrm{F}A.(\varphi y - \varphi a) + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{D}.\varphi a)^{-2}.\mathrm{D}.\mathrm{F}A\}.(\varphi y - \varphi a)^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{D}.\varphi a)^{-3}.\mathrm{D}.\mathrm{F}A\}.(\varphi y - \varphi a)^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.\{(\mathrm{D}.\varphi a)^{-n}.\mathrm{D}.\mathrm{F}A\}.(\varphi y - \varphi a)^n + \text{etc.}$$

Si on vouloit que la série fût ordonnée suivant les puissances de φy, alors chaque terme deviendroit une série infinie; il suffit, pour donner cette forme à la série (o), de développer $(\varphi y - \varphi a)^2$, $(\varphi y - \varphi a)^3$, etc., $(\varphi y - \varphi a)^n$, etc. par la règle du binome. Comparez avec le n.° 286.

---

312. Tirons encore du théorème du n.° 295 deux autres théorèmes, dont l'un en est pour ainsi dire le pendant, et l'autre en est une généralisation.

Étant proposée la même série double (I) qu'au n.° 293, savoir

$$\begin{matrix} A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + \text{etc.} \\ + C''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.}, \end{matrix} \qquad \ldots\ldots(1)$$

mais, au lieu de l'équation (II), l'équation suivante

$$x\{b + cx + dx^2 + ex^3 + \text{etc.}\}^r = \pi y \begin{Bmatrix} \beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \text{etc.} \\ + \gamma'' y + \delta'' xy + \text{etc.} \\ + \delta''' y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{Bmatrix}^s; \qquad \ldots(2)$$

transformer la série (1) en une série sans x et ordonnée suivant les puissances de y.

Pour ramener l'équation (2) à la forme de l'équation (II) du n.° 293, je divise les deux membres par la quantité qui multiplie πy dans le second, ce qui donne

$$x\{b + cx + dx^2 + \text{etc.}\}^r \begin{Bmatrix} \beta' + \gamma' x + \delta' x^2 + \text{etc.} \\ + \gamma'' y + \delta'' xy + \text{etc.} \\ + \delta''' y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{Bmatrix}^{-s} = \pi y,$$

ou,

ou, en développant et faisant attention qu'ici b n'a point de dérivées suivant D', et qu'ainsi il faut toujours mettre b et b^r hors du signe D',

$$x\left\{\begin{array}{r} b^r.\zeta'^{-s} + \mathrm{D}.(b^r.\zeta'^{-s}).x + \mathrm{D}^2.(b^r.\zeta'^{-s}).x^2 + \text{etc.} \\ + b^r\mathrm{D}'.\zeta'^{-s}.y + \mathrm{D}.(b^r\mathrm{D}'.\zeta'^{-s}).xy + \text{etc.} \\ + b^r\mathrm{D}'^2.\zeta'^{-s}.y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \pi y. \quad \ldots(3)$$

Je compare à présent cette équation (3) avec l'équation (II) du n.° 293, et je vois que ces deux équations coïncident si l'on fait dans celle-ci $r = 1$, $s = 0$, $\zeta' = 1$, et qu'on change b en $b^r\zeta'^{-s}$: ainsi la formule (VI) du n.° 295 donne sur-le-champ la suivante, en mettant partout b hors du signe D',

$$\left.\begin{array}{r} A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \\ + B'y + C'xy + \text{etc.} \\ + C''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$A \quad \begin{array}{r|l} + \mathrm{D}'.A & y \\ + b^{-r}.\zeta'^{s}.\mathrm{D}.A.\pi & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} + \mathrm{D}'^2.A & y^2 \\ + b^{-r}\mathrm{D}'.(\zeta'^{s}\mathrm{D}.A).\pi & \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\{b^{-2r}.\zeta'^{2s}.\mathrm{D}.A\}.\pi^2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} + \mathrm{D}'^3.A & y^3 \\ + b^{-r}\mathrm{D}'^2.(\zeta'^{s}\mathrm{D}.A).\pi & \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\{b^{-2r}\mathrm{D}'.(\zeta'^{2s}.\mathrm{D}.A)\}.\pi^2 & \\ + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{b^{-3r}.\zeta'^{3s}.\mathrm{D}A\}.\pi^3 & \end{array} + \text{etc.}$$

(ν)....

Le théorème que présente cette formule est aussi général que celui du n.° 295. On voit qu'il règne entre ces deux théorèmes une sorte de réciprocité symétrique : ici ζ' a des dérivées selon D et D', et b n'en a que selon D; là b a des dérivées selon D et D', et ζ' n'en a que selon D'.

313. Si l'équation est

$$x\left\{\begin{array}{r} b + cx + dx^2 + \text{etc.} \\ + c'y + d'xy + \text{etc.} \\ + d''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}^r = \pi y\left\{\begin{array}{r} \zeta' + \gamma'x + \delta'x^2 + \text{etc.} \\ + \gamma''y + \delta''xy + \text{etc.} \\ + \delta'''y^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}^s, \quad \ldots(4)$$

et la série à transformer la même que la série (1) du numéro précédent; dans ce cas, ζ' et b ont chacun des dérivées tant selon D que selon D'; et par une analyse semblable à la précédente, on conclud du théorème du n.° 295 le suivant, plus général :

$$\left.\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \\ \quad + B'y + C'xy + \text{etc.} \\ \qquad + C''y^2 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \quad + \text{D}'.\mathcal{A} \\ + b^{-r}.\beta'^{s}.\text{D}.\mathcal{A}.\pi \end{array}\left|\, y \quad \begin{array}{l} \quad + \mathfrak{D}'^2.\mathcal{A} \\ + \text{D}'.(b^{-r}.\beta'^{s}.\text{D}.\mathcal{A}).\pi \\ + \tfrac{1}{2}\text{D}.\{b^{-2r}.\beta'^{2s}.\text{D}.\mathcal{A}\}.\pi^2 \end{array}\right|\, y^2 \quad \begin{array}{l} \quad + \mathfrak{D}'^3.\mathcal{A} \\ + \mathfrak{D}'^2.(b^{-r}.\beta'^{s}\text{D}.\mathcal{A}).\pi \\ + \tfrac{1}{2}\text{D}.\text{D}'.(b^{-2r}.\beta'^{2s}.\text{D}.\mathcal{A}).\pi^2 \\ + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(b^{-3r}.\beta'^{3s}\text{D}.\mathcal{A}).\pi^3 \end{array}\left|\, y^3 \quad + \text{etc.},\right.$$

(q).....

formule dans laquelle b et β', ainsi que $\mathcal{A}$, entrent également sous les signes D et D'. Au reste, b et β' sont toujours des premiers termes, et $\text{D}.\mathcal{A}$ est un second terme. Cette formule comprend comme des cas particuliers celles des n.os 295 et 312.

314. Venons au retour des fonctions. On peut proposer, pour les fonctions à deux quantités, différens cas plus ou moins étendus, analogues à ceux des n.os 278, 279, 280, 282; arrêtons-nous seulement à une extension du cas du n.o 282.

Étant donnée l'équation

$$t = a + y\varphi(t,y), \quad \text{ou bien } \frac{t-a}{\varphi(t,y)} = y, \qquad \ldots\ldots(1)$$

$\varphi(t,y)$ étant une fonction quelconque de t et de y; trouver la valeur de ψt, fonction quelconque de t, par une série sans t, ordonnée suivant les puissances de y.

Je fais $t = a + x$, et je mets $a' + y$ au lieu de y dans le dénominateur de (1), et après les développemens je ferai $a' = 0$; de cette manière j'ai.

$$\frac{x}{\varphi(a+x, a'+y)} = y\ldots(2), \text{ et } \psi t = \psi(a+x); \qquad \ldots\ldots(3)$$

et, en développant le dénominateur de l'équation (2),

$$x\left\{\begin{array}{l} \varphi(a,a') + \text{D}\varphi(a,a').x + \mathfrak{D}^2\varphi(a,a').x^2 + \text{etc.} \\ \quad + \text{D}'\varphi(a,a').y + \text{D}'\text{D}\varphi(a,a').xy + \text{etc.} \\ \qquad + \mathfrak{D}'^2\varphi(a,a').y^2 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \text{etc.} \end{array}\right\}^{-1} = y. \quad \ldots(4)$$

Les signes D et D' indiquent des dérivations différentes, D en faisant varier a seul dans $\varphi(a,a')$, et D' en faisant varier a' seul; $\text{D}a = 1$, et $\text{D}'a' = 1$. De plus,

$$\psi t = \psi a + \text{D}\psi a.x + \text{D}^2\psi a.x^2 + \text{D}^3\psi a.x^3 + \text{etc.} \qquad \ldots.(5)$$

Je compare l'équation (4) avec (II) du n.° 293, ce qui donne $r = -1$, $b = \phi(a,a')$, $s = 0$, $\pi = 1$, $\mathfrak{C}' = 1$; je compare aussi le second membre de (5) avec la série $A + Bx + Cx^2 +$ etc. du corollaire II n.° 297, et, en observant ce qui a été dit dans ce corollaire, le théorème du n.° 295 donne

$$\psi t = \qquad \ldots..(\mathfrak{A})$$

$$\psi a + \text{D}\psi a.\phi(a,a').y \quad \begin{array}{l|l} + \text{D}\psi a.\text{D}'\phi(a,a') & \\ + \frac{1}{2}\text{D}\{\text{D}\psi a.[\phi(a,a')]^2\} & \end{array} y^2 \quad \begin{array}{l|l} + \text{D}\psi a.\text{D}'^2\phi(a,a') & \\ + \frac{1}{2}\text{D}\{\text{D}\psi a.\text{D}'[\phi(a,a')]^2\} & \\ + \frac{1}{3}\text{D}^2\{\text{D}\psi a.[\phi(a,a')]^3\} & \end{array} y^3$$

$$\begin{array}{l|l} + \text{D}\psi a.\text{D}'^3\phi(a,a') & \\ + \frac{1}{2}\text{D}\{\text{D}\psi a.\text{D}'^2[\phi(a,a')]^2\} & \\ + \frac{1}{3}\text{D}^2\{\text{D}\psi a.\text{D}'[\phi(a,a')]^3\} & \\ + \frac{1}{4}\text{D}^3\{\text{D}\psi a.[\phi(a,a')]^4\} & \end{array} y^4 \quad + \text{etc.}$$

On aura soin de faire $a' = 0$ après les dérivations effectuées.

315. Si l'équation proposée n'avoit pas de y devant ϕ, si elle étoit

$$t = a + \phi(t,y), \quad \text{ou} \quad \frac{t-a}{\phi(t,y)} = 1; \qquad \ldots..(6)$$

alors, tout demeurant comme précédemment, il suffiroit de faire $\pi = y^{-1}$, et en mettant, pour abréger, Θ au lieu de $\phi(a,a')$, la série seroit

$$\psi t = \qquad \ldots..(\mathfrak{B})$$

$$\begin{array}{llllll} \psi a + \text{D}\psi a.\Theta & + \text{D}\psi a.\text{D}'\Theta.y & + \text{D}\psi a.\text{D}'^2\Theta.y^2 & + \text{D}\psi a.\text{D}'^3\Theta.y^3 & + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{2}\text{D}(\text{D}\psi a.\Theta^2) & + \frac{1}{2}\text{D}(\text{D}\psi a.\text{D}'\Theta^2).y & + \frac{1}{2}\text{D}(\text{D}\psi a.\text{D}'^2\Theta^2).y^2 & + \text{etc.} \\ & & + \frac{1}{3}\text{D}^2(\text{D}\psi a.\Theta^3) & + \frac{1}{3}\text{D}^2(\text{D}\psi a.\text{D}'\Theta^3).y & + \text{etc.} \\ & & & + \frac{1}{4}\text{D}^3(\text{D}\psi a.\Theta^4) & + \text{etc.} \\ & & & & + \text{etc.}, \end{array}$$

expression qui, quoique non ordonnée suivant les puissances de y, présente cependant une loi fort facile à saisir.

316. Étant donnée l'équation $t = \text{F}(p, t, y)$, dont le second membre est une fonction quelconque de p, t, y, qui devient fonction de p seul lorsque $y = 0$; trouver la valeur de t, et même d'une fonction ψt de t en p et y, par une série ordonnée suivant les puissances de y.

C'est le cas de Cousin, dont il a publié une solution, pour la première fois dans les *mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année* 1783, pages 661 et suivantes, ensuite à la fin de son *Introduction à l'Astronomie physique*, et encore au n.° 592 de son *traité de Calcul différentiel et intégral*, Paris, an 4.e. La solution que nous allons donner en diffère à plusieurs égards(*).

Puisque $F(p, t, y)$ devient fonction de p seul lorsque $y = 0$, il faut que cette fonction soit de la forme $P + y\phi(p, t, y)$, P étant ce qu'elle devient lorsque $y = 0$, et l'autre partie $y\phi(p, t, y)$ étant affectée de y hors du signe ϕ, c'est-à-dire, tous les termes qui n'entrent pas dans P étant multipliés par y, afin qu'ils disparoissent quand on fait $y = 0$. L'équation proposée devient donc

$$t = P + y\phi(p, t, y), \text{ ou bien } \frac{t - P}{\phi(p, t, y)} = y. \quad \ldots\ldots(7)$$

Je fais $t = P + x$, et je mets $a' + y$ au lieu de y dans le dénominateur de (7), et après les dérivations effectuées je ferai $a' = 0$; de cette manière l'équation (7) et la fonction cherchée ψt deviennent

$$\frac{x}{\phi(p, P + x, a' + y)} = y \ldots\ldots(8), \qquad \psi t = \psi(P + x). \quad \ldots\ldots(9)$$

Pour développer on regardera p comme invariable, P et a' comme variables, mais P ne variant que par rapport à D, et a' que par rapport à D', DP étant $= 1$, et D'$a' = 1$.

Comparant les équations (8) et (9) avec (2) et (3) du n.° 314, on voit qu'ici P remplace a, et qu'au reste les équations sont de même forme; d'où il s'ensuit, qu'en mettant, pour abréger, Q au lieu de $\phi(p, P, a')$, on a par la formule ($\mathfrak{A}$),

$$\psi t = \quad \ldots\ldots(\mathfrak{C})$$

$$\psi P + D\psi P.Q.y \begin{array}{l} + D\psi P.D'Q \\ + \tfrac{1}{2}D(D\psi P.Q^2) \end{array}\Bigg| y^2 \begin{array}{l} + D\psi P.D'^2Q \\ + \tfrac{1}{2}D(D\psi P.D'Q^2) \\ + \tfrac{1}{3}D^2(D\psi P.Q^3) \end{array}\Bigg| y^3 \begin{array}{l} + D\psi P.D'^3Q \\ + \tfrac{1}{2}D(D\psi P.D'^2Q^2) \\ + \tfrac{1}{3}D^2(D\psi P.D'Q^3) \\ + \tfrac{1}{4}D^3(D\psi P.Q^4) \end{array}\Bigg| y^4 + \text{etc.}$$

On effectuera les dérivations D et D' comme nous l'avons indiqué ci-dessus; puis on fera $a' = 0$.

(*) Il y a long-temps que j'ai trouvé cette solution; mais je m'aperçois, au moment de livrer la feuille à l'impression, que le Professeur Pfaff, un des meilleurs Géomètres de l'Allemagne, a tiré du théorème de Lagrange, n.° 282, une solution peu différente de la mienne. Voyez page 338 du premier volume de ses *Disquisitiones analyticæ*.

On

317. Soit proposée cette équation plus générale,

$$v = f\{P + y.\varphi(p, v, y)\}, \quad \ldots\ldots(10)$$

P étant fonction de p seul; on demande ψv en p et y, sans v.

On suppose, comme n.° 283, $t = P + y\varphi(p, v, y)$; substituant dans (10), on a $v = ft$, partant

$$\frac{t - P}{\varphi(p, ft, y)} = y \quad \ldots\ldots(11), \quad \text{et } \psi v = \psi ft, \quad \ldots\ldots(12)$$

ou, en faisant $t = P + x$, et mettant $a' + y$ au lieu de y dans le dénominateur de (11), sauf à faire $a' = 0$ après les dérivations, on a

$$\frac{x}{\varphi\{p, f(P + x), a' + y\}} = y \quad \ldots(13), \quad \psi v = \psi f(P + x). \quad \ldots(14)$$

En comparant (13) et (14) avec (8) et (9) ci-dessus, on voit que ce cas se ramène au précédent et qu'il est résolu par la formule (C), pourvu qu'on y mette fP au lieu de P, partant ψfP au lieu de ψP, et $\varphi(p, fP, a')$ au lieu de $\varphi(p, P, a') = Q$. $\text{D}P$ est toujours $= 1$: on prendra P pour la variable dans ψfP : dans les dérivations $\text{D}', Q = \varphi(p, fP, a')$ sera considéré comme fonction de a' dont la dérivée $\text{D}'a'$ est $= 1$; mais dans les dérivations D, Q sera considéré comme fonction de fP dont la dérivée est $\text{D}fP$; ainsi, mettant un point après D lorsqu'il se rapporte à Q, on fera $\text{D}.Q = \text{D}Q.\text{D}fP$, $\text{D}^2.Q = \text{D}Q.\text{D}^2 fP + \text{D}^2 Q.(\text{D}fP)^2$, etc.

---

318. Quelle que soit l'équation, $\varphi(t, u) = 0$, qui donne t en u, algébrique ou transcendante; on propose de trouver une série sans t, qui donne la valeur d'une fonction quelconque $F(t, u)$.

Ce problème général fait le sujet d'un mémoire de Lambert, inséré parmi ceux de l'Académie de Berlin pour 1770; mais la solution qu'il en donne me paroît laisser beaucoup à désirer.

Je fais $t = a + x$ et $u = a' + y$, a et a' étant des quantités quelconques; la fonction $F(t, u)$ devient

$$\begin{aligned} F(t,u) = F(a,a') &+ \text{D}F(a,a').x + \text{D}^2F(a,a').x^2 + \text{etc.} \\ &+ \text{D}'F(a,a').y + \text{DD}'F(a,a').xy + \text{etc.} \\ &\qquad + \text{D}'^2F(a,a').y^2 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + \text{etc.}; \end{aligned} \quad \ldots\ldots(1)$$

série qui a la même forme que la série (1) du n.° 293. Le signe D se rapporte à a et le signe D′ à a', $Da = 1$, et $D'a' = 1$. L'équation proposée $\varphi(t,u) = 0$ devient de la même manière

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(a,a') &+ D\varphi(a,a').x + D^2\varphi(a,a').x^2 + \text{etc.} \\ &+ D'\varphi(a,a').y + DD'\varphi(a,a').xy + \text{etc.} \\ &\qquad + D'^2\varphi(a,a').y^2 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + \text{etc.}; \end{aligned} \quad \ldots\ldots(2)$$

d'où l'on tire, en transposant,

$$x\left\{\begin{aligned} &D\varphi(a,a') + D^2\varphi(a,a').x + \text{etc.} \\ &\quad + DD'\varphi(a,a').y + \text{etc.} \\ &\qquad + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = -\{\varphi(a,a') + D'\varphi(a,a').y + D'^2\varphi(a,a').y^2 + \text{etc.}\}, \quad \ldots\ldots(3)$$

équation de la même forme que l'équation (II) du n.° 293. Comparant, on a $r = 1$, $s = 1$, $\pi = -y^{-1}$, $b = D\varphi(a,a')$, $\mathfrak{C}' = \varphi(a,a')$, $A = F(a,a')$. Ainsi l'équation (VI) du n.° 295 donne sur-le-champ la formule suivante :

$$\begin{aligned} F(t,u) = \; & \quad\ldots\ldots(\mathfrak{D}) \\ F(a,a') &+ D'F(a,a').y + D'^2F(a,a').y^2 \\ &- \varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a') - D'\{\varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a')\}.y \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}[\varphi(a,a')]^2.D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.DF(a,a')\} \\ &+ D'^3F(a,a').y^3 \\ &- D'^2\{\varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a')\}.y^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}D'\{[\varphi(a,a')]^2.D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.DF(a,a')\}\}.y \\ &- \tfrac{1}{3}[\varphi(a,a')]^3.D^2\{[D\varphi(a,a')]^{-3}.DF(a,a')\} \quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Dans cette série, $D\varphi(a,a')$ et $\varphi(a,a')$ sont des premiers termes, mais $DF(a,a')$ est un second terme : ainsi il faudra mettre $D^2\varphi(a,a')$, $D^3\varphi(a,a')$, etc. au lieu de $DD\varphi(a,a')$, $D^2D\varphi(a,a')$, etc. ; mais on écrira $2D^2F(a,a')$, $3D^3F(a,a')$, etc. au lieu de $DDF(a,a')$, $D^2DF(a,a')$, etc.

319. L'équation (2) du numéro précédent se met aussi sous cette forme :

$$(4)\ldots\ldots \quad x\{D\varphi(a,a') + D^2\varphi(a,a').x + \text{etc.}\} = -\left\{\begin{aligned} &\varphi(a,a') + D'\varphi(a,a').y + DD'\varphi(a,a').xy + \text{etc.} \\ &\qquad + D'^2\varphi(a,a').y^2 + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}\right\},$$

où $D\varphi(a,a')$ n'a que des dérivées D, et où $\varphi(a,a')$ n'a point de dérivées indiquées

par D seul, mais des dérivées D' et des dérivées affectées des deux signes D' et D. Comparant avec l'équation (a) du n.° 312, on aura $r = 1$, $b = \mathrm{D}\phi(a,a')$, $s = 1$, $\pi = -y^{-1}$, $\zeta' = \phi(a,a')$; et la formule (p) donnera la suivante :

$$
\begin{aligned}
F(t,u) = \; & \ldots\ldots(\mathfrak{E}) \\
F(a,a') \quad & + \mathrm{D}'F(a,a').y \quad + \mathrm{D}'^2F(a,a').y^2 \\
& - [\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-1}.\phi(a,a').\mathrm{D}F(a,a') \quad - [\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-1}.\mathrm{D}'\{\phi(a,a').\mathrm{D}F(a,a')\}.y \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}\{[(\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-2}.[\phi(a,a')]^2.\mathrm{D}F(a,a')\} \\
& + \mathrm{D}'^3F(a,a').y^3 \\
& - [\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-1}.\mathrm{D}'^2\{\phi(a,a').\mathrm{D}F(a,a')\}.y^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}\{[\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-2}.\mathrm{D}'\{[\phi(a,a')]^2.\mathrm{D}F(a,a')\}\}.y \quad + \text{etc.}; \\
& - \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2\{[\mathrm{D}\phi(a,a')]^{-3}.[\phi(a,a')]^3.\mathrm{D}F(a,a')\}
\end{aligned}
$$

série dans laquelle $\mathrm{D}\phi(a,a')$, $\phi(a,a')$ et $F(a,a')$, sont des premiers termes : mais en faisant les développemens on aura soin d'observer ce qui a été remarqué ci-dessus à l'égard des dérivées de $\mathrm{D}\phi(a,a')$ et de celles de $\phi(a,a')$, et la formule n'est vraie que sous ces conditions.

Telle est la solution du problème proposé lorsque a' et a sont des quantités quelconques, arbitraires, indépendantes l'une de l'autre. Mais si a' et a sont des quantités correspondantes, c'est-à-dire, $\phi(t,u) = 0$ étant l'équation d'une courbe, si a' est une valeur de l'abscisse et a la valeur de l'ordonnée correspondante; alors a n'est plus arbitraire, mais il est une des racines de l'équation $\phi(t,a') = 0$, et $\phi(a,a')$ est zéro. Nous allons voir ce que deviennent dans ce cas les formules ($\mathfrak{D}$) et ($\mathfrak{E}$).

320. Soit a' une valeur quelconque de u dans l'équation $\phi(t,u) = 0$, et a une des valeurs correspondantes de t, de manière que l'on ait aussi $\phi(a,a') = 0$; on demande l'expression sans t de $F(t,u)$.

Nous supposons ici que l'équation $\phi(t,a') = 0$ n'a qu'une seule de ses racines t égale à a; alors $\phi(a,a') = 0$, mais ni $\mathrm{D}\phi(a,a')$, ni $\mathrm{D}'\phi(a,a')$ ne sont plus zéro, et, en mettant $a + x$ et $a' + y$ à la place de t et de u, l'équation $0 = \phi(t,u)$ devient

$$
\begin{aligned}
0 = \; & \mathrm{D}\phi(a,a').x + \mathrm{D}^2\phi(a,a').x^2 + \text{etc.} \\
& + \mathrm{D}'\phi(a,a').y + \mathrm{DD}'\phi(a,a').xy + \text{etc.} \\
& + \mathrm{D}'^2\phi(a,a').y^2 + \text{etc.} \\
& + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

qu'on peut mettre sous l'une ou l'autre des formes suivantes, savoir :

$$x\left\{\begin{array}{r} D\varphi(a,a') + \mathfrak{D}^2\varphi(a,a').x + \text{etc.} \\ + DD'\varphi(a,a').y + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = -y\{D'\varphi(a,a') + \mathfrak{D}'^2\varphi(a,a').y + \mathfrak{D}'^3\varphi(a,a').y^2 + \text{etc.}\}, \quad \ldots\ldots(5)$$

ou bien

$$(6)\ldots\ldots \quad x\{D\varphi(a,a') + \mathfrak{D}^2\varphi(a,a').x + \mathfrak{D}^3\varphi(a,a').x^2 + \text{etc.}\} = -y\left\{\begin{array}{r} D'\varphi(a,a') + DD'\varphi(a,a').x + \text{etc.} \\ + \mathfrak{D}'^2\varphi(a,a').y + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

En comparant la première de ces équations avec l'équation (II) du n.° 293, on a $r = 1$, $s = 1$, $\pi = -1$, $b = D\varphi(a,a')$, $\mathfrak{C}' = D'\varphi(a,a')$, et la formule (VI) du n.° 295 donne

$$F(t,u) = \quad \ldots\ldots(\mathfrak{z})$$

$$F(a,a') \begin{array}{r} + D'F(a,a') \\ - D'\varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a') \end{array}\Bigg| y \begin{array}{r} + \mathfrak{D}'^2F(a,a') \\ - D'\{D'\varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a')\} \\ + \tfrac{1}{2}[D'\varphi(a,a')]^2.D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.DF(a,a')\} \end{array}\Bigg| y^2$$

$$\begin{array}{r} + \mathfrak{D}'^3F(a,a') \\ - \mathfrak{D}'^2\{D'\varphi(a,a').[D\varphi(a,a')]^{-1}.DF(a,a')\} \\ + \tfrac{1}{2}D'\{[D'\varphi(a,a')]^2.D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.DF(a,a')\}\} \\ - \tfrac{1}{3}[D'\varphi(a,a')]^3.\mathfrak{D}^2\{[D\varphi(a,a')]^{-3}.DF(a,a')\} \end{array}\Bigg| y^3 + \text{etc.};$$

série où $D'\varphi(a,a')$, $D\varphi(n,a')$, $F(a,a')$ sont des premiers termes, et qui est ordonnée suivant les puissances entières de y. Ici, par la formule même, $D'\varphi(a,a')$ n'a de dérivées que suivant D', tandis que $D\varphi(a,a')$ en a suivant D' et suivant D, ainsi que cela doit être en vertu de l'équation (5).

321. En comparant la seconde des équations précédentes, savoir (6), avec (2) du n.° 312, on aura $r = 1$, $s = 1$, $\pi = -1$, $b = D\varphi(a,a')$, $\mathfrak{C}' = D'\varphi(a,a')$, et la formule $(\mathfrak{p})$ du même numéro 312 donnera

$$F(t,u) = \quad \ldots\ldots(\mathfrak{G})$$

$$F(a,a') \begin{array}{r} + D'F(a,a') \\ - [D\varphi(a,a')]^{-1}.D'\varphi(a,a').DF(a,a') \end{array}\Bigg| y \begin{array}{r} + \mathfrak{D}'^2F(a,a') \\ - [D\varphi(a,a')]^{-1}.D'\{D'\varphi(a,a').DF(a,a')\} \\ + \tfrac{1}{2}D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.[D'\varphi(a,a')]^2.DF(a,a')\} \end{array}\Bigg| y^2$$

+

$$\left.\begin{array}{r} + \mathfrak{D}'^3 F(a,a') \\ - [D\varphi(a,a')]^{-1}.\mathfrak{D}'^2\{D'\varphi(a,a').DF(a,a')\} \\ +\tfrac{1}{2}D\{[D\varphi(a,a')]^{-2}.D'\{[D'\varphi(a,a')]^2.DF(a,a')\}\} \\ -\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2\{[D\varphi(a,a')]^{-3}.[D'\varphi(a,a')]^3.DF(a,a')\} \end{array}\right| y^3 + \text{etc.};$$

dans cette série $D\varphi(a,a')$, $D'\varphi(a,a')$ et $F(a,a')$ sont encore des premiers termes, et la série est également ordonnée suivant les puissances entières de y. Ici $D\varphi(a,a')$ n'a point de dérivées D', tandis que $D'\varphi(a,a')$ a des dérivées D et D'.

Quoique cette série (𝔊) diffère pour la forme de la série (𝔉), il est cependant aisé de s'assurer que ces deux séries coïncident, en développant les coëfficiens de y^2, y^3, y^4, etc.

322. Si, en supposant donnée l'équation $\varphi(t,u)=0$, on met, dans la formule (𝔉) ou (𝔊), t au lieu de a, u au lieu de a', Δt au lieu de x, Δu au lieu de y, et par conséquent $t+\Delta t$ et $u+\Delta u$ au lieu de t et de u; on aura pour la valeur de $F(t+\Delta t,\ u+\Delta u)$ une série régulière, dont la loi est aisée à saisir; elle sera sans Δt, et ordonnée suivant les puissances entières positives de Δu.

Dans le cas particulier, où étant donnée l'équation $\varphi(t,u)=0$, on demande $t+\Delta t$ en une série ordonnée suivant les puissances de Δu; $F(a,a')$ devenant $=t$ et $DF(a,a')=1$, on aura, par la formule (𝔊),

$$t+\Delta t = \quad \ldots\ldots(\mathfrak{H})$$

$$t - [D\varphi(t,u)]^{-1}.D'\varphi(t,u).\Delta u \quad \left.\begin{array}{r} - [D\varphi(t,u)]^{-1}.\mathfrak{D}'^2\varphi(t,u) \\ +\tfrac{1}{2}D\{[D\varphi(t,u)]^{-2}.[D'\varphi(t,u)]^2\} \end{array}\right|(\Delta u)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} - [D\varphi(t,u)]^{-1}.\mathfrak{D}'^3\varphi(t,u) \\ +\tfrac{1}{2}D\{[D\varphi(t,u)]^{-2}.D'[D'\varphi(t,u)]^2\} \\ -\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2\{[D\varphi(t,u)]^{-3}.[D'\varphi(t,u)]^3\} \end{array}\right|(\Delta u)^3 + \text{etc.}$$

Or, puisque l'on a l'équation $\varphi(t,u)=0$, qui donne t en u, il est clair que t est une fonction de u : on a donc aussi par le théorème de TAYLOR,

$$t+\Delta t = t + \frac{dt}{du}.\Delta u + \frac{d^2t}{1.2\,du^2}.(\Delta u)^2 + \frac{d^3t}{1.2.3\,du^3}.(\Delta u)^3 + \text{etc.}$$

On voit donc que les coëfficiens de la série (𝔋) donnent immédiatement les valeurs des différentielles $\frac{dt}{du}$, $\frac{d^2t}{du^2}$, $\frac{d^3t}{du^3}$, etc., et il est aisé de conclure de la loi qui y règne la valeur générale de $\frac{d^nt}{du^n}$: cette formule est utile dans le calcul

différentiel, où l'on n'a jusqu'à-présent trouvé les valeurs de $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}u^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}u^3}$, etc. que par des différentiations successives de l'équation $\varphi(t,u)=0$, et par les substitutions de ces valeurs les unes dans les autres, au lieu qu'ici on les a par des formules qui n'exigent aucune substitution, et dont la loi est manifeste.

323. Soit $\varphi(t,a')=0$ l'équation en laquelle se change la proposée $\varphi(t,u)=0$ lorsqu'on y fait $u=a'$; on suppose que $\varphi(t,a')=0$ a plusieurs racines t égales chacune à a, au nombre de k, et l'on demande l'expression de $\mathrm{F}(t,u)$, pour ce cas.

Puisque k est le nombre des racines t égales à a lorsque $u=a'$, $\varphi(t,a')$ aura cette forme $(t-a)^k f(t,a')$; ainsi, en mettant $a'+y$ au lieu de u dans l'équation $\varphi(t,u)=0$, elle deviendra

$$0=(t-a)^k f(t,a')+\mathrm{D}'\varphi(t,a')\,y+\mathrm{D}'^2\varphi(t,a').y^2+\text{etc.},$$

et il est visible par là, que si on met aussi $a+x$ à la place de t dans $\varphi(t,u)$, non-seulement $\varphi(a,a')$ sera zéro, mais encore $\mathrm{D}\varphi(a,a')$, $\mathrm{D}^2\varphi(a,a')$, $\mathrm{D}^3\varphi(a,a')$, etc.; $\mathrm{D}^{k-1}\varphi(a,a')$; et $\mathrm{D}^k\varphi(a,a')$ sera la première des dérivées selon D seul qui ne s'évanouisse pas : de plus, puisque D' fait varier a', $\mathrm{D}'\varphi(a,a')$ ne sera plus zéro en général, ni $\mathrm{DD}'\varphi(a,a')$, non plus que toutes les autres dérivées dans l'expression desquelles entre le signe D', ou seul ou accompagné de D.

De là il s'ensuit qu'en mettant à la fois $a+x$ et $a'+y$ au lieu de t et de u dans $\varphi(t,u)=0$, cette équation devient

$$\begin{array}{rl} 0= & \mathrm{D}^k\varphi(a,a').x^k+\mathrm{D}^{k+1}\varphi(a,a').x^{k+1}+\text{etc.} \\ & +\mathrm{D}'\varphi(a,a').y+\mathrm{DD}'\varphi(a,a').xy+\text{etc.} \\ & +\mathrm{D}'^2\varphi(a,a').y^2+\text{etc.} \\ & +\text{etc.}; \end{array}$$

équation qui donne, en transposant tout ce qui est affecté de y et en extrayant ensuite la racine $k^{\text{ième}}$,

$$x\{\mathrm{D}^k\varphi(a,a')+\mathrm{D}^{k+1}\varphi(a,a').x+\mathrm{D}^{k+2}\varphi(a,a').x^2+\text{etc.}\}^{\frac{1}{k}}=$$

$$(-1)^{\frac{1}{k}}.y^{\frac{1}{k}}\left\{\begin{array}{r} \mathrm{D}'\varphi(a,a')+\mathrm{DD}'\varphi(a,a').x+\mathrm{D}^2\mathrm{D}'\varphi(a,a').x^2+\text{etc.} \\ +\mathrm{D}'^2\varphi(a,a').y+\mathrm{DD}'^2\varphi(a,a').xy+\text{etc.} \\ +\mathrm{D}'^3\varphi(a,a').y^2+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}^{\frac{1}{k}}: \quad \ldots(7)$$

— 1 ayant k racines $k^{\text{ièmes}}$, je mets μ au lieu d'une de ces racines, et comparant avec l'équation (2) du n.° 312, j'ai $r=\frac{1}{k}$, $s=\frac{1}{k}$, $\pi=\mu y^{\frac{1}{k}-1}$, $b=\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')$, $\mathfrak{C}'=\mathrm{D}'\varphi(a,a')$. Substituant dans la formule (p) du même n.° 312, on en tire cette autre formule,

$$
\begin{aligned}
F(t,u) = F(a,a') & + \mathrm{D}'F(a,a').y \\
& + [\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{1}{k}}.[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{1}{k}}.\mathrm{D}F(a,a').\mu y^{\frac{1}{k}} \\
& + \underline{\mathrm{D}}'^2F(a,a').y^2 \\
& + [\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{1}{k}}.\mathrm{D}'\{[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{1}{k}}.\mathrm{D}F(a,a')\}.\mu y^{\frac{1}{k}+1} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}\{[\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{2}{k}}.[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{2}{k}}.\mathrm{D}F(a,a')\}.\mu^2 y^{\frac{2}{k}} \qquad \ldots .(3) \\
& + \underline{\mathrm{D}}'^3F(a,a').y^3 \\
& + [\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{1}{k}}.\underline{\mathrm{D}}'^2\{[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{1}{k}}.\mathrm{D}F(a,a')\}.\mu y^{\frac{1}{k}+2} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}\{[\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{2}{k}}.\mathrm{D}'\{[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{2}{k}}.\mathrm{D}F(a,a')\}\}.\mu^2 y^{\frac{2}{k}+1} \quad + \text{etc.} \\
& + \tfrac{1}{3}\underline{\mathrm{D}}^2\{[\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')]^{-\frac{3}{k}}.[\mathrm{D}'\varphi(a,a')]^{\frac{3}{k}}.\mathrm{D}F(a,a')\}.\mu^3 y^{\frac{3}{k}}
\end{aligned}
$$

Dans cette formule, $\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')$, $\mathrm{D}'\varphi(a,a')$ et $F(a,a')$ sont des premiers termes; de sorte que dans les dérivations on mettra $\underline{\mathrm{D}}^{k+1}\varphi(a,a')$, $\underline{\mathrm{D}}^{k+2}\varphi(a,a')$, etc. au lieu de $\mathrm{D}\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')$, $\underline{\mathrm{D}}^2\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')$, etc.; $\underline{\mathrm{D}}'^2\varphi(a,a')$, $\underline{\mathrm{D}}'^3\varphi(a,a')$, etc. au lieu de $\mathrm{D}'\mathrm{D}'\varphi(a,a')$, $\underline{\mathrm{D}}'^2\mathrm{D}'\varphi(a,a')$, etc.; mais $\mathrm{D}\mathrm{D}F(a,a')$, $\underline{\mathrm{D}}^2\mathrm{D}F(a,a')$, etc. seront $2\underline{\mathrm{D}}^2F(a,a')$, $3\underline{\mathrm{D}}^3F(a,a')$, etc.; $\underline{\mathrm{D}}^k\varphi(a,a')$ ne varie point selon D', mais $\mathrm{D}'\varphi(a,a')$ et $\mathrm{D}F(a,a')$ varient tant selon D' que selon D. La formule n'est plus ordonnée, comme on voit, suivant les puissances entières de y.

324. Ayant toujours l'équation $\varphi(t,u)=0$, si l'on vouloit que la série pour $F(t,u)$ renfermât u au lieu de y; alors, puisque l'on a supposé $u=a'+y$, afin d'avoir $y=u$, il faudroit faire $a'=0$ dans les formules précédentes, après les dérivations effectuées.

Dans ce cas, 1.° les formules ($\mathfrak{D}$) et ($\mathfrak{E}$) donneroient $F(t,u)$ en u, a demeurant quelconque, mais les séries ne seroient pas ordonnées suivant les puissances de u : on pourroit cependant ordonner ces séries suivant les puissances de u, mais alors le coëfficient de chacune de ces puissances seroit une série infinie.

2.° Si, en faisant $a' = 0$, on prend pour a une des racines de l'équation $\phi(t,0) = 0$, alors $\phi(a,0)$ sera zéro, et en supposant que $\phi(t,0) = 0$ n'ait qu'une seule racine t égale à a, la formule (𝔉) ou (𝔊) donnera pour $F(t,u)$ une série qui sera ordonnée suivant les puissances entières positives de u.

3.° Si, a' étant $= 0$, $\phi(t,0) = 0$ a plusieurs racines égales chacune à a, alors la formule (𝔉) donnera pour $F(t,u)$ une série en u, mais cette série ne procédera plus suivant les puissances entières de u.

Le cas du présent numéro a mérité l'attention de Laplace, qui s'en est occupé dans les mémoires de l'Acad. des sciences de Paris, année 1777, pag. 120 et 121.

325. Si l'on a l'équation $\phi t = \psi u$, où les quantités t et u sont séparées, et qu'on demande l'expression de Ft par une série sans t; on voit que ce cas est compris dans celui du n.° 318 : ainsi les formules (𝔇), (𝔉), (𝔥) en donnent la solution. On observe que pour ce cas les formules (𝔈) et (𝔊) coïncident avec les formules (𝔇) et (𝔉) respectivement. On peut aussi tirer la solution du cas actuel, et avec plus de facilité peut-être, de la formule (IX) du n.° 299.

On résoudra encore d'une manière semblable à celle dont nous avons fait usage dans les n.os 318 et suivans le problème plus général où l'on demande l'expression de $F(t,u)$ sans t, lorsqu'on a l'équation $\phi(t,u) = \psi u$; mais on peut regarder cette équation comme comprise dans l'équation précédente $\phi(t,u) = 0$, ϕ étant une fonction quelconque : ainsi nous regardons ce cas comme déjà résolu.

326. Il s'offre encore un autre genre de questions; ce sont celles où ayant autant d'équations que de quantités t, u, v, etc., qui entrent dans une fonction $F(t, u, v$, etc.$)$, on demande l'expression de cette fonction par une série dans laquelle n'entre plus aucune de ces quantités t, u, v, etc.; tel est le cas où l'on demande l'expression de $F(t, u)$ sans t ni u, lorsqu'on a les deux équations $\phi(t,u) = 0$ et $\psi(t,u) = 0$. Mais ces recherches nous mèneroient trop loin, et nous regrettons de ne pouvoir nous y livrer.

---

327. Nous allons terminer ces applications en disant quelque chose des *retours de retour* des séries.

On propose de transformer la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(1)$$

en une série ordonnée suivant les puissances entières positives de z, lorsque la

la relation entre x et z est donnée par les deux équations

$$\pi y = x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m, \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\varpi z = y(\mathfrak{b} + \mathfrak{c} y + \mathfrak{d} y^2 + \text{etc.})^r. \qquad \ldots\ldots(3)$$

C'est le cas d'un double retour.

Si l'on n'avoit que l'équation (2), et qu'on demandât pour (1) une série en y, le théorème du n.° 257 donneroit, en y mettant πy au lieu de $x\beta^m$,

$$A + \beta^{-m}\mathrm{D}.A.\pi y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2m}\mathrm{D}.A).\pi^2 y^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\beta^{-3m}\mathrm{D}.A).\pi^3 y^3$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}\mathrm{D}.A).\pi^n y^n + \text{etc.};$$

je représente cette série par

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \text{etc.} + a_n.y^n + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(4)$$

de sorte que la question est réduite à transformer cette dernière série (4) en une série en z lorsqu'on a l'équation (3) ci-dessus. Le théorème du n.° 257 donne encore

$$a + \mathfrak{b}^{-r}\mathrm{D}.a.\varpi z + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathfrak{b}^{-2r}\mathrm{D}.a).\varpi^2 z^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\mathfrak{b}^{-3r}\mathrm{D}.a).\varpi^3 z^3$$
$$+ \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\mathfrak{b}^{-nr}\mathrm{D}.a).\varpi^n z^n + \text{etc.},$$

ou, en développant,

$$a + b.\mathfrak{b}^{-r}.\varpi z + \tfrac{1}{2}(b\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-2r} + 2c.\mathfrak{b}^{-2r}).\varpi^2 z^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}(b\mathfrak{D}^2.\mathfrak{b}^{-3r} + 2c\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-3r} + 3d.\mathfrak{b}^{-3r}).\varpi^3 z^3 + \text{etc.};$$

et, en mettant pour a, b, c, d, etc. leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$A + \mathrm{D}.A.\beta^{-m}.\mathfrak{b}^{-r}.\pi.\varpi.z + \tfrac{1}{2}\{\mathrm{D}.A.\beta^{-m}.\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-2r}.\pi + \mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\mathfrak{b}^{-2r}.\pi^2\}\varpi^2.z^2$$
$$+ \tfrac{1}{3}\{\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathfrak{D}^2.\mathfrak{b}^{-3r}.\pi + \mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-3r}.\pi^2 + \mathfrak{D}^2.(\mathrm{D}.A.\beta^{-3m}).\mathfrak{b}^{-3r}.\pi^3\}\varpi^3.z^3$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left\{\begin{matrix}\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathfrak{D}^3.\mathfrak{b}^{-4r}.\pi + \mathrm{D}.(\mathrm{D}.A\,\beta^{-2m}).\mathfrak{D}^2.\mathfrak{b}^{-4r}.\pi^2 + \mathfrak{D}^2.(\mathrm{D}.A.\beta^{-3m}).\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-4r}.\pi^3 \\ + \mathfrak{D}^3.(\mathrm{D}.A.\beta^{-4m}).\mathfrak{b}^{-4r}.\pi^4\end{matrix}\right\}\varpi^4.z^4 + \text{etc.}$$

328. Étant données les trois équations

$$z = \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$y = \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \mathfrak{e}x^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$x = bv + cv^2 + dv^3 + ev^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(8)$$

on demande à exprimer v par une série en z. C'est l'inverse du problème du n.° 65.

La dernière de ces trois équations donne, par le n.° 265,

$$v = b^{-1}.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}.x^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.b^{-3}.x^3 + \tfrac{1}{4}\mathrm{D}^3.b^{-4}.x^4 + \text{etc.} \qquad \ldots(9)$$

Je compare cette série avec (1) du numéro précédent, puis (7) avec (2), et (8) avec (3); ce qui donne $A = 0$, $\mathrm{D}.A = B = b^{-1}$, $C = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.b^{-2}$, etc.; $\pi = 1$, $m = 1$, $\beta = \mathfrak{b}$; $\varpi = 1$, $r = 1$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}$; substituant dans la formule (5), et développant on trouve

$$v = \qquad \ldots\ldots(10)$$

$$b^{-1}.\mathfrak{b}^{-1}.\mathfrak{B}^{-1}.z + \tfrac{1}{2}\left\{b^{-1}.\mathfrak{b}^{-1}\mathrm{D}.\mathfrak{B}^{-2} + (b^{-1}\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-2} + \mathrm{D}.b^{-2}.\mathfrak{b}^{-2})\mathfrak{B}^{-2}\right\}z^2$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} b^{-1}.\mathfrak{b}^{-1}.\mathrm{D}^2.\mathfrak{B}^{-3} + (b^{-1}\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-2} + \mathrm{D}.b^{-2}.\mathfrak{b}^{-2})\mathrm{D}.\mathfrak{B}^{-3} \\ \qquad + (b^{-1}\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}^{-3} + \mathrm{D}.b^{-2}.\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-3} + \mathrm{D}^2.b^{-3}.\mathfrak{b}^{-3})\mathfrak{B}^{-3} \end{array}\right\}z^3$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} b^{-1}.\mathfrak{b}^{-1}.\mathrm{D}^3.\mathfrak{B}^{-4} + (b^{-1}\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-2} + \mathrm{D}.b^{-2}.\mathfrak{b}^{-2})\mathrm{D}^2.\mathfrak{B}^{-4} \\ \qquad + (b^{-1}\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}^{-3} + \mathrm{D}.b^{-2}.\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-3} + \mathrm{D}^2.b^{-3}.\mathfrak{b}^{-3}).\mathrm{D}.\mathfrak{B}^{-4} \\ + (b^{-1}\mathrm{D}^3.\mathfrak{b}^{-4} + \mathrm{D}.b^{-2}\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}^{-4} + \mathrm{D}^2.b^{-3}.\mathrm{D}.\mathfrak{b}^{-4} + \mathrm{D}^3.b^{-4}.\mathfrak{b}^{-4})\mathfrak{B}^{-4} \end{array}\right\}z^4$$

$$+ \text{etc.}$$

La loi est manifeste, et les développemens ultérieurs n'ont aucune difficulté.

(V.)

329. En revenant au retour des séries simples, nous allons rassembler dans cette division différentes observations, lesquelles serviront soit à répandre un nouveau jour sur ce qui précède, soit à présenter quelques théorèmes intéressans sur les dérivations, auxquels nous serons conduits principalement par les différentes voies que l'on peut suivre pour arriver aux formules du retour des séries.

---

330. En comparant la formule (E*) avec la formule (E), n.os 284 et 283, nous avons trouvé un théorème sur les dérivations que nous allons simplifier et généraliser ensuite.

Si l'on suppose dans les numéros cités que la fonction F s'en aille; c'est-à-dire, si l'on met l'unité au lieu de la caractéristique F; et puisque $\varphi\alpha$ est une fonction quelconque, si l'on fait $\varphi\alpha = \beta$, $\mathrm{D}\varphi\alpha = \mathrm{D}.\beta = \gamma$, $\mathrm{D}^2\varphi\alpha = \delta$, etc.; on aura le théorème suivant

$$\begin{array}{l} \psi(\alpha + \beta.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\beta^2.y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.\beta^3.y^3 + \text{etc.}) = \\ \psi\alpha + \beta.\mathrm{D}\psi\alpha.y + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^2.\mathrm{D}\psi\alpha).y^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^3.\mathrm{D}\psi\alpha).y^3 + \text{etc.}, \end{array} \qquad \ldots(1)$$

la dérivée $\mathrm{D}\alpha$ dans $\psi\alpha$ étant toujours $= 1$. Mais voici ce théorème généralisé:

THÉORÈME.

331. Une fonction quelconque des deux séries suivantes, savoir

$$\psi\left\{\begin{matrix} A + (\beta^{-m}\text{D}.A).y + \tfrac{1}{2}\text{D}.(\beta^{-2m}\text{D}.A).y^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.(\beta^{-3m}\text{D}.A).y^3 + \text{etc.}, \\ \mathfrak{A} + (\beta^{-m}\text{D}.\mathfrak{A}).y + \tfrac{1}{2}\text{D}.(\beta^{-2m}\text{D}.\mathfrak{A}).y^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.(\beta^{-3m}\text{D}.\mathfrak{A}).y^3 + \text{etc.} \end{matrix}\right\}$$

est égale à la série ....(2)

$$\psi(A,\mathfrak{A}) + \beta^{-m}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A}).y + \tfrac{1}{2}\text{D}.\{\beta^{-2m}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A})\}.y^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.\{\beta^{-3m}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A})\}.y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}.\{\beta^{-nm}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A})\}.y^n + \text{etc.}$$

Démonstration. Soient les deux séries quelconques, finies ou infinies,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}, \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.},$$

converties chacune en une série qui procède suivant les puissances de y, y étant $= x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m$, comme n.° 257; je représente ces séries transformées par

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \text{etc.}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}y^3 + \text{etc.},$$

et j'aurai l'équation

$$\begin{matrix} \psi\{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}, \ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}\} = \\ \psi\{a + by + cy^2 + dy^3 + \text{etc.}, \ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}y^2 + \mathfrak{d}y^3 + \text{etc.}\}. \end{matrix} \quad \ldots(3)$$

En développant le premier membre de cette équation, on le trouve égal à

$$\psi(A,\mathfrak{A}) + \text{D}.\psi(A,\mathfrak{A}).x + \text{D}^2.\psi(A,\mathfrak{A}).x^2 + \text{etc.},$$

série, qui, par le n.° 257, en mettant $\psi(A,\mathfrak{A})$ au lieu de A dans la formule (IV), sera égale à

$$\psi(A,\mathfrak{A}) + \beta^{-m}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A}).y + \tfrac{1}{2}\text{D}.\{\beta^{-2m}\text{D}.\psi(A,\mathfrak{A})\}.y^2 + \text{etc.}$$

Donc cette dernière série, égale au premier membre de l'équation (3), sera aussi égale au second membre de la même équation : ainsi, en mettant pour a, b, etc., $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. leurs valeurs en A et $\mathfrak{A}$, on a le théorème qu'il s'agissoit de démontrer.

Ce théorème et sa démonstration s'étendent aux séries de la forme de celles des n.os 295, 312 et 313. En voici deux corollaires qui nous serviront tout à l'heure.

332. COROLLAIRES. I. Donc s'il n'y a qu'une seule série, on aura

$$\psi\{A + \beta^{-m}\text{D}.A.y + \tfrac{1}{2}\text{D}.(\beta^{-2m}\text{D}.A).y^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.(\beta^{-3m}\text{D}.A).y^3 + \text{etc.}\} =$$
$$\psi A + \beta^{-m}\text{D}.\psi A.y + \tfrac{1}{2}\text{D}.(\beta^{-2m}\text{D}.\psi A).y^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.(\beta^{-3m}\text{D}.\psi A).y^3 + \text{etc.} + \frac{1}{n}\text{D}^{n-1}.(\beta^{-nm}\text{D}.\psi A).y^n + \text{etc.}$$

333. Si l'on a la fraction

$$\frac{A + \beta^{-m}\mathrm{D}.A.y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2m}\mathrm{D}.A).y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^{-3m}\mathrm{D}.A).y^3 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} + \beta^{-m}\mathrm{D}.\mathfrak{A}.y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2m}\mathrm{D}.\mathfrak{A}).y + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^{-3m}\mathrm{D}.\mathfrak{A}).y^3 + \text{etc.}},$$

puisqu'alors $\psi(A,\mathfrak{A})$ devient $A\mathfrak{A}^{-1}$; on aura, pour cette fraction, la série

$$A\mathfrak{A}^{-1} + \beta^{-m}\mathrm{D}.(A\mathfrak{A}^{-1}).y + \frac{1}{2}\mathrm{D}.\{\beta^{-2m}\mathrm{D}.(A\mathfrak{A}^{-1})\}.y^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.\{\beta^{-3m}\mathrm{D}.(A\mathfrak{A}^{-1})\}.y^3 + \text{etc.}$$

334. Nous allons comparer la formule que nous avons obtenue n.° 70 pour la somme des puissances des racines d'une équation quelconque, avec celle que donne le retour des suites pour la puissance d'une seule de ces racines; ce rapprochement servira à répandre plus de jour sur les séries trouvées.

Soient α, β, γ, δ, etc. les racines de l'équation

$$ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} - dx^{m-3} - \text{etc.} - kx - l = 0 \quad \ldots(1)$$

α étant la plus grande de ces racines, $\beta > \gamma$, $\gamma > \delta$, et ainsi de suite; on aura, par la théorie des équations

$$ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} - \text{etc.} - l = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\times\text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Les racines de l'équation

$$a - bx - cx^2 - dx^3 - \text{etc.} - kx^{m-1} - lx^m = 0 \quad \ldots(3)$$

seront les réciproques de celles de l'équation (1). Si donc on désigne par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. les racines de cette dernière équation (3), $\mathfrak{a}$ étant la plus petite, et $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} < \mathfrak{d}$, etc.; on aura $\mathfrak{a} = \frac{1}{\alpha}$, $\mathfrak{b} = \frac{1}{\beta}$, $\mathfrak{c} = \frac{1}{\gamma}$, $\mathfrak{d} = \frac{1}{\delta}$, etc., et

$$a - bx - cx^2 - dx^3 - \text{etc.} - lx^m = a(1 - \tfrac{1}{\mathfrak{a}}x)(1 - \tfrac{1}{\mathfrak{b}}x)(1 - \tfrac{1}{\mathfrak{c}}x)\times\text{etc.} \quad \ldots(4)$$

Pour s'en convaincre il suffit d'observer que l'équation (4) résulte de l'équation (2), si dans celle-ci on met $\frac{1}{x}$ à la place de x, et qu'on multiplie par x^m.

Si l'on désigne par S_r et $\mathfrak{S}_{-r}$ les sommes des puissances r et $-r$ des racines de (1) et de (3), c'est-à-dire, si l'on fait

$$S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \text{etc.}, \qquad \mathfrak{S}_{-r} = \frac{1}{\mathfrak{a}^r} + \frac{1}{\mathfrak{b}^r} + \frac{1}{\mathfrak{c}^r} + \text{etc.},$$

on trouvera, comme n.° 69, en prenant les logarithmes,

$$\log(a - bx - cx^2 - \text{etc.} - lx^m) = \log a - S_1.x - \tfrac{1}{2}S_2.x^2 - \tfrac{1}{3}S_3.x^3 - \text{etc.}$$

$$(5)\ldots\ldots \qquad = \log a - \mathfrak{S}_{-1}.x - \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_{-2}.x^2 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}_{-3}.x^3 - \text{etc.},$$

et en développant $\log(a - bx - cx^2 - \text{etc.})$ comme au n.° 70, on aura

$$S_r = \mathfrak{S}_{-r} = \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$a^{-r}b^r + \frac{r}{r-1}a^{-r+1}\mathrm{D}.b^{r-1} + \frac{r}{r-2}a^{-r+2}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2.b^{r-2} + \text{etc.} + \frac{r}{1}a^{-1}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{r-1}.b\,;$$

ou bien, puisque (n.° 268) $\frac{r}{r+n}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^n.b^{-r-n} = \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{n-1}.(b^{-n}\mathrm{D}.b^{-r})$, et, en mettant $-r$ au lieu de r, $\frac{r}{r-n}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^n.b^{r-n} = \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{n-1}.(b^{-n}\mathrm{D}.b^r)$, on a aussi

$$S_r = \mathfrak{S}_{-r} = \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$a^{-r}\left\{\begin{array}{l} b^r + b^{-1}\mathrm{D}.b^r.a + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2}\mathrm{D}.b^r).a^2 + \frac{1}{3}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2.(b^{-3}\mathrm{D}.b^r).a^3 \\ \qquad\qquad + \text{etc.} + \frac{1}{r-1}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{r-2}.(b^{-r+1}\mathrm{D}.b^r).a^{r-1} \end{array}\right\},$$

série qui n'a qu'un nombre fini de termes.

335. De ce que dit Newton dans son *Arithmétique universelle*, en traitant des limites des équations numériques, on infère ce qui suit.

Puisque les mêmes puissances de quantités inégales diffèrent d'autant plus les unes des autres que ces puissances sont plus hautes; si r est un nombre considérable, la puissance α^r surpasse non-seulement chacune des puissances $\mathcal{C}^r$, γ^r, etc., mais encore leur somme $\mathcal{C}^r + \gamma^r +$ etc. Il s'ensuit de là, que si l'on tire la racine s de $S_{rs} = \alpha^{rs} + \mathcal{C}^{rs} + \gamma^{rs} +$ etc., $(S_{rs})^{\frac{1}{s}}$ sera une valeur approchée de α^r, c'est-à-dire de la puissance r de la plus grande racine de l'équation (1).

Cette méthode d'approximation a l'avantage de ne pas exiger qu'on connoisse d'avance une valeur déjà assez proche de la plus grande racine, et elle fait connoître la valeur de α^r d'autant plus exactement qu'on fait s plns grand. Nous allons la réduire en formule, et par là la faire servir aussi aux équations littérales.

A cet effet, je change r en rs dans la série (7) ci-dessus, je compare avec le n.° 332, et faisant $m = 1$, $\mathcal{C} = b$, $y = a$, $A = b^{rs}$, $\psi A = (b^{rs})^{\frac{1}{s}} = b^r$, la formule de ce n.° 332 donneroit pour $(S_{rs})^{\frac{1}{s}}$ la série suivante, qui va à l'infini,

$$a^{-r}\left\{\begin{array}{l} b^r + b^{-1}\mathrm{D}.b^r.a + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2}\mathrm{D}.b^r).a^2 + \frac{1}{3}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^2.(b^{-3}\mathrm{D}.b^r).a^3 \\ \qquad\qquad + \text{etc.} + \frac{1}{n}\underset{\cdot}{\mathrm{D}}^{n-1}.(b^{-n}\mathrm{D}.b^r).a^n + \text{etc.} \end{array}\right\}, \quad \ldots(8)$$

si la série (7), après y avoir mis rs au lieu de r, alloit à l'infini : mais comme elle n'a qu'un nombre de termes fini et dépendant de s, il en résulte que la

formule du n.° 332, qui suppose que la série de son premier membre aille à l'infini, donnera, dans le cas actuel, la série précédente (8), moins une autre suite infinie de termes, qui ne commence qu'après un certain nombre de termes de (8) réglé sur s, et qui par conséquent est dépendante de s, et diminue lorsque s augmente. De là on conclud que, puisque s n'entre pas dans (8), et que partant cette série (8) est indépendante de s, elle est la partie indépendante de s dans la valeur de $(S_{rs})^{\frac{1}{s}}$.

Mais, d'un autre côté, si l'on représente $(S_{rs})^{\frac{1}{s}}$ par $(\alpha^{rs} + P^{rs})^{\frac{1}{s}}$, P^{rs} étant $= \mathfrak{C}^{rs} + \gamma^{rs} + \delta^{rs} +$ etc., et qu'on développe par la règle du binome, on a

$$(S_{rs})^{\frac{1}{s}} = \alpha^r + \frac{1}{s}\,\frac{P^{rs}}{\alpha^{r(s-1)}} - \frac{1}{s}\cdot\frac{s-1}{2s}\cdot\frac{(P^{rs})^2}{\alpha^{r(s-2)}} + \text{etc.},$$

où α^r est le seul terme indépendant de s, les autres variant avec s et diminuant lorsque s augmente. Donc la série (8) continuée à l'infini est rigoureusement égale à α^r.

Puisque $\frac{1}{m}\mathrm{D}^{m-1}.(b^{-m}\mathrm{D}.b^r) = \frac{r}{r-m}\mathrm{D}^m.b^{r-m}$, il est clair que la série (8) peut aussi se mettre sous cette forme :

$$\alpha^r = \qquad\qquad \ldots\ldots(9)$$

$$a^{-r}\left\{\begin{array}{l} b^r + \frac{r}{r-1}\mathrm{D}.b^{r-1}.a + \frac{r}{r-2}\mathrm{D}^2.b^{r-2}.a^2 + \frac{r}{r-3}\mathrm{D}^3.b^{r-3}.a^3 + \text{etc.} + \frac{r}{1}\mathrm{D}^{r-1}.b.a^{r-1} \\ \quad + r\mathrm{D}^r.\log b.a^r - \frac{r}{1}\mathrm{D}^{r+1}.b^{-1}.a^{r+1} - \frac{r}{2}\mathrm{D}^{r+2}.b^{-2}.a^{r+2} - \text{etc.}\end{array}\right\};$$

et cette série n'est autre chose que la série (6), pour S_r, continuée à l'infini.

Quant à l'équation (3), $a - bx - cx^2 - \text{etc.} - lx^m = 0$; puisqu'on a vu que l'on a $\alpha = a^{-1}$, partant $\alpha^r = a^{-r}$, il s'ensuit que la série (8) ou (9) qui donne la puissance r de la plus grande racine de l'équation (1), donne la puissance $-r$ de la plus petite racine de l'équation (3).

Comparons maintenant avec le n.° 269. On voit qu'en changeant les lettres grecques en françoises, la série (5) du n.° 269 peut se mettre sous cette forme

$$x^r = \qquad\qquad \ldots\ldots(10)$$

$$a^r\left\{\begin{array}{l} b^{-r} + b^{-1}\mathrm{D}.b^{-r}.a + \frac{1}{2}\mathrm{D}.(b^{-2}\mathrm{D}.b^{-r}).a^2 + \frac{1}{3}\mathrm{D}^2.(b^{-3}\mathrm{D}.b^{-r}).a^3 \\ \qquad + \text{etc.} + \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(b^{-n}\mathrm{D}.b^{-r}).a^n + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

et en mettant $-r$ au lieu de r, elle coïncide avec la formule (8) ci-dessus.

On tire de tout cela cette conclusion remarquable :

1.° La même série qui donne la somme des puissances r des racines de

l'équation $ax^m - bx^{m-1} - cx^{m-2} -$ etc. $- l = 0$, si on ne la continue que jusqu'à ce que les exposans de b deviennent négatifs, donne la puissance r de la plus grande racine, si elle est continuée à l'infini.

2.° La même série qui donne la somme des puissances $-r$ des racines de l'équation $a - bx - cx^2 -$ etc. $- lx^m = 0$, si on ne la continue que jusqu'à ce que les exposans de b deviennent négatifs, donne la puissance $-r$ de la plus petite racine, si on la continue à l'infini.

3.° La série qu'on obtient par le retour des suites pour la puissance r d'une des racines de l'équation $a - bx - cx^2 -$ etc. $- lx^m = 0$, donne la valeur de la puissance r de la plus petite de ces racines.

La première partie de ce théorème a été observée par Euler, dans le tome XV des *novi Commentarii* de Pétersbourg, pag. 58 et suivantes, mais il ne l'a démontrée qu'imparfaitement.

Il suit encore de ce qui précède, que pour avoir la puissance r de la plus grande racine de l'équation (3), $a - bx - cx^2 -$ etc. $- lx^m = 0$, il faut écrire l'équation à rebours, de cette manière,

$$lx^m + kx^{m-1} + ix^{m-2} + \text{etc.} + bx - a = 0,$$

puis, la comparant avec l'équation (1), faire $a = l$, $b = -k$, $c = -i$, etc., $k = -b$, $l = a$; et la série (8) ou (9) donnera la plus grande racine de cette équation (3) : ou bien, ce qui revient au même pour le fond, il faut diviser l'équation (3) par x^m, ce qui donne

$$l + kx^{-1} + ix^{-2} + \text{etc.} + bx^{-m+1} - ax^{-m} = 0,$$

et comparant cette équation avec l'équation (4) du n.° 269, y faire $\alpha = -l$, $\beta = k$, $\gamma = i$, etc., $\varkappa = b$, $\lambda = -a$; et changeant x en x^{-1}, la série (5) du n.° 269 donnera la valeur de x^{-r}.

Un des principaux usages auxquels on emploie les formules que nous a données le retour des séries simples, c'est de les faire servir à trouver par approximation toutes les différentes racines des équations : nous pourrions à présent faire voir comment les formules (i) du n.° 276 et (2) du n.° 285, entre autres, servent à cet usage : mais ces applications, quoique fort importantes, s'écartent de notre sujet, et nous ne pouvons que renvoyer aux §§ III et IV du mémoire de Lagrange cité ci-dessus (n.° 269).

336. Si de la série (6), n.° 334, qui donne la valeur de $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r +$ etc., ou de $\mathfrak{a}^{-r} + \mathfrak{b}^{-r} + \mathfrak{c}^{-r} +$ etc., on soustrait la formule (9), n.° 335, qui

donne celle de α^r ou de $\mathfrak{a}^{-r}$, on aura le théorème suivant

$$\beta^r + \gamma^r + \delta^r + \text{etc.} = \mathfrak{b}^{-r} + \mathfrak{c}^{-r} + \mathfrak{d}^{-r} + \text{etc.} =$$

$$r\left\{\begin{array}{l} -\,\mathfrak{p}^r.\log b + \mathfrak{p}^{r+1}.b^{-1}.a + \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}^{r+2}.b^{-2}.a^2 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{p}^{r+3}.b^{-3}.a^3 \\ \qquad\qquad + \text{etc.} + \dfrac{1}{n}\mathfrak{p}^{r+n}.b^{-n}.a^n + \text{etc.}\end{array}\right\}; \quad ..(11)$$

série remarquable qui donne la somme des puissances r de toutes les racines de l'équation (1), excepté de la plus grande; ou la somme des puissances $-r$ de toutes les racines de l'équation (3), excepté de la plus petite.

Si, ayant une équation numérique, on calcule un nombre de termes de cette série (11) suffisant pour pousser l'approximation assez loin, et qu'ensuite on extraie la racine r ou $-r$ du résultat numérique, on peut parvenir au moyen de cette série, à trouver la valeur approchée de la racine β de l'équation (1), c'est-à-dire de la plus grande racine après α, ou la valeur de $\mathfrak{b}$, la plus petite racine après $\mathfrak{a}$ de l'équation (3).

337. Nous allons encore faire voir comment on peut s'assurer que les formules de retour de séries simples que nous avons trouvées plus haut se rapportent aux plus petites racines de leurs équations.

Puisqu'on vient de voir, n.° 335, que la série (5) du n.° 269 donne la valeur de la puissance r de la plus petite racine de l'équation (4) du même numéro; en faisant $r = 1$, on a

$$x = \alpha\{\beta^{-1} + \beta^{-1}\mathrm{D}.\beta^{-1}.\alpha + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2}\mathrm{D}.\beta^{-1}).\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^{-3}\mathrm{D}.\beta^{-1}).\alpha^2 + \text{etc.}\},$$

série qui, en faisant $\alpha = y$, coïncide avec (a) du n.° 265 : ainsi la série de Newton pour le retour des suites donne la valeur de la plus petite racine de l'équation dont elle est le retour.

En divisant par α la série précédente et prenant la fonction ϕ de part et d'autre, on a

$$\psi(\frac{x}{\alpha}) = \psi\{\beta^{-1} + \beta^{-1}\mathrm{D}.\beta^{-1}.\alpha + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2}\mathrm{D}.\beta^{-1}).\alpha^2 + \text{etc.}\},$$

et, en faisant dans le n.° 332 $A = \beta^{-1}$, $m = 1$, on trouve

$$\psi(\frac{x}{\alpha}) = \psi(\beta^{-1}) + \beta^{-1}\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1}).\alpha + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{-2}\mathrm{D}.\psi(\beta^{-1})).\alpha^2 + \text{etc.},$$

série qui, en changeant α en y, coïncide avec la formule (e) du n.° 272, si dans cette formule on fait $m = 1$. Donc cette formule (e) donne encore une fonction quelconque, $\psi(\frac{x}{y})$, de la *plus petite* racine x de l'équation

$y = \beta x$

$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc.; car, en prenant ci-dessus la fonction ϕ, on ne change rien à l'espèce de la racine x.

Supposons, pour donner un exemple numérique, qu'on veuille se servir de la formule (4) du n.° 273 pour calculer le logarithme naturel de 10, et que pour cet effet on fasse $x = 10$; $\beta = 0,1$; $\gamma = -0,009$; δ, ε, etc. $= 0$; ce qui réduit l'équation à $y = x(\beta + \gamma x)$, laquelle donne $y = 0,1$: on trouvera, par la formule (4), $\log x = 0,10536$, tandis que le logarithme naturel de 10 est 2,30258. Il ne faut pas en être surpris, car l'équation $y = x(\beta + \gamma x)$, ou $0,1 = 0,1.x - 0,009.x^2$, a deux racines, savoir $x = 10$, et $x = \frac{10}{9}$, et la formule (4) se rapporte à la plus petite racine $\frac{10}{9}$, dont le logarithme naturel est en effet 0,10536.

La formule (b) du n.° 266 se rapporte aussi à la plus petite racine x. Pour le faire voir, je mets l'équation proposée au n.° 266 sous cette forme

$$\alpha = (1 - \beta)x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \text{etc.};$$

comparée avec l'équation $a = bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., elle donne, pour la plus petite valeur de x,

$$x = (1-\beta)^{-1}.\alpha + \tfrac{1}{2}\text{D}.(1-\beta)^{-2}.\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.(1-\beta)^{-3}.\alpha^3 + \text{etc.}$$

Or cette série coïncide avec la série (b) du n.° 266, laquelle est

$$x = \alpha + \tfrac{1}{2}\text{D}.\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2.\alpha^3 + \tfrac{1}{4}\text{D}^3.\alpha^4 + \text{etc.};$$

on s'en assurera facilement, en développant chacune de ces deux séries en β et en ordonnant suivant les puissances de α. Donc la formule (b) donne la plus petite racine de l'équation

$$x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

Il nous sera facile à présent de faire voir que la formule (D) du n.° 282 où l'on fera $y = 1$, se rapporte à la plus petite racine t de l'équation $t - \alpha - \phi t = 0$.

En effet, en mettant $\alpha + x$ au lieu de t dans cette équation, elle devient

$$x = \phi\alpha + \text{D}\phi\alpha.x + \text{D}^2\phi\alpha.x^2 + \text{D}^3\phi\alpha.x^3 + \text{etc.},$$

et, en la comparant avec l'équation $x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc. ci-dessus, on aura, pour la plus petite valeur de x, la série

$$x = \phi\alpha + \tfrac{1}{2}\text{D}(\phi\alpha)^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2(\phi\alpha)^3 + \tfrac{1}{4}\text{D}^3(\phi\alpha)^4 + \text{etc.};$$

donc, puisque $t = \alpha + x$, la plus petite valeur de x répond à la plus petite valeur de t; on a donc pour la plus petite racine t de l'équation $t - \alpha - \phi t = 0$,

$$t = \alpha + \phi\alpha + \tfrac{1}{2}\text{D}(\phi\alpha)^2 + \tfrac{1}{3}\text{D}^2(\phi\alpha)^3 + \tfrac{1}{4}\text{D}^3(\phi\alpha)^4 + \text{etc.}$$

Prenant de part et d'autre la fonction ψ, et comparant avec le n.° 332, où l'on fera $A = \alpha$, $\mathfrak{C} = \phi\alpha$, $m = -1$, on a ψt égale à la série (D) du n.° 282, pourvu qu'on y fasse $y = 1$. Donc, puisqu'en prenant la fonction ψ, on ne change rien à la nature de la racine t, il s'ensuit que la série (D) se rapporte à la plus petite racine t de $t - \alpha - \phi t = 0$.

On peut appliquer ces raisonnemens à d'autres des formules trouvées, pour examiner si elles répondent à la plus petite racine.

333. Lambert a le premier donné pour x^r une série en coëfficiens de l'équation à trois termes $0 = x^m - bx^{m-1} - p$; pour la démontrer, dans les mémoires de Berlin, année 1770, page 227, il cherche d'abord l'expression des sommes des puissances s et $s + r$ des racines; puis, divisant la seconde de ces sommes par la première, il trouve une série pour la puissance r de la plus grande racine de l'équation trinomiale proposée. Nous allons étendre ce procédé à une équation d'un nombre quelconque de termes.

Reprenons l'équation (1) du n.° 334, et dans (7) mettons successivement s et $s + r$ au lieu de r, et nous aurons

$$\frac{S_{s+r}}{S_s} = a^{-r} \frac{\left\{\begin{array}{l} b^{s+r} + b^{-1}\text{D}.b^{s+r}.a + \frac{1}{2}\text{D}.(b^{-2}\text{D}.b^{s+r}).a^2 + \text{etc.} \\ \qquad + \frac{1}{s+r-1}\text{D}^{s+r-2}.(b^{-s-r+1}\text{D}.b^{s+r}).a^{s+r-1} \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} b^s + b^{-1}\text{D}.b^s.a + \frac{1}{2}\text{D}.(b^{-2}\text{D}.b^s).a^2 + \text{etc.} \\ \qquad + \frac{1}{s-1}\text{D}^{s-2}.(b^{-s+1}\text{D}.b^s).a^{s-1} \end{array}\right\}} \ldots (11)$$

Comparant avec le n.° 333, en faisant $m = 1$, $\mathfrak{C} = b$, $A = b^{s+r}$, $\mathfrak{A} = b^s$, partant $A\mathfrak{A}^{-1} = b^r$, $\text{D}.(A.\mathfrak{A}^{-1}) = \text{D}.b^r$, la formule du n.° 333 donneroit encore la série (8) ci-dessus, si le numérateur et le dénominateur de (11) alloient à l'infini; mais comme ils n'ont l'un et l'autre qu'un nombre de termes fini et dépendant de s, la formule donnera la série (8) moins une autre suite infinie de termes qui ne commence qu'après un certain nombre de termes dépendant de s, et qui diminue en valeur, lorsque s augmente : donc la partie indépendante de s sera ici, comme n.° 335, la série (8). Or dans $\frac{S_{s+r}}{S_s} = \frac{\alpha^{s+r} + \mathfrak{C}^{s+r} + \gamma^{s+r} + \text{etc.}}{\alpha^s + \mathfrak{C}^s + \gamma^s + \text{etc.}}$ le seul terme indépendant de s est α^r, ainsi qu'on le voit en effectuant la division. Donc la série (8) est égale à α^r.

Si l'on renverse la fraction (11), afin d'avoir la valeur de $\frac{S_s}{S_{s+r}}$, et que l'on compare avec le n.° 333, en faisant $m=1$, $\mathfrak{C}=b$, $A=b^s$, $\mathfrak{A}=b^{s+r}$, par conséquent $A\mathfrak{A}^{-1}=b^{-r}$, $\text{D}.(A\mathfrak{A}^{-1})=\text{D}.b^{-r}$, on démontre, d'une manière semblable, que l'on aura la série (9) du n.° 335 rigoureusement égale à α^{-r} ou a^r.

On arrive donc par cette voie au même théorème, auquel des considérations un peu différentes nous ont conduits ci-dessus n.° 333.

339. Cela nous mène naturellement à la méthode que DANIEL BERNOUILLI a donnée pour résoudre par approximation les équations numériques dans le tome III des *anciens Commentaires* de Pétersbourg et qu'EULER a developpée dans le chapitre XVII de son *Introduction à l'analyse des infinis.*

En effet, si l'on différentie l'équation (5) du n.° 334, en faisant varier x et divisant par $\text{d}x$, on a

$$\frac{-b-2cx-3dx^2-\text{etc.}-mlx^{m-1}}{a-bx-cx^2-dx^3-\text{etc.}-lx^m}\left\{\begin{aligned}&=-S_1-S_2.x-S_3.x^2-\text{etc.}-S_n.x^{n-1}-\text{etc.}\\&=-\mathfrak{S}_{-1}-\mathfrak{S}_{-2}.x-\mathfrak{S}_{-3}.x^2-\text{etc.}-\mathfrak{S}_{-n}.x^{n-1}-\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Ici la fraction est génératrice d'une série récurrente; son dénominateur est le premier membre de l'équation (3), et son numérateur ce qu'on obtient en multipliant chaque terme de cette équation (3) par son exposant et divisant par x. Si l'on calcule d'une manière quelconque les coëfficiens de x^{n-1} et de x^n du développement de cette fraction, on aura, en représentant ces coëfficiens par A_{n-1} et A_n,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\mathfrak{S}_{-n-1}}{\mathfrak{S}_{-n}}.$$

Mais S_{n+1} divisé par S_n approche d'autant plus de α, et $\mathfrak{S}_{-n-1}$ divisé par $\mathfrak{S}_{-n}$ de a^{-1}, que n est un plus grand nombre. Donc A_n divisé par A_{n-1} approche d'autant plus de la plus grande racine de l'équation (1), que dans la série récurrente on prend des termes plus éloignés du premier. En divisant au contraire A_{n-1} par A_n, le quotient approchera de α^{-1} ou a, c'est-à dire il donnera une valeur d'autant plus approchée de la plus petite racine de l'équation (3), que n sera plus grand.

Cette analyse a l'avantage de déterminer le numérateur de la fraction génératrice de la série récurrente, c'est-à-dire de déterminer les premiers termes de cette série que BERNOULLI et EULER ont laissés indéterminés.

Elle fait voir que si l'on applique la méthode de BERNOULLI ainsi déterminée aux équations littérales, et qu'on la réduise en formule, elle donnera la même formule que le retour des séries.

340. En rapprochant des numéros 290 et 291 ce que nous venons de dire depuis n.° 334, on en tire la conséquence, que 1.° la méthode ordinaire de NEWTON pour augmenter l'approximation vers une des racines d'une équation, en substituant dans une même équation les résultats des substitutions précédentes; 2.° celle que présente le calcul différentiel, ou celui des dérivations n.° 291 et n.° 290, en réduisant en formule le résultat général de ces substitutions; 3.° celle par les formules du retour des séries; 4.° celle où l'on emploie la somme des puissances des racines et que NEWTON indique dans son Arithmétique universelle, et 5.° enfin, la méthode de D. BERNOULLI, par les séries récurrentes, ne sont au fond qu'une seule et même méthode, parce que leurs résultats, réduits en formules, offrent les mêmes séries : les trois dernières ont l'avantage de ne pas exiger que l'on connoisse d'avance une valeur approchée de la racine et ne demandent pas de substitution préliminaire. Dans la pratique concernant les équations numériques, la dernière de ces méthodes, par les séries récurrentes, avec les déterminations indiquées ci-dessus, nous paroît la plus expéditive et la plus facile à employer.

---

341. Revenons au problème du n.° 255, en y supposant cependant, pour plus de simplicité, $m=1$; mais prenons, pour le résoudre, une voie différente de celle que nous avons suivie, et résolvons d'abord la question suivante par les procédés ordinaires du calcul différentiel.

Soit v une fonction de t, on demande à exprimer $\phi(t+\Delta t)$ par une série ordonnée suivant les puissances de Δv, mais sans que v entre dans les coëfficiens de cette série; Δ est la caractéristique des différences.

Puisque l'on suppose v fonction de t, on a par le théorème de TAYLOR

$$v+\Delta v=t+\frac{dv}{dt}\cdot\Delta t+\frac{d^2v}{1.2.dt^2}\cdot(\Delta t)^2+\frac{d^3v}{1.2.3.dt^3}\cdot(\Delta t)^3+\text{etc.};\quad ..(1)$$

on a aussi, par le même théorème,

$$\phi(t+\Delta t)=\phi t+\frac{d\phi t}{dt}\cdot\Delta t+\frac{d^2\phi t}{1.2.dt^2}\cdot(\Delta t)^2+\frac{d^3\phi t}{1.2.3.dt^3}\cdot(\Delta t)^3+\text{etc.}\quad ..(2)$$

De plus, puisque v est fonction de t, donc réciproquement t est fonction de v,

v; représentons cette fonction par $\mathrm{f}v$, on aura $t=\mathrm{f}v$, et à cause que, lorsque v croît de Δv, t croît de Δt, on a $t+\Delta t=\mathrm{f}(v+\Delta v)$, et $\varphi(t+\Delta t)=\varphi\mathrm{f}(v+\Delta v)$; on a donc aussi, en développant,

$$\varphi(t+\Delta t)=\varphi\mathrm{f}v+\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}\cdot\Delta v+\frac{\mathrm{d}^2\varphi\mathrm{f}v}{1.2.\mathrm{d}v^2}\cdot(\Delta v)^2+\frac{\mathrm{d}^3\varphi\mathrm{f}v}{1.2.3.\mathrm{d}v^3}\cdot(\Delta v)^3+\text{etc.}\quad ..(3)$$

Je remarque que dans les séries (1) et (2) $\mathrm{d}t$ est constante et $\mathrm{d}v$ variable; dans la série (3) au contraire, $\mathrm{d}v$ est constante et $\mathrm{d}\mathrm{f}v=\mathrm{d}t$ est variable. Il s'agit maintenant d'exprimer les coëfficiens de la série (3) en coëfficiens des séries (1) et (2).

On a $\varphi\mathrm{f}v=\varphi t$; ensuite $\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}=\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}\mathrm{f}v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}$, et parce que $\mathrm{f}v=t$, $\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}=\frac{\mathrm{d}\varphi t}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}=\frac{\mathrm{d}\varphi t}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$. En faisant $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=p$, et observant que $\frac{\mathrm{d}^2\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^2}$ dérive de $\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}$, et $\frac{\mathrm{d}^3\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^3}$ de $\frac{\mathrm{d}^2\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^2}$, etc., de la même manière que $\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v}$ dérive de $\varphi\mathrm{f}v$, on trouve, en écrivant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi t$ au lieu de $\frac{\mathrm{d}\varphi t}{\mathrm{d}t}$, pour plus de commodité,

$$\left.\begin{aligned}
\varphi\mathrm{f}v &= \varphi t,\\
\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v} &= p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi t,\\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^2} &= p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi t),\\
\frac{\mathrm{d}^3\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^3} &= p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi t)),\\
\frac{\mathrm{d}^4\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v^4} &= p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi t))),
\end{aligned}\right\}\quad ....(4)$$

et ainsi de suite. La loi est manifeste.

Comme $\mathrm{d}t$ est constante dans les seconds membres, on peut y faire partout $\mathrm{d}t=1$, sans y introduire aucun changement, et sans rien ôter de la généralité de ces expressions; on aura donc aussi, pour les coëfficiens de la série (2),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{f}v}{\mathrm{d}v} &= p^{-1}.\mathrm{d}\varphi t,\\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi\mathrm{f}v}{1.2.\mathrm{d}v^2} &= \frac{1}{1.2}p^{-1}.\mathrm{d}(p^{-1}.\mathrm{d}\varphi t),
\end{aligned}\right\}\quad ....(5)$$

$$\frac{d^3\phi fv}{1.2.3.dv^3} = \frac{1}{1.2.3} p^{-1}d(p^{-1}d(p^{-1}d\phi t)), \quad \ldots.(5)$$

$$\frac{d^4\phi fv}{1.2.3.4.dv^4} = \frac{1}{1.2.3.4} p^{-1}d(p^{-1}d(p^{-1}dp^{-1}d\phi t))),$$

etc.

542. Maintenant, si l'on a l'équation

$$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}, \quad \ldots..(6)$$

et qu'on propose de convertir la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \quad \ldots..(7)$$

en une série qui procède suivant les puissances de y, savoir,

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \text{etc.}; \quad \ldots..(8)$$

on n'a qu'à comparer ces séries avec (1), (2) et (3) du numéro précédent, ce qui donne $\Delta v = y$, $\frac{dv}{dt} = p = \beta$, $\frac{d^2v}{1.2\,dt^2} = \gamma$, etc.; $A = \phi t$, $B = \frac{d\phi t}{dt}$, $C = \frac{d^2\phi t}{1.2.dt^2}$, etc.; $a = \phi fv$, $b = \frac{d\phi fv}{dv}$, $c = \frac{d^2\phi fv}{1.2.dv^2}$, etc. Donc, en passant des différentiations aux dérivations, les formules (5) donneront,

$$\begin{aligned} a &= A, \\ b &= \beta^{-1}\text{D}.A, \\ c &= \frac{1}{1.2}\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.A), \\ d &= \frac{1}{1.2.3}\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.A)), \\ e &= \frac{1}{1.2.3.4}\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.(\beta^{-1}\text{D}.A))), \end{aligned} \quad \ldots..(9)$$

etc.

Mais on aura soin d'observer, que, puisque $\frac{dv}{dt}$ est le coëfficient du second terme dans l'équation (1), β doit ici être regardé dans les dérivations comme un second terme, comme égal à $\text{D}.\alpha$; de sorte qu'on fera (n.° 121) $\text{D}.\beta = 2\gamma$, $\text{D}.\gamma = 3\delta$, $\text{D}.\delta = 4\varepsilon$, etc.; on regardera aussi $\text{D}.A$ comme un second terme; et les dérivations s'exécuteront par la méthode du §. I.er de l'article premier.

543. Ce cas étant compris dans celui du problème du n.° 255, il suffit de faire $m = 1$ et $x_\beta = y$ dans le théorème du n.° 257 pour avoir une autre

solution ; la comparaison de ces deux solutions donne le théorème suivant.

THÉORÈME.

On a toujours

$$\tfrac{1}{2}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.A) = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\varsigma^{-2}\mathrm{D}.A),$$

$$\frac{1}{1.2.3}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.A)) = \tfrac{1}{3}\underline{\mathrm{D}}^2.(\varsigma^{-3}\mathrm{D}.A),$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.A))) = \tfrac{1}{4}\underline{\mathrm{D}}^3.(\varsigma^{-4}\mathrm{D}.A),$$

et généralement

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\ldots.\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.A)\ldots)) = \frac{1}{n}\underline{\mathrm{D}}^{n-1}.(\varsigma^{-n}\mathrm{D}.A),$$

ς^{-1} étant répété n fois dans le premier membre de cette dernière équation. Pour effectuer les dérivations dans les premiers membres de ces équations, on emploira la méthode non simplifiée du §. I.er de l'article premier, en considérant ς et $\mathrm{D}.A$ comme des seconds termes. Mais dans les seconds membres, qu'on développera par les méthodes simplifiées, il faudra considérer ς comme un premier terme et $\mathrm{D}.A$ comme un second terme.

Il n'est pas rare de trouver des formules de la forme des premiers membres de ces équations, et le présent théorème sert à les mettre sous une autre forme, plus simple et plus facile à développer.

344. COROLLAIRE. Si l'on fait $\mathrm{D}.A = 1$, on aura

$$\tfrac{1}{2}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.\varsigma^{-1} = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\varsigma^{-2},$$

$$\frac{1}{1.2.3}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.\varsigma^{-1}) = \tfrac{1}{3}\underline{\mathrm{D}}^2.\varsigma^{-3},$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.\varsigma^{-1})) = \tfrac{1}{4}\underline{\mathrm{D}}^3.\varsigma^{-4},$$

et généralement

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\ldots.\varsigma^{-1}\mathrm{D}.(\varsigma^{-1}\mathrm{D}.\varsigma^{-1})\ldots.)) = \frac{1}{n}\underline{\mathrm{D}}^{n-1}.\varsigma^{-n}:$$

pourvu qu'on regarde ς comme un second terme $\mathrm{D}.\alpha$ dans les premiers membres, et comme un premier terme dans les seconds membres.

On se tromperoit si l'on croyoit qu'on a aussi, sous la même condition,

$$\frac{1}{1.2.3}\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.\varsigma) = \tfrac{1}{3}\underline{\mathrm{D}}^2.\varsigma^3, \quad \frac{1}{1.2.3.4}\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.\varsigma)) = \tfrac{1}{4}\underline{\mathrm{D}}^3.\varsigma^4, \text{ etc.};$$

ainsi qu'il est aisé de le voir en développant.

---

345. Suivons encore une voie différente pour résoudre le problème du n.° 255, en supposant, pour plus de simplicité, que m soit $= -1$, de manière que ce problème se ramène à l'énoncé suivant :

Étant donnée la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(1)$$

on propose de la transformer en une autre de la forme

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(2)$$

la relation entre x et y étant donnée par l'équation

$$y = \frac{x}{\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}}. \qquad \ldots\ldots(3)$$

L'équation (3) donnant

$$x = y(\beta + \mathrm{D}.\beta.x + \mathrm{D}^2.\beta.x^2 + \mathrm{D}^3.\beta.x^3 + \text{etc.}), \qquad \ldots\ldots(4)$$

et

$$x^r = y^r(\beta^r + \mathrm{D}.\beta^r.x + \mathrm{D}^2.\beta^r.x^2 + \mathrm{D}^3.\beta^r.x^3 + \text{etc.}); \qquad \ldots\ldots(5)$$

on voit qu'il suffit d'éliminer x de la série (1); à cet effet, on peut substituer dans (1) à la place de x et de ses puissances les valeurs qu'offrent les seconds membres de (4) et de (5), et l'on aura un résultat mêlé de y et de x, dans lequel on fera de nouveau des substitutions pareilles à la place de x et de ses puissances; et en continuant ainsi on obtiendra une suite de termes affectés de y, y^2, y^3, etc., c'est-à-dire les premiers termes de la série (2). Cette manière est ce qu'on appelle la méthode des substitutions successives. On peut la simplifier et la rendre bien propre à faire trouver la loi que suivent les coëfficiens b, c, d, e, etc., par le procédé suivant.

Après avoir donné à la série (1) la forme

$$A + Bx + \mathrm{D}.B.x^2 + \mathrm{D}^2.B.x^3 + \mathrm{D}^3.B.x^4 + \text{etc.}, \qquad \ldots\ldots(6)$$

où B est considéré comme un premier terme, je tire de l'équation (4) celle-ci

$$1 = x^{-1}y(\beta + \mathrm{D}.\beta.x + \mathrm{D}^2.\beta.x^2 + \mathrm{D}^3.\beta.x^3 + \mathrm{D}^4.\beta.x^4 + \text{etc.}); \quad \ldots(7)$$

je multiplie le premier terme A de la série (6) par 1, premier membre de (7), et tous les autres termes de (6) par le second membre de (7); de cette manière la valeur de (6) ne change pas, et j'ai

$$A + \beta B.y \;\left.\begin{array}{r} +\,\beta\mathrm{D}.B \\ +\,\mathrm{D}.\beta.B \end{array}\right| xy \;\left.\begin{array}{r} +\,\beta\mathrm{D}^2.B \\ +\,\mathrm{D}.\beta.\mathrm{D}.B \\ +\,\mathrm{D}^2.\beta.B \end{array}\right| x^2y \;\left.\begin{array}{r} +\,\beta\mathrm{D}^3.B \\ +\,\mathrm{D}.\beta.\mathrm{D}^2.B \\ +\,\mathrm{D}^2.\beta.\mathrm{D}.B \\ +\,\mathrm{D}^3.\beta.\mathrm{D}.B \end{array}\right| x^3y \; + \text{etc.}, \quad \ldots(8)$$

expression

expression qu'on peut mettre sous la forme suivante (n.° 87), en regardant B et ς chacun comme un premier terme,

$$A + \varsigma B.y + \mathrm{D}.(\varsigma B).xy + \mathfrak{p}^2.(\varsigma B).x^2y + \mathfrak{p}^3.(\varsigma B).x^3y + \text{etc.} \quad ..(9)$$

Je multiplie à présent par 1 les deux premiers termes de (9), et les termes suivans par le second membre de (7), et j'ai

$$A+\varsigma B.y+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B).y^2 + \left.\begin{matrix}\varsigma\mathfrak{p}^2.(\varsigma B)\\ +\mathrm{D}.\varsigma.\mathrm{D}.(\varsigma B)\end{matrix}\right| xy^2 + \left.\begin{matrix}\varsigma\mathfrak{p}^3.(\varsigma B)\\ +\mathrm{D}.\varsigma.\mathfrak{p}^2.(\varsigma B)\\ +\mathfrak{p}^2.\varsigma.\mathrm{D}.(\varsigma B)\end{matrix}\right| x^2y^2 + \text{etc.}, \quad ...(10)$$

et en considérant $\mathrm{D}.(\varsigma B)$ et ς comme des premiers termes, je puis encore mettre cette série sous la forme suivante,

$$A+\varsigma B.y+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B).y^2+\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B)).xy^2+\mathfrak{p}^2.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B)).x^2y^2+\text{etc.} \quad ..(11)$$

Je multiplie maintenant par 1 les trois premiers termes de (11), et chacun des autres termes où x entre encore, par le second membre de (7); ce qui donne

$$A+\varsigma B.y+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B).y^2+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B)).y^3 + \left.\begin{matrix}\varsigma\mathfrak{p}^2.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B))\\ +\mathrm{D}.\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B))\end{matrix}\right| xy^3 + \text{etc.} \quad ..(12)$$

En regardant encore $\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B))$ comme un premier terme, le coëfficient de xy^3 dans (12) peut prendre la forme $\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B)))$; et en multipliant par 1 les quatre premiers termes de (12), et les suivans par le second membre de (7), j'ai

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \text{etc.} =$$
$$A+\varsigma B.y+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B).y^2+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.\,\varsigma B)).y^3+\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma\mathrm{D}.(\varsigma B))).y^4+\text{etc.} \quad ..(13)$$

La loi qui règne dans ces coëfficiens de (13) se présente d'elle-même; et si l'on fait attention à la marche du procédé, il est visible qu'elle s'étend à tous les coëfficiens suivans.

Ce cas se résoud aussi par la formule (IV) du n.° 259, si l'on y fait $m=1$ et $x_\varsigma^{-1}=y$; et en comparant les coëfficiens de y, y^2, y^3, etc. que donnent les deux solutions, on arrive à ce théorème :

On a toujours

$$\begin{aligned}&\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma B) = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\varsigma^2\mathrm{D}.A),\\ &\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma B)) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{p}^2.(\varsigma^3\mathrm{D}.A),\\ &\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma B))) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{p}^3.(\varsigma^4\mathrm{D}.A),\end{aligned} \quad .....(14)$$

et généralement

$$\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma\mathfrak{p}.(.......\varsigma\mathfrak{p}.(\varsigma B)...)) = \frac{1}{n}\mathfrak{p}^{n-1}.(\varsigma^n.\mathrm{D}.A);$$

pourvu que dans les premiers membres on regarde toujours ce qui suit chaque $\underset{c}{\mathrm{D}}$ comme un premier terme indépendant, de sorte qu'en développant on prenne toujours les dérivées divisées, en écrivant $\underset{c}{\mathrm{D}}^2.$ au lieu de $\underset{c}{\mathrm{D}}.\underset{c}{\mathrm{D}}.$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^3.$ au lieu de $\underset{c}{\mathrm{D}}.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.$, etc. C'est pour cette raison que, contre notre usage ordinaire, nous avons mis le c au-dessous de tous les D, quoiqu'ils n'aient chacun que l'indice 1. B et β au reste sont aussi des premiers termes. Dans les seconds membres β est toujours un premier terme et $\mathrm{D}.A$ un second.

346. Ayant la même série (1) que dans le numéro précédent, et l'équation

$$y = x(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^{-m}, \qquad \ldots(15)$$

on met cette équation sous cette forme

$$1 = x^{-1}y(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m,$$

ou, en développant,

$$1 = x^{-1}y(\beta^m + \underset{c}{\mathrm{D}}.\beta^m.x + \underset{c}{\mathrm{D}}^2.\beta^m.x^2 + \underset{c}{\mathrm{D}}^3.\beta^m.x^3 + \text{etc.}), \quad \ldots(16)$$

et en procédant comme nous venons de le faire dans ce qui précède, on trouve la série (1) égale à

$$A + \beta^m B.y + \beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B).y^2 + \beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B)).y^3 + \text{etc.} \quad \ldots(17)$$

Cette solution, comparée avec celle du n.° 259, donne ce qui suit.

THÉORÈME.

On a toujours

$$\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B) = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\beta^{2m}\mathrm{D}.A),$$
$$\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B)) = \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\beta^{3m}\mathrm{D}.A),$$
$$\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B))) = \tfrac{1}{4}\mathrm{D}^3.(\beta^{4m}\mathrm{D}.A), \qquad \ldots(18)$$

etc. et généralement

$$\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\ldots.\beta^m \underset{c}{\mathrm{D}}.(\beta^m B)\ldots))) = \frac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(\beta^{nm}\mathrm{D}.A).$$

En développant les premiers membres il faut regarder B et β^m comme des premiers termes, et encore comme un premier terme tout ce qui suit chaque $\underset{c}{\mathrm{D}}$; c'est-à-dire, mettre partout $\underset{c}{\mathrm{D}}^2.$ au lieu de $\underset{c}{\mathrm{D}}.\underset{c}{\mathrm{D}}.$, $\underset{c}{\mathrm{D}}^3.$ au lieu de $\underset{c}{\mathrm{D}}.\underset{c}{\mathrm{D}}^2.$, etc. On n'exécute les multiplications par β^m et par ses dérivées qu'après avoir fait la dérivation $\underset{c}{\mathrm{D}}$. Dans les seconds membres β et A sont des premiers termes.

347. Ce théorème s'applique à tous les cas précédens depuis n.° 341; car en réfléchissant au procédé que nous avons suivi, il est évident que, dans (15) et dans les formules (18), m peut être quelconque positif, négatif,

fractionnaire, etc. Ainsi, en faisant m successivement $= -1$ et $= 1$, et $B = \mathrm{D}.A = 1$, on a, sous les conditions du théorème,

$$\beta^{-1}\mathfrak{D}.\beta^{-1} = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\beta^{-2}, \qquad \beta\mathrm{D}.\beta = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\beta^{2},$$

$$\beta^{-1}\mathfrak{D}.(\beta^{-1}\mathfrak{D}.\beta^{-1}) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^{2}.\beta^{-3}, \qquad \beta\mathfrak{D}.(\beta\mathfrak{D}.\beta) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^{2}.\beta^{3},$$

$$\beta^{-1}\mathfrak{D}.(\beta^{-1}\mathfrak{D}.(\beta^{-1}\mathfrak{D}.\beta^{-1})) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^{3}.\beta^{-4}, \qquad \beta\mathfrak{D}.(\beta\mathfrak{D}.(\beta\mathfrak{D}.\beta)) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^{3}.\beta^{4},$$

etc. etc.

Comparez avec le n.° 344.

348. La forme des expressions précédentes et l'usage particulier que l'on y fait du signe $\dot{\mathfrak{D}}$ se retrouvent dans le problème suivant, qui est d'un genre différent de ceux que nous avons résolus jusqu'ici.

Transformer la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(1)$$

en une autre de cette forme

$$a + \frac{bx}{\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.}} + \frac{cx^2}{(\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.})(\beta'+\gamma' x+\delta' x^2+\text{etc.})}$$
$$+ \frac{dx^3}{(\beta+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.})(\beta'+\gamma' x+\delta' x^2+\text{etc.})(\beta''+\gamma'' x+\delta'' x^2+\text{etc.})} + \text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Je représente la série (2) par

$$a + bx\varsigma^{-1} + cx^2\varsigma^{-1}\varsigma'^{-1} + dx^3\varsigma^{-1}\varsigma'^{-1}\varsigma''^{-1} + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(3)$$

Puisque (1) est égale à (3), x étant quelconque, on a d'abord $a = A$; et après avoir ôté A d'une part et a de l'autre, et divisé par x, on trouve $B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \text{etc.} = b\varsigma^{-1} + cx\varsigma^{-1}\varsigma'^{-1} + dx^2\varsigma^{-1}\varsigma'^{-1}\varsigma''^{-1} + \text{etc.}$; je multiplie le premier membre par la valeur de ς et le second par ς même, et j'ai $\beta B + \mathfrak{D}.(\beta B).x + \mathfrak{D}^2.(\beta B).x^2 + \text{etc.} = b + cx\varsigma'^{-1} + dx^2\varsigma'^{-1}\varsigma''^{-1} + \text{etc.}$ Donc $b = \beta B$. Après avoir ôté βB du premier membre et b du second, je divise par x, puis je multiplie le premier membre par la valeur de ς' et le second par ς' même, et j'ai

$$\beta'\mathfrak{D}.(\beta B) + \mathfrak{D}.(\beta'\mathfrak{D}.(\beta B)).x + \mathfrak{D}^2.(\beta'\mathfrak{D}.(\beta B)).x^2 + \text{etc.} = c + dx\varsigma''^{-1} + \text{etc.}$$

Donc $c = \beta'\mathfrak{D}.(\beta B)$. En continuant ainsi, je trouverai les valeurs de d, e, etc., telles qu'on les voit ici

$$a = A, \qquad d = \beta''\mathfrak{D}.(\beta'\mathfrak{D}.(\beta B)),$$
$$b = \beta B, \qquad e = \beta'''\mathfrak{D}.(\beta''\mathfrak{D}.(\beta'\mathfrak{D}.(\beta B))),$$
$$c = \beta'\mathfrak{D}.(\beta B), \qquad \text{etc.}$$

La loi est évidente. On aura soin de regarder ce qui suit chaque $\mathfrak{D}$ comme un premier terme indépendant, et par conséquent de mettre $\mathfrak{D}^2.$ au lieu de $\mathrm{D}.\mathrm{D}.$, $\mathfrak{D}^3.$ au lieu de $\mathrm{D}.\mathfrak{D}^2.$, etc.

EULER, dans la seconde partie de son Calcul différentiel, chap. VIII, a résolu ce problème pour les cas des facteurs binomes $\beta+\gamma x$, $\beta'+\gamma' x$, etc., et pour celui des facteurs trinomes : il l'est ici pour des facteurs polynomes quelconques, avec l'avantage qu'on arrive facilement à une loi simple.

Les quantités β, γ, δ, etc., β', γ', δ', etc., $\beta'', \gamma'', \delta''$, etc. étant arbitraires, on peut aussi se servir de la solution précédente, et même en quelque sorte avec plus de généralité que de celle du n.° 257, pour rendre une série convergente à volonté.

---

349. Les formules de cet article conduisent quelquefois à des théorêmes qu'on fera bien de recueillir pour s'en servir dans l'occasion. En voici un qui peut servir d'exemple.

Si dans la formule (IV) du n.° 257, on met au lieu de ς sa valeur $\beta+\gamma x$ δx^2+ etc., partant au lieu de ς'^m la série $\beta'^m+\mathrm{D}.\beta'^m.x+\mathfrak{D}^2.\beta'^m.x^2+$ etc., et qu'après les substitutions on ordonne suivant les puissances de x; il est clair qu'on doit retrouver la série $A+Bx+Cx^2+$ etc. On aura donc

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}=$$

$$A+\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\beta^m.x \;\; \left.\begin{array}{r}+\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathrm{D}.\beta^m\\ +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\beta^{2m}\end{array}\right|x^2 \;\; \left.\begin{array}{r}+\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathfrak{D}^2.\beta^m\\ +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\mathrm{D}.\beta^{2m}\\ +\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\mathrm{D}.A.\beta^{-3m}).\beta^{3m}\end{array}\right|x^3$$

$$\left.\begin{array}{r}+\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathfrak{D}^3.\beta^m\\ +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\mathfrak{D}^2.\beta^{2m}\\ +\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\mathrm{D}.A.\beta^{-3m}).\mathrm{D}.\beta^{3m}\\ +\tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^3.(\mathrm{D}.A.\beta^{-4m}).\beta^{4m}\end{array}\right|x^4 \;\; +\text{etc.};$$

ce qui donne, pour le terme général, le théorême suivant :

On a toujours quels que soient A, β et m, β étant même arbitraire,

$$\mathfrak{D}^n.A=$$

$$\mathrm{D}.A.\beta^{-m}\mathfrak{D}^{n-1}.\beta^m+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-2m}).\mathfrak{D}^{n-2}.\beta^{2m}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}^2.(\mathrm{D}.A.\beta^{-3m}).\mathfrak{D}^{n-3}.\beta^{3m}$$
$$+\text{etc.}\ldots+\frac{1}{n-1}\mathfrak{D}^{n-2}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-(n-1)m}).\mathrm{D}.\beta^{(n-1)m}+\frac{1}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.(\mathrm{D}.A.\beta^{-nm}).\beta^{nm};$$

et le n.° 259 fait voir qu'on peut échanger entre eux $-m$ et $+m$.

ARTICLE

ARTICLE SIXIÈME.

Usages des dérivations dans le calcul différentiel.

350. Les quantités α, β, γ, δ, etc. qui entrent dans les dérivations ne dépendent pas nécessairement les unes des autres, elles peuvent être quelconques ; on voit donc que les cas où ces quantités elles-mêmes sont liées entre elles, soit en dérivant réellement les unes des autres, comme les différentielles dx, $\frac{d^2x}{1.2}$, etc., soit autrement, sont compris dans le cas général des dérivations ; et qu'ainsi le calcul différentiel peut être regardé comme un cas particulier de celui des dérivations. Comme nous avons donné des méthodes abrégées pour faire les dérivations, nous allons en montrer l'application aux différentiations ; elles serviront à simplifier la pratique du calcul différentiel, principalement dans les cas où les différentielles des variables sont elles-mêmes variables.

(I.)

351. Commençons par appliquer aux différentiations des fonctions à une seule variable les méthodes simplifiées de dérivation des §§. II et III de l'article premier.

Pour le faire avec plus de clarté, il ne sera pas inutile de montrer, mieux que nous ne l'avons fait jusqu'ici, les relations des dérivées avec les différentielles, et de fixer l'idée exacte qu'on doit attacher à celles-ci dans la vraie théorie du calcul différentiel.

Soit y une fonction quelconque de x, qu'on peut représenter par φx, que Δy marque la différence entre l'état primitif de y, et ce que devient cette même fonction lorsque la variable x augmente de la quantité quelconque Δx : nous nommons Δy la *différence entière*, ou simplement la *différence*, ou l'*increment* de y. On a coutume d'appeler Δy la *différence finie* ; mais comme il convient de bannir tout ce qui a rapport aux idées vagues d'infiniment-petits, nous croyons devoir omettre la qualification de *finie*.

La différence de la fonction y étant égale à $\varphi(x + \Delta x) - \varphi x$, on a, par les n.os 2 et 10,

$$\Delta y = \text{D}\varphi x . \Delta x + \frac{\text{D}^2\varphi x}{1.2} . (\Delta x)^2 + \frac{\text{D}^3\varphi x}{1.2.3} . (\Delta x)^3 + \text{etc.}, \quad \ldots (1)$$

ou bien, par les n.os 2, 10 et 39,

$$\Delta y = \text{D}.y.\Delta x + \text{D}^2.y.(\Delta x)^2 + \text{D}^3.y.(\Delta x)^3 + \text{etc.}, \qquad \ldots.(2)$$

où $\text{D}\phi x$ dérive de ϕx, $\text{D}^2\phi x$ de $\text{D}\phi x$, $\text{D}^3\phi x$ de $\text{D}^2\phi x$, toujours par la même loi. Les *différentielles* de la fonction y sont les termes des différens ordres qui composent la série égale à la différence Δy. Ces termes, si l'on en supprime les dénominateurs numériques 1.2, $1.2.3$, etc. se nomment simplement *différentielles*; et nous proposons de nommer *différentielles divisées* ces mêmes termes de la série de Δy, en conservant leurs dénominateurs numériques. Ainsi en particulier

$\text{D}\phi x.\Delta x$ ou $\text{D}.y.\Delta x$ est la *différentielle première* de ϕx ou y,
$\text{D}^2\phi x.(\Delta x)^2$ ou $\text{D}^2.y.(\Delta x)^2$ est la *différentielle seconde*,
$\text{D}^3\phi x.(\Delta x)^3$ ou $\text{D}^3.y.(\Delta x)^3$ est la *différentielle troisième*,
etc. etc.
$\frac{\text{D}^2\phi x}{1.2}.(\Delta x)^2$ ou $\text{D}^2.y.(\Delta x)^2$ est la *différentielle seconde divisée*,
$\frac{\text{D}^3\phi x}{1.2.3}.(\Delta x)^3$ ou $\text{D}^3.y.(\Delta x)^3$ est la *différentielle troisième divisée*,
etc. etc.

On voit que dans l'acception dans laquelle nous prenons le mot *différentielle*, il signifie simplement un terme, une portion de la différence; et que, comparées aux dérivées, les différentielles ne sont autre chose que les dérivées multipliées par les puissances respectives de la quantité Δx, par rapport auxquelles on ordonne le développement de $\phi(x + \Delta x)$. Les différentielles, pour nous, sont toujours de véritables quantités, finies, assignables, et non des infiniment-petits, ni même des limites (*).

352. De même qu'on se sert de la notation Δy pour marquer la différence entière de y, on est convenu d'employer les notations $\text{d}y$, d^2y, d^3y, etc. pour marquer ses différentielles successives, d étant une simple caractéristique; on a ainsi

$$\text{d}y = \text{D}\phi x.\Delta x,\ \text{d}^2y = \text{D}^2\phi x.(\Delta x)^2,\ \text{d}^3y = \text{D}^3\phi x.(\Delta x)^3,\ \text{etc.} \qquad ..(3)$$

$$\text{et } \Delta y = \text{d}y + \frac{1}{1.2}\text{d}^2y + \frac{1}{1.2.3}\text{d}^3y + \frac{1}{1.2.3.4}\text{d}^4y + \text{etc.} \qquad ..(4)$$

On a aussi généralement $\Delta x = \text{d}x + \frac{1}{1.2}\text{d}^2x + \text{etc.}$; mais si $\text{d}x$ n'est

(*) Ce qui est dit des différentielles non divisées dans ce numéro et dans le suivant est extrait de mon *Essai sur des principes de calcul différentiel et de calcul intégral indépendans de la théorie des infiniment-petits et de celle des limites*, mémoire qui fut présenté en 1789 à l'Académie des sciences de Paris.

plus variable, d^2x, d^3x, etc. sont zéro, et l'on a $\Delta x = dx$: changeant donc Δ en d dans les équations (3), elles deviennent

$$dy = D\phi x.dx,\ d^2y = D^2\phi x.dx^2,\ d^3y = D^3\phi x.dx^3,\ \text{etc.,} \quad \ldots(5)$$

Pour simplifier et pour nous conformer à l'usage reçu, nous écrivons dx^2, dx^3, dx^n au lieu de $(dx)^2$, $(dx)^3$, $(dx)^n$, nous le ferons tant qu'il n'y aura point d'équivoque à craindre, et alors nous indiquerons la différentielle de x^n par $d(x^n)$.

Les expressions $D\phi x.dx$, $D^2\phi x.dx^2$, etc. ont sur celles-ci $D\phi x.\Delta x$, $D^2\phi x.(\Delta x)^2$, etc. l'avantage de faire connoître par elles-même qu'elles ne représentent pas des différences entières, mais seulement des différentielles.

On tire des équations (5) celles-ci

$$\frac{dy}{dx} = D\phi x,\ \frac{d^2y}{dx^2} = D^2\phi x,\ \frac{d^3y}{dx^3} = D^3\phi x,\ \text{etc.,} \quad \ldots\ldots(6)$$

où les seconds membres $D\phi x$, $D^2\phi x$, $D^3\phi x$, etc., et partant aussi les premiers, sont des fonctions de x sans Δx ou dx, c'est-à-dire des quantités indépendantes de Δx ou dx. On a nommé ces expressions (6) des *rapports différentiels*, des *coëfficiens différentiels* ; comme elles sont précisément la même chose que ce que nous avons nommé jusqu'ici des dérivées, nous leur conserverons ce dernier nom. Substituant ces expressions dans la série (1) de Δy, et dénotant par y' la quantité $y + \Delta y$, c'est-à-dire, ce que devient y lorsque x devient $x + \Delta x$, on a

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\cdot\Delta x + \frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\cdot(\Delta x)^3 + \text{etc.} :$$

c'est le théorème de TAYLOR.

Comme $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. dans cette série sont indépendans de Δx et de dx, il est clair qu'il n'est pas nécessaire que dans cette série dx soit égal à Δx, dx peut être tout ce qu'on voudra, pourvu que dans dy, d^2y, etc. on prenne pour dx la même valeur ; on pourroit donc aussi regarder dx comme $= 1$ dans $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., ainsi que nous le faisons à l'égard de Dx dans $D\phi x$, $D^2\phi x$, etc.

Pour éviter les expressions fractionnaires, nous proposons d'introduire dans le calcul différentiel, pour désigner les différentielles divisées, des signes semblables à ceux qui nous ont si bien servi jusqu'à présent pour les dérivées divisées : nous proposons donc d'écrire $\underset{\cdot}{d}^2y$ au lieu de $\frac{d^2y}{1.2}$, $\underset{\cdot}{d}^3y$ au lieu de

$\frac{d^3y}{1.2.3}$, et en général ḑ$^n y$ au lieu de $\frac{d^n y}{1.2\ldots n}$, le dénominateur indiqué par le c au-dessous du d étant partout le produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à n qui est égal à l'indice de d, tout de même que n.° 39.

Nous désignerons même à l'avenir les coëfficiens différentiels $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{1.2.dx^2}$, $\frac{d^3\varphi x}{1.2.3.dx^3}$, dx étant invariable, par $\partial\varphi x$, ḑ$^2\varphi x$, ḑ$^3\varphi x$, etc., ce qui est la même chose que les dérivées $\text{D}\varphi x$, $\text{D}^2\varphi x$, $\text{D}^3\varphi x$, etc. : et même lorsqu'on regarde y comme fonction de x, et dx comme invariable, nous écrirons $\partial.y$, ḑ$^2.y$, ḑ$^3.y$, etc. au lieu de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{1.2.dx^2}$, $\frac{d^3.y}{1.2.3.dx^3}$, etc.; dans ce cas, il ne faut pas regarder y comme la variable, mais comme le signe abrégé de la fonction de la variable x. Il est essentiel de ne pas confondre les ∂ avec les d : les ∂ servent à indiquer des dérivées, les signes d désigneront toujours des différentielles, en conservant leur signification ordinaire. Nous n'avons pas voulu nous servir de points après les d, comme nous le faisons pour les D et les ∂, afin de ne pas trop nous écarter des notations reçues dans le calcul différentiel.

353. Après ces éclaircissemens, proposons-nous la question suivante :

Soit V ou φx une fonction quelconque de x, et que dx soit variable d'une manière quelconque, ensorte que la différentielle de dx soit d^2x, que celle de d^2x soit d^3x, et ainsi de suite; supposons de plus qu'on ait calculé $\partial\varphi x$, $\partial^2\varphi x$, $\partial^3\varphi x$, etc., c'est-à-dire $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$, etc., lorsque dx est constante : on demande à déduire les unes des autres, tout réduites et de la manière la plus prompte, les différentielles successives divisées et non divisées de V ou φx.

354. Puisque dx est variable, il faut considérer x lui-même comme une fonction connue ou inconnue d'une quantité t dont on regardera la différentielle dt comme invariable : ainsi représentant x par ft, si t devient $t+\Delta t$, ou $t+\tau$ en mettant τ au lieu de Δt, x deviendra

$$x+\frac{dx}{dt}\cdot\tau+\frac{d^2x}{1.2.dt^2}\cdot\tau+\frac{d^3x}{1.2.3.dt^3}\cdot\tau^3+\text{etc.}, \quad \ldots.(1)$$

ou, par nos notations,

$$x+\frac{\text{ḑ}x}{dt}\cdot\tau+\frac{\text{ḑ}^2x}{dt^2}\cdot\tau^2+\frac{\text{ḑ}^3x}{dt^3}\cdot\tau^3+\text{etc.} : \quad \ldots.(2)$$

et,

et, puisque $V = \varphi x$, on aura aussi $V = \varphi f t = F t$, en mettant F au lieu du double signe φf; donc V, qui est fonction prochaine de x, peut aussi être regardé comme fonction éloignée de t; et, lorsque t devient $t + \tau$, l'on aura pour $V + \Delta V$,

$$\left.\begin{array}{l} V + \dfrac{dV}{dt}\cdot\tau + \dfrac{d^2V}{1.2.dt^2}\cdot\tau^2 + \dfrac{d^3V}{1.2.3.dt^3}\cdot\tau^3 + \text{etc.} = \\ \varphi\left(x + \dfrac{dx}{dt}\cdot\tau + \dfrac{d^2x}{1.2.dt^2}\cdot\tau^2 + \dfrac{d^3x}{1.2.3.dt^3}\cdot\tau^3 + \text{etc.}\right), \end{array}\right\} \ldots (3)$$

ou bien, en employant nos notations,

$$\left.\begin{array}{l} V + \dfrac{dV}{dt}\cdot\tau + \dfrac{d^2V}{dt^2}\cdot\tau^2 + \dfrac{d^3V}{dt^3}\cdot\tau^3 + \text{etc.} = \\ \quad \varphi\left(x + \dfrac{dx}{dt}\cdot\tau + \dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\tau^2 + \dfrac{d^3x}{dt^3}\cdot\tau^3 + \text{etc.}\right). \end{array}\right\} \ldots (4)$$

Cette équation devant subsister quel que soit τ, il n'y aura qu'à développer le second membre suivant les puissances de τ; le coëfficient de τ^n de ce développement sera égal à $\dfrac{d^nV}{1.2\ldots n.dt^n}$, c'est-à-dire à la dérivée divisée de V de l'ordre n; et, en multipliant ce coëfficient par dt^n, il sera égal à d^nV, c'est-à-dire à la différentielle divisée de V de l'ordre n.

355. Pour effectuer ce développement par nos règles du §. II de l'article premier, il suffit de comparer le second membre de l'équation (3) ou (4) avec

$$\varphi(\alpha + \beta\tau + \gamma\tau^2 + \delta\tau^3 + \text{etc.}),$$

ou

$$\varphi(\alpha + \text{D}.\alpha.\tau + \text{D}^2.\alpha.\tau^2 + \text{D}^3.\alpha.\tau^3 + \text{etc.}).$$

Cette comparaison donne $\alpha = x$, $\beta = \text{D}.\alpha = \dfrac{dx}{dt}$, $\gamma = \text{D}^2.\alpha = \dfrac{d^2x}{1.2.dt^2}$ $= \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\delta = \text{D}^3.\alpha = \dfrac{d^3x}{1.2.3.dt^3}$, $= \dfrac{d^3x}{dt^3}$ etc., et fait voir qu'on peut appliquer ici la règle du n.° 30, avec cette seule modification qu'en mettant d au lieu de D, chaque fois que, d'après la règle du n.° 30, on change une lettre dans la suivante, ou qu'on change $\text{D}^r.\alpha$ en $\text{D}^{r+1}.\alpha$, ici il faut augmenter de l'unité l'indice de d devant x, diviser par cet exposant augmenté et par dt, ou changer $\dfrac{d^rx}{dt^r}$ en $\dfrac{d^{r+1}x}{dt^{r+1}}$. En suivant ainsi la règle du n.° 30, on déduira les unes des autres les dérivées successives de V, déjà tout réduites et sans qu'on ait besoin de faire ni substitutions ni réductions, comme il suit:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{1.2.\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{1.2.\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi x}{1.2.\mathrm{d}t^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3V}{1.2.3.\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^3x}{1.2.3.\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi x}{1.2.\mathrm{d}x^2}\cdot 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2x}{1.2.\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^3\varphi x}{1.2.3.\mathrm{d}x^3}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4V}{1.2.3.4.\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}^4x}{1.2.3.4.\mathrm{d}t^4} + \frac{\mathrm{d}^2\varphi x}{1.2.\mathrm{d}x^2}\left\{2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^3x}{1.2.3.\mathrm{d}t^3} + \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{1.2.\mathrm{d}t^2}\right)^2\right\}$$
$$+ \frac{\mathrm{d}^3\varphi x}{1.2.3.\mathrm{d}x^3}\cdot 3\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2x}{1.2.\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^4\varphi x}{1.2.3.4.\mathrm{d}x^4}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^4,$$

et ainsi de suite.

356. Si au lieu des dérivées, on veut déduire les unes des autres les différentielles divisées ; on voit que, tous les termes de chacune des formules (5) que nous venons de trouver étant divisés par la même puissance de $\mathrm{d}t$, il suffit de multiplier par les $\mathrm{d}t$; ainsi, en suivant la règle du n.° 30, et faisant usage des notations proposées au n.° 352, on déduira sur-le-champ les unes des autres les différentielles de $V = \varphi x$ tout réduites, comme il suit :

$$\mathrm{d}V = \partial\varphi x.\mathrm{d}x,$$
$$\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2V = \partial\varphi x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x + \underset{\varsigma}{\partial}^2\varphi x.\mathrm{d}x^2,$$
$$\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^3V = \partial\varphi x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^3x + \underset{\varsigma}{\partial}^2\varphi x.2\mathrm{d}x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x + \underset{\varsigma}{\partial}^3\varphi x.\mathrm{d}x^3,$$
$$\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^4V = \partial\varphi x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^4x + \underset{\varsigma}{\partial}^2\varphi x.\{2\mathrm{d}x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^3x + (\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x)^2\} + \underset{\varsigma}{\partial}^3\varphi x.3\mathrm{d}x^2.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x + \underset{\varsigma}{\partial}^4\varphi x.\mathrm{d}x^4,$$
$$\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^5V = \partial\varphi x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^5x + \underset{\varsigma}{\partial}^2\varphi x.\{2\mathrm{d}x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^4x + 2\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^3x\}$$
$$+ \underset{\varsigma}{\partial}^3\varphi x.\{3\mathrm{d}x^2.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^3x + 3\mathrm{d}x(\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x)^2\} + \underset{\varsigma}{\partial}^4\varphi x.4\mathrm{d}x^3.\underset{\varsigma}{\mathrm{d}}^2x + \underset{\varsigma}{\partial}^5\varphi x.\mathrm{d}x^5,$$

et ainsi de suite.

357. Si l'on veut déduire les unes des autres les différentielles non divisées de V, ce qu'on demande ordinairement dans le calcul différentiel ; avant de faire sur le développement de la différentielle donnée d^nV, les dérivations dont nous venons de parler dans le numéro précédent, il suffit, conformément à la règle du n.° 35, de multiplier tous les termes de d^nV par l'indice $n+1$ de la différentielle suivante $\mathrm{d}^{n+1}V$. On aura ainsi :

$$\mathrm{d}V = \partial\varphi x.\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}^2V = \partial\varphi x.\mathrm{d}^2x + \partial^2\varphi x.\mathrm{d}x^2,$$
$$\mathrm{d}^3V = \partial\varphi x.\mathrm{d}^3x + \partial^2\varphi x.3\mathrm{d}x.\mathrm{d}^2x + \partial^3\varphi x.\mathrm{d}x^3,$$

$$d^4V = \partial\phi x.d^4x + \partial^2\phi x.\{4dx.d^3x + 3(d^2x)^2\} + \partial^3\phi x.6dx^2.d^2x + \partial^4\phi x.dx^4,$$

$$d^5V = \partial\phi x.d^5x + \partial^2\phi x.\{5dx.d^4x + 10d^2x.d^3x\}$$
$$+ \partial^3\phi x.\{10dx^2.d^3x + 15dx.(d^2x)^2\} + \partial^4\phi x.10dx^3.d^2x + \partial^5\phi x.dx^5,$$

$$d^6V = \partial\phi x.d^6x + \partial^2\phi x.\{6dx.d^5x + 15d^2x.d^4x + 10(d^3x)^2\}$$
$$+ \partial^3\phi x.\{15dx^2.d^4x + 30dx.2d^2x.d^3x + 15(d^2x)^3\}$$
$$+ \partial^4\phi x.\{20dx^3.d^3x + 45dx^2.(d^2x)^2\} + \partial^5\phi x.15dx^4.d^2x + \partial^6\phi x.dx^6.$$

On continuera ainsi, sans s'arrêter, autant qu'on voudra : les coëfficiens numériques réduits se forment toujours sans embarras à mesure qu'on avance.

358. L'importance des procédés dont nous venons de faire usage, nous engage d'en donner l'énoncé, et nous fait penser qu'on nè taxera pas de superflues les règles suivantes, quoiqu'elles ne soient qu'une traduction de celles des n.os 30 et 35, traductions très-faciles à faire, lorsqu'on a bien saisi les relations entre les différentielles et les dérivées en général.

RÈGLE. *Pour déduire une différentielle divisée d'une fonction de x, d'un ordre quelconque $m+1$, de celle de l'ordre précédent m, c'est-à-dire pour déduire le développement de $\text{d}^{m+1}\phi x$ de celui de $\text{d}^m\phi x$, $\text{d}x$ étant variable:*

Dans chaque terme du développement donné de $\text{d}^m\phi x$, on ne fait varier que la seule différentielle de x de l'ordre le plus haut, et en outre celle de l'ordre inférieur de l'unité, si elle se trouve dans le terme : on augmente de l'unité l'indice de chaque différentielle de x qu'on fait varier, et l'on divise par cet indice augmenté, c'est-à-dire on écrit $\text{d}^{n+1}x$ au lieu de $\text{d}^n x$. On divise de plus par l'exposant de chaque puissance nouvelle qui se forme dans le cours du calcul.

359. RÈGLE. *Pour déduire une différentielle non divisée $\text{d}^{m+1}\phi x$ de celle de l'ordre inférieur de l'unité $\text{d}^m\phi x$, qu'on suppose développée ; multipliez chacun des termes du développement de $\text{d}^m\phi x$ par $m+1$, indice de l'ordre de la différentielle cherchée ; puis suivez exactement la règle précédente.*

360. Ayant la différentielle $\text{d}^m\phi x$ développée, si l'on veut en déduire celle qui la précède, $\text{d}^{m-1}\phi x$, et qui est de l'ordre moindre de l'unité, on conclura sans peine de la règle du n.° 36 une règle pareille et inverse de celle ci-dessus n.° 358. Le lecteur en formera facilement l'énoncé, s'il le juge nécessaire.

361. Le principal avantage de nos méthodes abrégées consiste à faire trouver sur-le-champ une différentielle d'un ordre quelconque, où dx est variable, sans passer par les différentielles des ordres inférieurs. Faisons donc encore voir comment le théorème du n.° 20 et les règles données dans le § III de l'article premier s'appliquent à la solution du problème suivant.

Soit V ou φx une fonction quelconque de x, et que dx soit variable, on demande immédiatement la différentielle divisée et non divisée de l'ordre n de V; c'est-à-dire le développement de $\mathfrak{d}^n V$ ou $\mathfrak{d}^n\varphi x$ et de $d^n V$ ou $d^n\varphi x$, en supposant qu'on ait déjà calculé ou qu'on connoisse $\partial\varphi x$, $\tilde{\partial}^2\varphi x$, $\tilde{\partial}^3\varphi x$, etc.

362. Pour la différentielle divisée, on a d'abord par le n.° 20,

$$\mathfrak{d}^n\varphi x = \tilde{\partial}^n\varphi x.(dx)^n + \tilde{\partial}^{n-1}\varphi x.d(dx)^{n-1} + \tilde{\partial}^{n-2}\varphi x.\mathfrak{d}^2(dx)^{n-2}$$
$$+ \text{etc.} + \tilde{\partial}^2\varphi x.\mathfrak{d}^{n-2}(dx)^2 + \partial\varphi x.\mathfrak{d}^{n-1}(dx):$$

il ne reste plus qu'à développer $(dx)^n$, $d(dx)^{n-1}$, $\mathfrak{d}^2(dx)^{n-2}$, etc., en appliquant la règle du n.° 43; ou à déduire les uns des autres les développemens de $\mathfrak{d}^{n-1}(dx)$, $\mathfrak{d}^{n-2}(dx)^2$, $\mathfrak{d}^{n-3}(dx)^3$, etc., dans l'ordre inverse du précédent, en appliquant la règle du n.° 47 : on considérera toujours dx comme une première quantité, c'est-à-dire qu'on écrira $\mathfrak{d}^n x$ au lieu de $\mathfrak{d}^{n-1}(dx)$; $\mathfrak{d}^{n-1}x$ au lieu de $\mathfrak{d}^{n-2}(dx)$, etc.

Exemple. Supposons qu'on demande la différentielle sixième divisée $\mathfrak{d}^6\varphi x$. On aura sur-le-champ :

$$\mathfrak{d}^6\varphi x = \tilde{\partial}^6\varphi x.dx^6 + \tilde{\partial}^5\varphi x.5dx^4.\mathfrak{d}^2x + \tilde{\partial}^4\varphi x.\{4dx^3.\mathfrak{d}^3x. + 6dx^2(\mathfrak{d}^2x)^2\}$$
$$+ \tilde{\partial}^3\varphi x.\{3dx^2.\mathfrak{d}^4x + 3dx.2\mathfrak{d}^2x.\mathfrak{d}^3x + (\mathfrak{d}^2x)^3\}$$
$$+ \tilde{\partial}^2\varphi x.\{2dx.\mathfrak{d}^5x + 2d^2x.\mathfrak{d}^4x + (d^3x)^2\} + \partial\varphi x.\mathfrak{d}^6x.$$

363. Pour la différentielle $d^n\varphi x$ non divisée, la règle se déduit des n.os 20 et 45, et on peut la réduire à l'énoncé suivant :

Règle. *Après avoir écrit successivement* $\partial^n\varphi x$, $\partial^{n-1}\varphi x$, $\partial^{n-2}\varphi x$, *etc.; pour déduire les uns des autres et de* dx^n, *facteur de* $\partial^n\varphi x$, *les facteurs de* $\partial^{n-1}\varphi x$, $\partial^{n-2}\varphi x$, *etc., dans le facteur trouvé on multiplie chaque terme par l'exposant de la puissance de* dx *qui l'affecte, puis on diminue cet exposant de l'unité. Après cette préparation, on fait varier dans chaque terme du facteur trouvé la différentielle de* dx *de l'ordre le plus haut, et encore celle de l'ordre immédiatement moindre que la plus haute, si elle se trouve dans le terme : on divise par chaque indice qu'on a augmenté, et de plus par l'exposant de chaque nouvelle puissance qui se forme dans le cours de l'opération.*

De

De cette manière, de $\partial^n\varphi x.dx^n$, différentielle $n^{ième}$ de φx, dx étant invariable, on déduira, sur-le-champ et sans s'arrêter, tous les termes qu'il faut ajouter à $\partial^n\varphi x.dx^n$, pour avoir $d^n\varphi x$, lorsque dx est variable.

Exemples. On demande le développement de $d^6\varphi x$ et de $d^7\varphi x$, dx étant variable.

On a $\partial^6\varphi x.dx^6$ pour premier terme de $d^6\varphi x$; de là on déduit les autres comme il suit :

$$\begin{aligned} d^6\varphi x &= \partial^6\varphi x.dx^6 + \partial^5\varphi x.\frac{6.5}{2}dx^4.d^2x \\ &+ \partial^4\varphi x.\left\{\frac{6.5.4}{2.3}dx^3.d^3x + \frac{6.5.4.3}{2.2.2.}dx^2.(d^2x)^2\right\} \\ &+ \partial^3\varphi x.\left\{\frac{6.5.4.3.}{2.3.4}dx^2.d^4x + \frac{6.5.4.3.2}{2.2.2.3}dx.2d^2x.d^3x + \frac{6.5.4.3.2.1}{2.2.2.2.3}(d^2x)^3\right\} \\ &+ \partial^2\varphi x.\left\{\frac{6.5.4.3.2}{2.3.4.5}dx.d^5x + \frac{6.5.4.3.2}{2.2.2.3.4}2d^2x.d^4x + \frac{6.5.4.3.2}{2.2.2.3.3}(d^3x)^2\right\} \\ &+ \partial\varphi x.d^6x. \end{aligned}$$

Quand on aura acquis un peu d'habitude à pratiquer la règle, on fera bien de réduire tout de suite les coëfficiens numériques, et l'on trouvera ainsi sur-le-champ

$$\begin{aligned} d^6\varphi x &= \partial^6\varphi.dx^6 + \partial^5\varphi x.15dx^4.d^2x + \partial^4\varphi x.\{20dx^3.d^3x + 45dx^2.(d^2x)^2\} \\ &+ \partial^3\varphi x\{15dx^2.d^4x + 30dx.2d^2x.d^3x + 15(d^2x)^3\} \\ &+ \partial^2\varphi x.\{6dx.d^5x + 15d^2x.d^4x + 10(d^3x)^2\} + \partial\varphi x.d^6x. \end{aligned}$$

On aura pareillement, pour $d^7\varphi x$, en déduisant tout du seul premier terme $\partial^7\varphi x.dx^7$,

$$\begin{aligned} d^7\varphi x &= \partial^7\varphi x.dx^7 + \partial^6\varphi x.21dx^5.d^2x \\ &+ \partial^5\varphi x.\{35dx^4.d^3x + 105dx^3(d^2x)^2\} \\ &+ \partial^4\varphi x.\{35dx^3.d^4x + 210dx^2.d^2x.d^3x + 105dx.(d^2x)^3\} \\ &+ \partial^3\varphi x.\{21dx^2.d^5x + 105dx.d^2x.d^4x + 70dx.(d^3x)^2 + 105(d^2x)^2.d^3x\} \\ &+ \partial^2\varphi x.\{7dx.d^6x + 21d^2x.d^5x + 35d^3x.d^4x\} + \partial\varphi x.d^7x. \end{aligned}$$

364. On formera aussi sans peine, d'après les n.os 47 et 49, une règle pour calculer sur-le-champ la différentielle divisée $d^n\varphi x$, ou, d'après le n.° 50, une règle pour calculer la différentielle non divisée $d^n\varphi x$, en partant, non du terme $\partial^n\varphi x.dx^n$ ou $\partial^n\varphi x.dx^n$, mais bien du terme $\partial\varphi x.d^nx$ ou $\partial\varphi x.d^nx$. Comme ces sortes de traductions de règles n'ont point de difficulté, je les laisse à faire au lecteur.

365. Lorsqu'on a une fonction quelconque de x, et que $\mathrm{d}x$ est invariable, nos méthodes abrégées de dérivation servent encore, soit à faciliter les différentiations successives, soit à faire trouver immédiatement l'expression de la dérivée ou de la différentielle d'un ordre quelconque. Des exemples vont en indiquer la manière.

Soit $V = \varphi\{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4\}$,

pour en avoir la différentielle de l'ordre n, $\mathrm{d}x$ étant invariable ; il est visible qu'en mettant $x + \mathrm{d}x$ à la place de x, la différentielle divisée de l'ordre n n'est autre chose que le terme affecté de $\mathrm{d}x^n$ dans le développement de

$$\varphi\{a + b(x+\mathrm{d}x) + c(x+\mathrm{d}x)^2 + d(x+\mathrm{d}x)^3 + e(x+\mathrm{d}x)^4\}.$$

Je développe d'abord le polynome de cette fonction suivant les puissances de $\mathrm{d}x$, ce qui se fait très-facilement en prenant les différentielles successives divisées du polynome $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, $\mathrm{d}x$ étant constante ; on trouve ainsi

$$\left\{\begin{matrix} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + (b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3)\mathrm{d}x \\ + (c + 3dx + 6ex^2)\mathrm{d}x^2 + (d + 4ex)\mathrm{d}x^3 + e.\mathrm{d}x^4 \end{matrix}\right\},$$

formule qu'on peut représenter ainsi, en faisant $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = X$, $\varphi\{X + \partial.X.\mathrm{d}x + \mathfrak{d}^2.X.\mathrm{d}x^2 + \mathfrak{d}^3.X.\mathrm{d}x^3 + \mathfrak{d}^4.X.\mathrm{d}x^4\}$:

je la mets sous la forme

$$V = \varphi\{\alpha + \beta.\mathrm{d}x + \gamma.\mathrm{d}x^2 + \delta.\mathrm{d}x^3 + \varepsilon.\mathrm{d}x^4\}.$$

On peut appliquer à présent nos règles de dérivation en faisant varier α, β, etc. ; et l'on aura, pour la différentielle $n^{\text{ième}}$ divisée et non divisée,

$$\mathfrak{d}^n V = \mathfrak{p}^n.\varphi\alpha.\mathrm{d}x^n, \quad \text{et } \mathrm{d}^n V = \mathrm{D}^n.\varphi\alpha.\mathrm{d}x^n ;$$

développant la première expression par le n.° 22, on a pour le coëfficient de $\mathrm{d}x^n$,

$$\mathfrak{d}^n.V = \mathfrak{p}^n\varphi\alpha.\beta^n + \mathfrak{p}^{n-1}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \mathfrak{p}^{n-2}\varphi\alpha.\mathfrak{p}^2\beta^{n-2} + \mathfrak{p}^{n-3}\varphi\alpha.\mathfrak{p}^3.\beta^{n-3} + \mathfrak{p}^{n-4}\varphi\alpha.\mathfrak{p}^4\beta^{n-4} + \text{etc.};$$

on développera les quantités en β par la règle du n.° 43, puis on remettra au lieu de α, β, γ, δ, ε leurs valeurs : la série sera toujours terminée.

Si l'on veut avoir la dérivée non divisée, on aura par le n.° 45

$$\partial^n.V = \mathrm{D}^n\varphi\alpha.\beta^n + \mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha.n.\mathrm{D}.\beta^{n-1} + \mathrm{D}^{n-2}\varphi\alpha.n(n-1)\mathfrak{p}^2.\beta^{n-2} + \mathrm{D}^{n-3}\varphi\alpha.n(n-1)(n-2)\mathfrak{p}^3.\beta^{n-3} + \text{etc.} :$$

on aura soin, dans les développemens, de regarder ε comme une dernière quantité dont la dérivée est zéro.

366. Prenons un cas moins général; soit, par exemple,

$$V = (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)^r;$$

$\varphi\alpha$ ici devient $= \alpha^r$, et l'on a

$$\begin{aligned}
\partial^n.V &= r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1).\alpha^{r-n}.\beta^n \\
&+ r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2).\alpha^{r-n+1}.n(n-1)\beta^{n-2}\gamma \\
&+ r(r-1)(r-2)\dots(r-n+3).\alpha^{r-n+2}\left\{\begin{aligned} &n(n-1)(n-2)\beta^{n-3}\delta \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\beta^{n-4}\gamma^2 \end{aligned}\right\} \\
&+ r(r-1)(r-2)\dots(r-n+4).\alpha^{r-n+3}\left\{\begin{aligned} &n(n-1)\dots(n-3)\beta^{n-4}.\varepsilon \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-4)}{1\,.\,2}\beta^{n-5}.2\gamma\delta \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\beta^{n-6}.\gamma^3 \end{aligned}\right\} \\
&+ r(r-1)(r-2)\dots(r-n+5)\alpha^{r-n+4}\left\{\begin{aligned} &\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{1\,.\,2}\beta^{n-6}.(2\gamma\varepsilon + \delta^2) \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}\beta^{n-7}.3\gamma^2\delta \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\beta^{n-8}.\gamma^4 \end{aligned}\right\} \\
&+ \text{etc.} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

La série se terminera toujours d'elle-même si n est entier positif.

367. Pour prendre un cas plus particulier encore et renfermé dans le précédent, soit $V = (a + bx + cx^2)^r$; on aura à développer $(\alpha + \beta.dx + \gamma.dx^2)^r$, δ et ε étant zéro, et la formule du numéro précédent donnera

$$\partial^n(a + bx + cx^2)^r =$$

$$r(r-1)\dots(r-n+1)\alpha^{r-n}\beta^n\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{n(n-1)}{r-n+1}\,\frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(r-n+1)(r-n+2)}\,\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-5)}{2.3(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\,\frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^6} + \text{etc.} \end{aligned}\right\},$$

où $\alpha = a + bx + cx^2$, $\beta = b + 2cx$, $\gamma = c$.

Cette formule a été donnée par LAGRANGE, Mémoires de Berlin pour 1772, page 216. La formule plus générale du numéro précédent se calcule par nos procédés avec autant de facilité que celle-ci, et c'est un avantage de nos méthodes de dérivation.

Soit $z = \text{arc.}\sin x$; on a $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, et faisant $\frac{dz}{dx} = V$, on a $V = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donne $r = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $\alpha = 1 - x^2$, $\mathit{6} = -2x$, $\gamma = -1$; partant $\frac{\alpha\gamma}{\mathit{6}^2} = -\frac{1-x^2}{2^2x^2}$, et

$$\frac{d^nV}{dx^n} = \frac{d^{n+1}(\text{arc.}\sin x)}{dx^{n+1}} =$$

$$1.3.5.7..(2n-1)\frac{x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{n(n-1)}{2n-1}\,\frac{1-x^2}{2x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}\,\frac{(1-x^2)^2}{2^2x^4}\\ + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-5)}{2.3(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\,\frac{(1-x^2)^3}{2^3x^6} + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Soit encore $z = \text{arc.}\,\text{tang}\,x$; on a $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$; donc, faisant $V = \frac{dz}{dx} = (1+x^2)^{-1}$, on a $r = -1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $\alpha = 1 + x^2$, $\mathit{6} = 2x$, $\gamma = 1$; donc $\frac{\alpha\gamma}{\mathit{6}^2} = \frac{1+x^2}{2^2x^2}$, et l'on aura

$$\frac{d^nV}{dx^n} = \frac{d^{n+1}(\text{arc.}\,\text{tang}\,x)}{dx^{n+1}} =$$

$$\mp 1.2.3.4\ldots n\,\frac{2^nx^n}{(1+x^2)^{n+1}}\left\{\begin{array}{l}1 - (n-1)\frac{1+x^2}{2^2x^2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\,\frac{(1+x^2)^2}{2^4x^4}\\ - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(1+x^2)^3}{2^6x^6} + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

dans $\mp$ le signe supérieur est pour n impair et l'inférieur pour n pair.

368. Mais rarement, en mettant $x + dx$ au lieu de x dans la quantité affectée du signe de fonction, le développement de cette quantité, ordonné suivant les puissances de dx, est terminé ; il va ordinairement à l'infini, de sorte que la fonction devient

$$\varphi(\alpha + \mathit{6}.dx + \gamma.dx^2 + \delta.dx^3 + \varepsilon.dx^4 + \text{etc. à l'infini}) ;$$

or cette expression, étant de la forme de celle du n.° 20, se développe de la même manière, et on trouve sur-le-champ la différentielle de l'ordre quelconque n, en cherchant par les règles du §. III de l'article premier, le terme affecté de dx^n, terme qui sera toujours composé d'un nombre fini de parties.

369. Voici une observation que nous croyons ne pas devoir passer sous silence. Il y a cette différence entre le signe ∂ et le signe D que, placés l'un et l'autre devant la même expression, ∂ n'affectera que les x, et D que les quantités

quantités qui multiplient les x et qu'on regarde comme constantes dans le calcul différentiel : ainsi on a

$$\mathrm{D}^2 a^r x^m = \frac{r.r-1}{1.2} a^{r-2} x^m, \text{ et } \eth^2 a^r x^m = \frac{m.m-1}{1.2} a^r x^{m-2}.$$

Mais à l'égard du polynome $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc., je dis que l'on a

$$\eth^n(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = \mathrm{D}^n.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.});$$

et qu'ainsi on peut changer les dérivées relatives à x, dx étant constante, en dérivées relatives à α, β, γ, etc.

En effet, on aura, en faisant varier x et divisant par dx,

$$\eth^n(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} + \mathrm{D}^n.\alpha.x^n + \mathrm{D}^{n+1}.\alpha.x^{n+1} + \mathrm{D}^{n+2}.\alpha.x^{n+2} + \text{etc.}) =$$

$$\mathrm{D}^n.\alpha + (n+1)\mathrm{D}^{n+1}.\alpha.x + \frac{n+1.n+2}{1.2}\mathrm{D}^{n+2}.\alpha.x^2 + \frac{n+1.n+2.n+3}{1.2.3}\mathrm{D}^{n+3}.\alpha.x^3 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{D}^n.\alpha + \mathrm{D}.\mathrm{D}^n.\alpha.x + \mathrm{D}^2.\mathrm{D}^n.\alpha.x^2 + \mathrm{D}^3.\mathrm{D}^n.\alpha.x^3 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{D}^n.(\alpha + \mathrm{D}.\alpha.x + \mathrm{D}^2.\alpha.x^2 + \mathrm{D}^3.\alpha.x^3 + \text{etc.}),$$

ce qui est précisément le second membre de l'équation qu'il falloit démontrer.

On prouve de même que l'on a plus généralement

$$\eth^n\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = \mathrm{D}^n.\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}).$$

En effet, le premier membre devient en développant

$$\eth^n\{\varphi\alpha + \mathrm{D}.\varphi\alpha.x + \mathrm{D}^2.\varphi\alpha.x^2 + \text{etc.} + \mathrm{D}^n.\varphi\alpha.x^n + \mathrm{D}^{n+1}.\varphi\alpha.x^{n+1} + \text{etc.}\}$$

$$= \mathrm{D}^n.\varphi\alpha + (n+1)\mathrm{D}^{n+1}.\varphi\alpha.x + \frac{n+1.n+2}{1.2}\mathrm{D}^{n+2}.\varphi\alpha.x^2 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{D}^n.\varphi\alpha + \mathrm{D}.\mathrm{D}^n.\varphi\alpha.x + \mathrm{D}^2.\mathrm{D}^n.\varphi\alpha.x^2 + \mathrm{D}^3.\mathrm{D}^n.\varphi\alpha.x^3 + \text{etc.}$$

$$= \mathrm{D}^n.(\varphi\alpha + \mathrm{D}.\varphi\alpha.x + \mathrm{D}^2.\varphi\alpha.x^2 + \mathrm{D}^3.\varphi\alpha.x^3 + \text{etc.})$$

$$= \mathrm{D}^n.\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}).$$

On a aussi $\mathrm{D}^m.\eth^n\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}) = \mathrm{D}^m.\mathrm{D}^n.\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$.

370. Faisons à présent des applications des formules de l'article second aux différentielles divisées et non divisées.

On demande d'abord à trouver immédiatement la différentielle divisée et celle non divisée de l'ordre quelconque n du produit xy, c'est-à-dire le développement de $\mathfrak{d}^n(xy)$ et celui de $d^n(xy)$, y étant une fonction de x et dx étant variable aussi bien que dy.

Puisque dx est variable et y fonction de x, il faut regarder x et y chacun comme une fonction d'une même quantité t dont dt est invariable, et faisant

$V = xy$ et $\Delta t = \tau$, on aura

$$V + \frac{dV}{dt}\cdot\tau + \frac{d^2V}{dt^2}\cdot\tau^2 + \frac{d^3V}{dt^3}\cdot\tau^3 + \text{etc.} =$$

$$(x + \frac{dx}{dt}\cdot\tau + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\tau^2 + \text{etc.})(y + \frac{dy}{dt}\cdot\tau + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\tau^2 + \text{etc.});$$

comparant avec le n.° 86, le théorème du n.° 87 donne sur-le-champ

$$d^nV = d^n(xy) =$$

$$x d^n y + dx.d^{n-1}y + d^2x.d^{n-2}y + d^3x.d^{n-3}y + d^4x.d^{n-4}y + \text{etc.}$$
$$+ d^{n-4}x.d^4y + d^{n-3}x.d^3y + d^{n-2}x.d^2y + d^{n-1}x.dy + d^nx.y.$$

On aura, par le n.° 95, pour la différentielle $n^{\text{ième}}$ non divisée,

$$d^nV = d^n(xy) =$$

$$x.d^ny + ndx.d^{n-1}y + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}d^2x.d^{n-2}y + \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}d^3x.d^{n-3}y + \text{etc.}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1\,.\,2\,.\,3}d^{n-3}x.d^3y + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}d^{n-2}x.d^2y + nd^{n-1}x.dy + d^nx.y,$$

ou les coëfficiens numériques en n sont ceux de la puissance du binome $(x+y)^n$ développée.

Si dx est invariable, alors tout demeurant comme ci-dessus, on considère x comme une fonction de t du premier degré, comme égal à $a + bt$; le facteur $x + \frac{dx}{dt}\cdot\tau + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\tau^2 + \text{etc.}$ devient $x + \frac{dx}{dt}\cdot\tau$, et l'on a dans ce cas

$$d^n(xy) = x d^n y + dx.d^{n-1}y;\ \text{ et } d^n(xy) = xd^ny + ndx.d^{n-1}y.$$

371. Nous avons fait voir, n.° 95, qu'on obtient le développement de la dérivée $D^n.(a\alpha)$, en développant $(\alpha + a)^n$ et en changeant les exposans en signes de dérivation, savoir en mettant $D^r.\alpha$ au lieu de α^r, $D^r.a$ au lieu de a^r, $D^0.\alpha = \alpha$, et $D^0.a = a$, au lieu de α et a; et dans le n.° 96 nous avons étendu ces homologies entre les puissances et les dérivées à un nombre quelconque de facteurs. Ici nous allons présenter la chose sous un autre aspect, nous allons détacher des dérivées leur *échelle de dérivation;* ces considérations auront l'avantage de se prêter plus facilement aux applications; nous en offrirons différens résultats par la suite.

La dérivation totale que l'on obtient en faisant varier à la fois a et α dans le produit $a\alpha$ ou dans la fonction $\varphi(a,\alpha)$ étant représentée à l'ordinaire par D, désignons par $D^{,1}$ la dérivation par rapport à α seulement; et par $D^{1,}$ la

dérivation par rapport à a seulement; *l'échelle de dérivation* sera

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}^{,1} + \mathrm{D}^{1,}.$$

La même chose ayant lieu pour la différentiation du produit xy ou de la fonction $\varphi(x,y)$; c'est-à-dire, d désignant la différentiation totale, $\mathrm{d}^{,1}$ celle par rapport à y seulement, et $\mathrm{d}^{1,}$ celle par rapport à x seulement; on aura *l'échelle de différentiation*

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}:$$

et ce que nous dirons des différentielles s'appliquera aux dérivées. Pour avoir la différentielle de xy, il suffit de multiplier xy par $\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}$. On a ainsi

$$\mathrm{d}(xy) = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}).xy = \mathrm{d}^{,1}(xy) + \mathrm{d}^{1,}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x.$$

L'équation $\mathrm{d} = \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}$, ou l'échelle de différentiation, n'est, comme on voit, qu'une manière d'exprimer, que, pour différentier une expression à deux quantités, fonctions l'une et l'autre de la même variable, il faut différentier par parties, en faisant varier séparément chacune de ces quantités, l'autre demeurant constante, et que la somme de ces différentielles compose la différentielle totale.

Puisque la différentielle seconde provient de la première comme celle-ci est provenue de la fonction, il s'ensuit, que, pour avoir la différentielle seconde, il n'y a qu'à multiplier la différentielle première par $\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}$: on aura ainsi l'échelle

$$\mathrm{d}^2 = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})(\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}) = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^2;$$

et, en continuant, on aura en général,

$$\mathrm{d}^n = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n.$$

Aussi est-il visible qu'en développant $(\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n$ par la règle du binome et multipliant xy par ce développement, on aura pour $\mathrm{d}^n(xy)$ la même expression que dans le numéro précédent.

372. Si l'on a le produit xyz, ou la fonction $\varphi(x, y, z)$, on sait que, pour en avoir la différentielle, il faut différentier par rapport à chacune des quantités z, y, x en particulier, et rassembler ces différentielles, ce qu'on exprime ainsi $\mathrm{d} = \mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,}$, et l'on a $\mathrm{d}^n = (\mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n$, et

$$\mathrm{d}^n(xyz) = (\mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n \times xyz.$$

On aura pareillement

$$\mathrm{d}^n(xyzu) = (\mathrm{d}^{,,,1} + \mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n \times xyzu,$$

et ainsi de suite. On développe $(\mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n$ et $(\mathrm{d}^{,,,1} + \mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^n$,

tout de même que $(a+b+c)^n$ et $(a+b+c+d)^n$, par les règles du §. II de l'article premier, puis on multiplie xyz, et $xyzu$ par ces développemens respectifs.

On peut au reste démontrer cette proposition de la même manière dont nous avons démontré celle du n.° 96.

373. Soit $V = \varphi x . \psi y$, $\mathrm{d}x$ étant variable et y fonction de x ; il est aisé de voir qu'en considérant x comme fonction de t, dont la différentielle $\mathrm{d}t$ est invariable, on a par les n.os 97, 100, 101 et 102 les trois formules suivantes :

$$\mathfrak{d}^n V = \mathfrak{d}^n(\varphi x . \psi y) = \qquad \ldots\ldots \text{I.}$$

$$\varphi x . \mathfrak{d}^n \psi y + \mathrm{d}\varphi x . \mathfrak{d}^{n-1} \psi y + \mathfrak{d}^2 \varphi x . \mathfrak{d}^{n-2} \psi y + \text{etc.} + \mathfrak{d}^n \varphi x . \psi y ;$$

$$\mathfrak{d}^n V = \mathfrak{d}^n(\varphi x . \psi y) = \qquad \ldots\ldots \text{II.}$$

$$\varphi x . \mathfrak{d}^n \psi y + \partial\varphi x . \mathfrak{d}^{n-1}(\mathrm{d}x . \psi y) + \partial^2 \varphi x . \mathfrak{d}^{n-2}(\mathrm{d}x^2 . \psi y) + \partial^3 \varphi x . \mathfrak{d}^{n-3}(\mathrm{d}x^3 \psi y)$$
$$+ \text{etc.} + \partial^n \varphi x . \mathrm{d}x^n . \psi y ;$$

$$\mathfrak{d}^n V = \mathfrak{d}^n . (\varphi x . \psi y) = \qquad \ldots\ldots \text{III.}$$

$$\varphi x . \partial \psi y . \mathfrak{d}^{n-1}(\mathrm{d}y) + \varphi x . \partial^2 \psi y . \mathfrak{d}^{n-2}(\mathrm{d}y)^2 + \varphi x . \partial^3 \psi x . \mathfrak{d}^{n-3}(\mathrm{d}y)^3$$
$$+ \partial \varphi x , \psi x \, \mathfrak{d}^{n-1}(\mathrm{d}x) + \partial\varphi x . \partial\psi y . \mathfrak{d}^{n-2}(\mathrm{d}x . \mathrm{d}y) + \partial\varphi x . \partial^2 \psi y . \mathfrak{d}^{n-3}(\mathrm{d}x . \mathrm{d}y^2)$$
$$+ \partial^2 \varphi x . \psi y . \mathfrak{d}^{n-2}(\mathrm{d}x)^2 + \partial^2 \varphi x . \partial \psi y . \mathfrak{d}^{n-3}(\mathrm{d}x^2 . \mathrm{d}y)$$
$$+ \partial^3 \varphi x . \psi y . \mathfrak{d}^{n-3}(\mathrm{d}x)^3$$
$$+ \varphi x . \partial^n \psi y . \mathrm{d}y^n$$
$$+ \partial\varphi x . \partial^{n-1} \psi y . \mathrm{d}x . \mathrm{d}y^{n-1}$$
$$+ \text{etc.} \quad + \partial^2 \varphi x . \partial^{n-2} \psi y . \mathrm{d}x^2 . \mathrm{d}y^{n-2}$$
$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \partial^n \varphi x . \psi y . \mathrm{d}x^n .$$

Dans le développement ultérieur de II, $\mathrm{d}x$ doit être considérée comme une première quantité ; et dans celui de III, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ doivent être considérées chacune comme une première quantité. Dans $\partial\varphi x$ et dans $\partial\psi y$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont constantes et l'on divise par ces différentielles, ou l'on considère tant $\mathrm{d}x$ que $\mathrm{d}y$ comme $= 1$.

374. Soit en général $V = \varphi(x, y)$, y étant fonction de x et $\mathrm{d}x$ n'étant pas constante ; on aura par les n.os 112 et 111, $\mathrm{d}^{,1}$ se rapportant à y et $\mathrm{d}^{1,}$ à x,

$$\mathfrak{d}^n V = \mathfrak{d}^n \varphi(x, y) =$$
$$\mathfrak{d}^{,n} \varphi(x, y) + \mathrm{d}^{1,} \mathfrak{d}^{,n-1} \varphi(x, y) + \mathfrak{d}^{2,} \mathfrak{d}^{,n-2} \varphi(x, y) + \text{etc.} + \mathfrak{d}^{n,} \varphi(x, y),$$

et

et, pour la différentielle non divisée,

$$\mathrm{d}^{n}V = \mathrm{d}^{n}\varphi(x,y) =$$

$$\mathrm{d}^{,n}\varphi(x,y) + n\,\mathrm{d}^{1,}\mathrm{d}^{,n-1}\varphi(x,y) + \frac{n.\,n-1}{1\,.\,2}\mathrm{d}^{2,}\mathrm{d}^{,n-2}\varphi(x,y)$$

$$+ \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{d}^{3,}\mathrm{d}^{,n-3}\varphi(x,y) + \text{etc.} + \mathrm{d}^{n,}\varphi(x,y),$$

ce qu'on peut indiquer de cette manière :

$$\mathrm{d}^{n}V = \mathrm{d}^{n}\varphi(x,y) = (\mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^{n} \times \varphi(x,y);$$

et l'on aura de même, y et z étant chacun fonction de x,

$$\mathrm{d}^{n}\varphi(x,y,z) = (\mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^{n} \times \varphi(x,y,z).$$

Pareillement y, z et u étant fonctions de x, on aura

$$\mathrm{d}^{n}\varphi(x,y,z,u) = (\mathrm{d}^{,,,1} + \mathrm{d}^{,,1} + \mathrm{d}^{,1} + \mathrm{d}^{1,})^{n} \times \varphi(x,y,z,u);$$

et ainsi de suite.

Le n.° 115 donne encore cette formule :

$$\underline{\mathrm{d}}^{n}\varphi(x,y) =$$

$$\partial^{,1}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-1}\mathrm{d}y + \mathfrak{d}^{,2}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-2}(\mathrm{d}y)^{2} + \mathfrak{d}^{,3}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-3}(\mathrm{d}y)^{3}$$

$$+ \partial^{1,}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-1}\mathrm{d}x + \partial^{,1}\partial^{1,}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-2}(\mathrm{d}x.\mathrm{d}y) + \partial^{1,}\mathfrak{d}^{,2}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-3}(\mathrm{d}x.\mathrm{d}y^{2})$$

$$+ \mathfrak{d}^{2,}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-2}(\mathrm{d}x)^{2} + \mathfrak{d}^{2,}\partial^{,1}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-3}.\mathrm{d}x^{2}.\mathrm{d}y)$$

$$+ \mathfrak{d}^{3,}\varphi(x,y).\underline{\mathrm{d}}^{n-3}(\mathrm{d}x)^{3}$$

$$+ \mathfrak{d}^{,n}\varphi(x,y).\mathrm{d}y^{n}$$

$$+ \partial^{1,}\mathfrak{d}^{,n-1}\varphi(x,y)\mathrm{d}x.\mathrm{d}y^{n-1}$$

$$+ \text{etc.} \quad + \mathfrak{d}^{2,}\mathfrak{d}^{,n-2}\varphi(x,y).\mathrm{d}x^{2}.\mathrm{d}y^{n-2}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \mathfrak{d}^{n,}\varphi(x,y).\mathrm{d}x^{n},$$

où $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ doivent être considérées comme des premiers termes ; dans $\mathfrak{d}^{r,}\mathfrak{d}^{,s}\varphi(x,y)$, on considère $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ chacune comme constante, et l'on divise par $\mathrm{d}x^{r}\mathrm{d}y^{s}$, ou l'on considère simplement $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ chacune comme $= 1$.

575. Passons aux équations différentielles.

Si y est une fonction implicite de x, c'est-à-dire une fonction qui n'est déterminée que par une équation en x et y ; représentons cette équation en général par $\varphi(x,y) = 0$: alors, puisque y est fonction de x, lorsque x devient $x + \Delta x$, y devient $y + \partial.y.\Delta x + \mathfrak{d}^{2}.y.(\Delta x)^{2} + \mathfrak{d}^{3}.y.(\Delta x)^{3} +$ etc. et l'équation $\varphi(x,y) = 0$ devient

$\varphi\{x + \Delta x, y + \partial.y.\Delta x + \partial^2.y.(\Delta x)^2 + \partial^3.y.(\Delta x)^3 + \text{etc.}\} = 0$, ou bien

$\varphi(x,y) + \frac{d\varphi(x,y)}{dx}.\Delta x + \frac{d^2\varphi(x,y)}{dx^2}.(\Delta x)^2 + \frac{d^3\varphi(x,y)}{dx^3}.(\Delta x)^3 + \text{etc.} = 0$;

et, comme cette équation doit avoir lieu, quel que soit Δx, il faut que chaque terme affecté d'une puissance différente de Δx soit zéro séparément; on aura donc, par le numéro précédent, en observant que dx est constante et dy variable, et développant,

$$0 = \varphi(x,y),$$

$$0 = \partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{dy}{dx} + \partial^{1,0}\varphi(x,y),$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{d^2y}{dx^2} + \partial^{1,0}\partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{dy}{dx} + \partial^{2,0}\varphi(x,y), \\ + \partial^{0,2}\varphi(x,y).\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{d^3y}{dx^3} + \partial^{1,0}\partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{d^2y}{dx^2} + \partial^{2,0}\partial^{0,1}\varphi(x,y).\frac{dy}{dx} + \partial^{3,0}\varphi(x,y), \\ + \partial^{0,2}\varphi(x,y).2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \partial^{1,0}\partial^{0,2}\varphi(x,y).\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ + \partial^{0,3}\varphi(x,y).\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \end{array}\right.$$

et ainsi de suite. La loi n'est pas difficile à saisir : mais elle se présente encore mieux si on ne développe pas entièrement, et si, en mettant V au lieu de $\varphi(x,y)$, on désigne par $\partial^{1,}V$ la dérivée $\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$, dx étant invariable, et par $\partial^{,1}.V$ la dérivée $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}\frac{dy}{dx}$, dy étant variable et variant par rapport à x dont y est fonction; alors les équations dérivées seront exprimées par les formules suivantes :

$$0 = \varphi(x,y) = V,$$

$$0 = \partial^{,1}.V + \partial^{1,}V,$$

$$0 = \partial^{,2}.V + \partial^{1,}\partial^{,1}.V + \partial^{2,}V,$$

$$0 = \partial^{,3}.V + \partial^{1,}\partial^{,2}.V + \partial^{2,}\partial^{,1}.V + \partial^{3,}V,$$

et l'on a généralement, pour l'équation dérivée de l'ordre $n^{ième}$,

$$0 = \partial^{,n}.V + \partial^{1,}\partial^{,n-1}.V + \partial^{2,}\partial^{,n-2}.V + \partial^{3,}\partial^{,n-3}.V + \text{etc.} + \partial^{n,}V,$$

ou bien, en détachant l'échelle de dérivation différentielle et prenant la dérivée

non divisée, on aura pour l'équation de l'ordre n,

$$o = \frac{d^n \varphi(x,y)}{dx^n} = (\partial^{,1}. + \partial^{1,})^n \times \varphi(x,y).$$

376. Il s'agit ordinairement d'avoir la valeur de $\frac{d^n y}{dx^n}$: on y parviendra en cherchant celles de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, tirées successivement des équations qui précèdent celle de l'ordre n, et substituant ces valeurs dans la dernière équation. Mais, en employant la formule (S) du n.° 322, on n'a pas besoin de ces substitutions successives; elle fournit immédiatement les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., $\frac{d^ny}{dx^n}$. Car on a par cette formule,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_{1,}\varphi(x,y)}{\partial^{,1}\varphi(x,y)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\partial^{2,}\varphi(x,y)}{\partial^{,1}\varphi(x,y)} + \tfrac{1}{2}\partial^{,1}\frac{[\partial^{1,}\varphi(x,y)]^2}{[\partial^{,1}\varphi(x,y)]^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\partial^{3,}\varphi(x,y)}{\partial^{,1}\varphi(x,y)} + \tfrac{1}{2}\partial^{,1}\frac{\partial^{1,}[\partial^{1,}\varphi(x,y)]^2}{[\partial^{,1}\varphi(x,y)]^2} - \tfrac{1}{3}\partial^{,2}\frac{[\partial^{1,}\varphi(x,y)]^3}{[\partial^{,1}\varphi(x,y)]^3},$$

et ainsi de suite. Dans les seconds membres ∂x et ∂y sont constantes l'une et l'autre et $= 1$; on aura soin, en développant, de considérer $\partial^{,1}\varphi(x,y)$ et $\partial^{1,}\varphi(x,y)$ comme des premiers termes, et d'écrire $\partial^{,2}\varphi(x,y)$, $\partial^{,3}\varphi(x,y)$, etc., au lieu de $\partial^{,1}\partial^{,1}\varphi(x,y)$, $\partial^{,1}\partial^{,2}\varphi(x,y)$, etc. Comme la loi est manifeste, il est aisé d'en conclure la formule pour le terme général $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Ces formules me paroissent dignes d'attention.

377. Si l'on a une équation différentielle dans laquelle on a considéré y comme fonction de x, et qu'on veuille au contraire y considérer x comme fonction de y; alors, par le n.° 341, il faudra, dans l'équation différentielle proposée, changer

$\partial^2.y = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\partial^3.y = \frac{d^3y}{dx^3}$, $\partial^4.y = \frac{d^4y}{dx^4}$, etc., respectivement en $\frac{1}{2}\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}$, $\frac{1}{1.2.3}\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{1}{1.2.3.4}\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}\right)\right)$, etc., où dy est invariable, de sorte qu'on peut écrire dy hors des signes d.

Mais, par le même n.° 341, on peut donner à ces quantités une forme

plus propre à les développer facilement chacune en particulier, savoir

$$\tfrac{1}{2}dy.d(dx)^{-2},\quad \tfrac{1}{3}dy.d^2(dx)^{-3},\quad \tfrac{1}{4}dy.d^3(dx)^{-4},\ \text{etc.}$$

On mettra généralement dans l'équation proposée, au lieu de $\partial^n.y$ l'expression $\frac{1}{n}dy.d^{n-1}(dx)^n$. Dans ces expressions dx est considérée comme un premier terme et comme variable.

Si on laisse dy sous les signes d, et qu'on fasse aussi varier dy; alors changeant $\partial^2.y$, $\partial^3.y$, $\partial^4.y$, etc. en $\frac{1}{2}d\{(dx)^{-2}.dy\}$, $\frac{1}{3}d^2\{(dx)^{-3}.dy\}$, $\frac{1}{4}d^3\{(dx)^{-4}.dy\}$, etc., et regardant dx comme un premier terme et dy comme un second terme, on résout cette question : Ayant une équation différentielle dans laquelle dx est constante et dy variable, la transformer en une autre dans laquelle dx et dy sont variables, c'est-à-dire, en une équation dans laquelle on regarde x et y chacun comme fonction d'une autre quantité.

On voit donc encore la liaison de ces questions avec le retour des séries et les méthodes pour trouver par approximation les racines des équations.

378. Venons à présent au cas des différentielles partielles.

Soit U une fonction de x, y et z, que j'exprime par $\phi(x, y, z)$, et soit z lui-même une fonction de x et de y, x et y étant des quantités indépendantes, et dx et dy indépendantes et invariables : on demande le développement de ce que devient $U = \phi(x, y, z)$, lorsque x et y deviennent $x + dx$ et $y + dy$; ce développement devant être ordonné suivant les puissances et les produits de dx et de dy : et même on demande un terme quelconque de ce développement sans passer par les termes précédens.

On voit que tout se réduit à développer

$$\phi\left\{\begin{array}{r} x + dx,\ y + dy,\ z + \frac{dz}{dx}\cdot dx + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot dx^2 + \text{etc.} \\ + \frac{dz}{dy}\cdot dy + \frac{d^2z}{dx.dy}\cdot dx.dy + \text{etc.} \\ + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot dy^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

En mettant U au lieu de $\phi(x, y, z)$, il est aisé de voir, par les n.os 136 et 375, que le commencement de ce développement est

$U +$

$$U+\left(\frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dU}{dx}\right)dx+\left\{\begin{matrix}\frac{dU}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2U}{dx.dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2U}{dx^2}\\ +\frac{d^2U}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\end{matrix}\right\}dx^2+\text{etc.}$$

$$+\left(\frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{dU}{dy}\right)dy+\left\{\begin{matrix}\frac{dU}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx.dy}+\frac{d^2U}{dy.dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2U}{dx.dy}\\ +\frac{ddU}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+\frac{d^2U}{dx.dz}\cdot\frac{dz}{dy}\end{matrix}\right\}dx.dy+\text{etc.}$$

$$+\left\{\begin{matrix}\frac{dU}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2U}{dy.dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2U}{dy^2}\\ +\frac{d^2U}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\end{matrix}\right\}dy^2+\text{etc.}$$

$$+\text{etc.}$$

Mais, pour en mieux saisir la loi, nous ne développerons pas entièrement les termes et nous emploirons les notations des dérivations.

Désignant donc par $\partial^{1,}U$ que x seul varie de 1 dans $\phi(x,y,z)$; par $\partial^{,1}U$ que c'est y seul qui varie, aussi de 1; par $\partial^{,,1}.U$ que c'est z seul qui varie de $\frac{dz}{dx}$ ou $\partial.z$, et par $\partial'^{,,1}.U$ que c'est encore z seul qui varie, mais de $\frac{dz}{dy}$ ou $\partial'.z$: le commencement du développement sera

$$\begin{aligned}
&U+(\partial^{,,1}.U+\partial^{1,}U).dx && +(\eth^{,,2}.U+\partial^{1,}\partial^{,,1}.U+\eth^{2,}U).dx^2\\
&\quad+(\partial'^{,,1}.U+\partial^{,1}U).dy && +(\partial^{,,1}.\partial'^{,,1}.U+\partial^{1,}\partial'^{,,1}.U+\partial^{,1}\partial^{,,1}.U+\partial^{1,}\partial^{,1}U).dx.dy\\
& && +(\eth'^{,,2}.U+\partial^{,1}\partial'^{,,1}.U+\eth^{,2}U).dy^2\\
& && +(\eth^{,,3}.U+\partial^{1,}\eth^{,,2}.U+\eth^{2,}\partial^{,,1}.U+\eth^{3,}U).dx^3\\
&+(\eth^{,,2}.\partial'^{,,1}.U+\partial^{1,}\partial^{,,1}.\partial'^{,,1}.U+\eth^{2,}\partial'^{,,1}.U+\partial^{,1}\eth^{,,2}.U+\partial^{1,}\partial^{,1}\partial^{,,1}.U+\eth^{2,}\partial^{,1}U)\,dx^2.dy\\
&+(\partial^{,,1}.\eth'^{,,2}.U+\partial^{,1}\partial^{,,1}.\partial'^{,,1}.U+\eth^{,2}\partial^{,,1}.U+\partial^{1,}\eth'^{,,2}.U+\partial^{1,}\partial^{,1}\partial'^{,,1}.U+\partial^{1,}\eth^{,2}U).dx.dy^2\\
& && +(\eth'^{,,3}.U+\partial^{,1}\eth'^{,,2}.U+\eth^{,2}\partial'^{,,1}.U+\eth^{,3}U).dy^3\\
& && +\text{etc.}\qquad +\text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi se saisit facilement; elle est telle qu'en détachant les échelles de dérivation on a généralement, pour le coëfficient de $dx^m dy^n$, l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots m\times 1.2\ldots n}(\partial^{,,1}.+\partial^{1,})^m.(\partial'^{,,1}.+\partial^{,1})^n\times U.$$

Quant au développement des dérivées que l'on représente généralement par $\eth^{,,r}.\eth'^{,,s}.U$, on le trouve par les solutions du problème proposé au n.° 131.

Si, tout demeurant comme ci-dessus, on a l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, alors, puisque dx et dy sont indépendantes, et que l'équation doit avoir lieu quelles que soient dx et dy, il est clair que les coëfficiens de chaque puissance et produit différent de dx et de dy forment séparément une somme égale à zéro. On pourra ainsi trouver sur-le-champ le développement d'une équation aux différentielles partielles d'un ordre quelconque, tant par rapport à x que par rapport à y.

379. Voici encore un cas qui sert dans la théorie des équations aux différentielles partielles, et dont la solution est facilitée par nos méthodes.

Soit z une fonction de x et de y, et qu'on introduise au lieu de x et de y deux nouvelles variables u et t, en sorte que x et y soient chacun fonction de t et de u; trouver les formules différentielles par rapport à ces nouvelles variables.

Ce cas se trouve dans le tome III du Calcul intégral d'Euler, page 186.

Soient z, x, y représentés respectivement par $\varphi(x, y)$, $\psi(t, u)$, $\chi(t, u)$, on aura $z = \varphi\{\psi(t, u), \chi(t, u)\}$; et $z + \Delta z$ étant ce que devient z, lorsqu'on met $t + \tau$ au lieu de t et $u + \upsilon$ au lieu de u, τ étant mis pour Δt et υ pour Δu ; on aura

$$z + \Delta z =$$

$$\varphi\left[\left\{\begin{array}{r} \psi(t, u) + \partial^{1,}\psi(t, u).\tau + \text{etc.} \\ + \partial^{,1}\psi(t, u).\upsilon + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{r} \chi(t, u) + \partial^{1,}\chi(t, u).\tau + \text{etc.} \\ + \partial^{,1}\chi(t, u).\upsilon + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}\right],$$

ou bien, en mettant x au lieu de $\psi(t, u)$, y au lieu de $\chi(t, u)$, et ∂ et ∂' au lieu de $\partial^{1,}$ et de $\partial^{,1}$,

$$z + \Delta z =$$

$$\varphi\left[\left\{\begin{array}{r} x + \partial.x.\tau + \partial^2.x.\tau^2 + \text{etc.} \\ + \partial'.x.\upsilon + \partial'.\partial.x.\tau\upsilon + \text{etc.} \\ + \partial'^2.x.\upsilon^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{r} y + \partial.y.\tau + \partial^2.y.\tau^2 + \text{etc.} \\ + \partial'.y.\upsilon + \partial'.\partial.y.\tau\upsilon + \text{etc.} \\ + \partial'^2.y.\upsilon^2 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\}\right].$$

On voit donc que ce cas répond à celui du n.° 193. Il est aisé d'en donner différentes solutions, correspondantes à celles que nous avons données du problème du n.° 182. Si l'on veut avoir une solution semblable à celle du n.° 183; en désignant par $\partial^{1,}.\varphi(x, y)$ que dans $\varphi(x, y)$ x seul varie par

rapport à t, et par $\partial'^{1,}.\phi(x,y)$, que x seul varie, mais par rapport à u; par $\partial^{,1}.\phi(x,y)$, et $\partial'^{,1}.\phi(x,y)$ que y seul varie, dans le premier cas par rapport à t seulement, et dans le second cas, par rapport à u seulement; on aura pour le coëfficient du terme général du développement affecté de $\tau^m \upsilon^n$,

$$\begin{aligned}
d^m.d'^n.\phi(x,y) = {} & \\
& d^{,m}.d'^{,n}.\phi(x,y) + \partial^{1,}.d^{,m-1}.d'^{,n}.\phi(x,y) + d^{2,}.d^{,m-2}.d'^{,n}.\phi(x,y) + \text{etc.} \\
& + \partial'^{1,}.d^{,m}.d'^{,n-1}.\phi(x,y) + \partial^{1,}.\partial'^{1,}.d^{,m-1}.d'^{,n-1}.\phi(x,y) + \text{etc.} \\
& + d'^{2,}.d^{,m}.d'^{,n-2}.\phi(x,y) + \text{etc.} \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \\
& + d^{m-2,}.d'^{n,}.d^{,2}.\phi(x,y) \\
& + d^{m-1,}.d'^{n-1,}\partial^{,1}.\partial'^{,1}.\phi(x,y) + d^{m-1,}.d'^{n,}.\partial^{,1}.\phi\, x,y) \\
& + d^{m,}.d'^{n-2,}.d'^{,2}.\phi(x,y) + d^{m,}.d'^{n-1,}.\partial'^{,1}.\phi(x,y) + d^{m,}.d'^{n,}.\phi(x,y).
\end{aligned}$$

En détachant les échelles de dérivation différentielle, cette formule peut être représentée d'une manière bien simple, comme il suit :

$$d^m.d'^n.\phi(x,y) = \frac{1}{1.2\ldots m.\ 1.2\ldots n}(\partial^{,1}. + \partial^{1,}.)^m(\partial'^{,1}. + \partial'^{1,}.)^n \times \phi(x,y).$$

La formule du n.° 195 donne une expression plus développée.

Le commencement de la série pour $z + \Delta z$ se trouve, soit par la formule que nous venons de donner, soit par celle du n.° 195, en mettant z au lieu de $\phi(x,y)$,

$$\begin{aligned}
z + \Delta z = z & + \left.\begin{array}{l} \partial^{1,}z.\partial.x \\ + \partial^{,1}z.\partial.y \end{array}\right| \tau
+ \left.\begin{array}{r} \partial^{1,}z.d^2.x + d^{2,}z.(\partial.x)^2 \\ + \partial^{1,}\partial^{,1}z.\partial.x.\partial.y \\ + \partial^{,1}z.d^2.y + d^{,2}z.(\partial.y)^2 \end{array}\right| \tau^2 + \text{etc.} \\
& + \left.\begin{array}{l} \partial^{1,}z.\partial'.x \\ + \partial^{,1}z.\partial'.y \end{array}\right| \upsilon
+ \left.\begin{array}{r} \partial^{1,}z.\partial.\partial'.x + d^{2,}z.\partial.x.\partial'.x \\ + \partial^{1,}\partial^{,1}z.\partial'.x.\partial.y \\ + \partial^{1,}\partial^{,1}z.\partial.x.\partial'.y \\ + \partial^{,1}z.\partial.\partial'.y + d^{,2}z.\partial.x.\partial'.y \end{array}\right| \tau\upsilon + \text{etc.} \\
& \qquad + \left.\begin{array}{r} \partial^{1,}z.d'^2.x + d^{2,}z.(\partial'.x)^2 \\ + \partial^{1,}\partial^{,1}z.\partial'.x.\partial'.y \\ + \partial^{,1}z.d'^2.y + d^{,2}z.(\partial'.y)^2 \end{array}\right| \upsilon^2 + \text{etc.} \\
& \qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

380. Tout ce que nous avons observé à l'égard des échelles en d et ∂ s'applique aux échelles de dérivation en D, les D se rapportant aux dérivées $\mathfrak{C}$, γ, δ, etc. : et ces échelles servent à exprimer bien simplement les lois des premiers développemens.

Nous ne pousserons pas plus loin les détails des différentiations : on voit que nos méthodes de dérivation s'appliquent à tous les cas de celles-ci, qu'elles épargnent des longueurs de calcul et des substitutions successives, et qu'elles font trouver immédiatement les différentielles d'un ordre quelconque, en présentant des formules générales dont la loi se saisit facilement.

(II.)

381. Le calcul des dérivations ayant son inverse comme le calcul différentiel, nous destinons cette division aux dérivations inverses, nous y traiterons de la liaison entre les dérivées directes et les dérivées inverses, et de celle qui existe entre les différentielles et les intégrales. Si nous avons différé jusqu'à présent de parler des dérivées inverses dont nous avons dit un mot au n.° 36., c'est afin que l'ordre de cet ouvrage nous permît d'appliquer sur-le-champ nos formules aux intégrales et de vérifier par là nos résultats par des résultats connus.

382. La fonction $\varphi(\alpha+x)$ développée en série est (n.° 2).

$$\text{D}^0\varphi\alpha + \frac{\text{D}^1\varphi\alpha}{1}\cdot x^1 + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}\cdot x^2 + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}\cdot x^3 + \text{etc.}; \quad \ldots.(1)$$

et il est visible qu'en allant de droite à gauche chaque terme se forme de celui qui le précède à droite (le terme affecté de x^{n-1} de celui affecté de x^n), en multipliant ce dernier par l'indice qu'y porte D, en diminuant ensuite cet indice de l'unité et en divisant le terme par x. Suivons cette loi, pour continuer la série (1) en arrière, et nous aurons

$$-\text{etc.} + 2.1.0.\text{D}^{-3}\varphi\alpha.x^{-3} - 1.0.\text{D}^{-2}\varphi\alpha.x^{-2} + 0.\text{D}^{-1}\varphi\alpha.x^{-1} +$$
$$\text{D}^0\varphi\alpha + \frac{\text{D}^1\varphi\alpha}{1}\cdot x + \frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1.2}\cdot x^2 + \frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}\cdot x^3 + \frac{\text{D}^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}\cdot x^4 + \text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Si l'on prend la fonction $\varphi(\alpha + \mathfrak{C}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})$, on aura pareillement

$$-\text{etc.} + 2.1.0.\text{D}^{-3}.\varphi\alpha.x^{-3} - 1.0.\text{D}^{-2}.\varphi\alpha.x^{-2} + 0.\text{D}^{-1}.\varphi\alpha.x^{-1} +$$
$$\text{D}^0.\varphi\alpha + \frac{\text{D}^1.\varphi\alpha}{1}\cdot x + \frac{\text{D}^2.\varphi\alpha}{1.2}\cdot x^2 + \frac{\text{D}^3.\varphi\alpha}{1.2.3}\cdot x^3 + \frac{\text{D}^4.\varphi\alpha}{1.2.3.4}\cdot x^4 + \text{etc.} \quad \ldots.(3)$$

De

De là on conclud généralement que dans $\underset{c}{\mathrm{D}}^{-n}.\varphi\alpha$, où l'indice n est négatif, le c au-dessous du D n'indique plus un dénominateur, mais un multiplicateur, savoir $\mp(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.2.1.0$, le signe $-$ ou $+$ ayant lieu suivant que n est pair ou impair, le premier facteur $n-1$ étant toujours de l'unité moindre que l'indice n, et le dernier étant zéro, ce qui fait disparoître tout le terme.

Puisque chaque terme de la série (2) ou (3), continuée en arrière, est multiplié par zéro, il s'ensuit que la série ne s'étend pas en arrière.

Il s'ensuit aussi de là que toutes les fois qu'on a une équation ou une expression où il y a des termes dont les uns ont des dérivées divisées à indices de D positifs et les autres des dérivées divisées à indices de D négatifs, ces derniers termes, ayant un facteur zéro, doivent être rejetés de l'expression. Voilà la véritable raison pour laquelle nous avons rejeté jusqu'ici les termes à indice de D négatif.

583. Une application immédiate de cette observation montrera la nécessité d'y avoir égard.

On a vu n.° 126 que l'on a généralement

$$\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-r}.(\beta^r a) = \underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^r a) - r\alpha\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^{r-1}a) + \frac{r.r-1}{1.2}\alpha^2\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^{r-2}a)$$
$$\mp \text{etc.} \pm \frac{r.r-1}{1.2}\alpha^{r-2}\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^2 a) \mp r\alpha^{r-1}\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha a) \pm \alpha^r\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.a.$$

Lorsque r devient $> n$, l'indice $n-r$ du premier membre devient négatif et l'on a $\underset{c}{\mathrm{D}}^{n-r}.(\beta^r a) = 0$, tandis que l'indice de D dans le second membre demeure positif; donc en écrivant la série à rebours, on trouve ce théorème:

$$0 = \alpha^r\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.a - r\alpha^{r-1}\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha a) + \frac{r.r-1}{1.2}\alpha^{r-2}\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^2 a) - \text{etc.}$$
$$\pm \frac{r.r-1}{1.2}\alpha^2\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^{r-2}a) \mp r\alpha\underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^{r-1}a) \pm \underset{c}{\mathrm{D}}^{n}.(\alpha^r a),$$

toutes les fois que $r > n$.

Ce théorème est une généralisation du lemme que LEXELL a donné dans le tome XVI des nouveaux Commentaires de Pétersbourg, page 235, et dont il s'est servi pour démontrer le théorème de LAGRANGE rapporté au n.° 282. La manière dont nous parvenons au théorème précédent a l'avantage de faire voir que la série n'est plus égale à zéro, lorsque r n'est pas $> n$, et d'en donner la valeur pour ces cas, n.° 126. On tire de ce théorème, en divisant par α^r,

$$\mathfrak{p}^n.a = r\alpha^{-1}\mathfrak{p}^n.(\alpha a) - \frac{r.r-1}{1.2}\alpha^{-2}\mathfrak{p}^n.(\alpha^2 a) + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}\alpha^{-3}\mathfrak{p}^n.(\alpha^3 a)$$
$$- \text{etc.} \pm r\alpha^{-(r-1)}\mathfrak{p}^n.(\alpha^{r-1}a) \mp \alpha^{-r}\mathfrak{p}^n.(\alpha^r a),$$

α étant arbitraire, pourvu que r soit $> n$.

384. Si l'on a une équation dans chacun des termes de laquelle entre une dérivée divisée avec indice négatif, on peut imaginer que chaque terme a été divisé par le facteur zéro, et alors l'équation subsiste entre les termes qui la composent, sans qu'aucun disparoisse : ainsi on peut le plus souvent faire abstraction du facteur zéro.

Pour mieux connoître la nature des dérivées inverses, observons que, puisque $\text{D}^2.A$ dérive de $\text{D}.A$, $\text{D}.A$ de $\text{D}^0.A$ ou A; en rétrogardant, $\text{D}.A = \text{D}^{-1}.\text{D}^2.A$ sera la dérivée inverse de $\text{D}^2.A$; $\text{D}^0.A = \text{D}^{-1}.\text{D}^1.A$ où A sera la dérivée inverse de $\text{D}.A$; donc, en continuant, on aura $\text{D}^{-1}.A = \text{D}^{-1}.\text{D}^0.A$ pour la dérivée inverse de A, $\text{D}^{-2}.A$, pour celle de $\text{D}^{-1}.A$, et ainsi de suite; $\text{D}^{-2}.A$ s'appelle aussi la dérivée inverse seconde de A, et en général $\text{D}^{-n}.A$ est la dérivée inverse $n^{\text{ième}}$ de A.

En passant aux différentielles, si ϕx est une fonction de x, et $\text{d}x$ supposée constante, pour plus de simplicité; on aura, pour les différentielles directes de ϕx, les expressions

$$\text{d}\phi x = \partial\phi x.\text{d}x,\ \text{d}^2\phi x = \partial^2\phi x.\text{d}x^2,\ \text{d}^3\phi x = \partial^3\phi x.\text{d}x^3,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire, que les différentielles sont égales aux dérivées multipliées par $\text{d}x$, $\text{d}x^2$, $\text{d}x^3$, etc. respectivement; mais les *différentielles inverses* ou les *intégrales* seront, en suivant la même loi, égales aux dérivées inverses, divisées par $\text{d}x$, $\text{d}x^2$, $\text{d}x^3$, etc.; de sorte que $\int$, le signe de l'intégration, étant mis au lieu de d^{-1}, on aura

$$\text{d}^{-1}\phi x = \int\phi x = \frac{\partial^{-1}\phi x}{\text{d}x},\ \text{d}^{-2}\phi x = \int^2\phi x = \frac{\partial^{-2}\phi x}{\text{d}x^2},$$
$$\text{d}^{-3}\phi x = \int^3\phi x = \frac{\partial^{-3}\phi x}{\text{d}x^3},\ \text{etc.},\ \text{d}^{-n}\phi x = \int^n\phi x = \frac{\partial^{-n}\phi x}{\text{d}x^n}.$$

Soit, par exemple, $\phi x = x^m$, $\text{d}x$ étant constante, on aura

$$\text{d}(x^m) = mx^{m-1}\text{d}x,\ \text{d}^2(x^m) = m(m-1)x^{m-2}\text{d}x^2,\ \text{etc.}$$
$$\text{d}^{-1}(x^m) = \int x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\text{d}x},\ \text{d}^{-2}(x^m) = \int^2 x^m = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)\text{d}x^2},$$

généralement, $$\text{d}^{-n}(x^m) = \int^n x^m = \frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)\text{d}x^n},$$

et l'on aura pour la différentielle inverse divisée de l'ordre n (n.° précédent), en faisant abstraction du facteur zéro,

$$\text{d}^{-n}(x^m) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1) x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n) \cdot \text{d}x^n}.$$

Puisque, pour indiquer la différentiation inverse ou l'intégration, on emploie communément au lieu de d^{-1} le signe $\int$; nous proposons d'employer le signe $\int$ pour indiquer la dérivation différentielle inverse ∂^{-1}; et de même que $\partial \phi x$ indique qu'après avoir pris la différentielle de ϕx, il faut encore la diviser par $\text{d}x$, de même $\int \phi x$ indique qu'après avoir pris l'intégrale de ϕx, il faut encore la multiplier par $\text{d}x$. Ainsi on a

$$\int x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,\text{d}x}, \quad \int x^m \text{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \text{d}x \int x^m, \quad \int x^m \text{d}x = \frac{x^{m+1} \cdot \text{d}x}{m+1} = \text{d}x \int x^m \text{d}x.$$

385. Voici à présent une formule qui donne la dérivée inverse générale non divisée, ou plutôt non multipliée, de l'ordre n; α ayant β pour dérivée, β ayant γ pour dérivée divisée, etc.

Si dans la formule du n.° 45 on change n en $-n$, on a

$$\text{D}^{-n} \cdot \phi\alpha = \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\text{D}^{-n}\phi\alpha \cdot \beta^{-n} - \text{D}^{-n-1}\phi\alpha \cdot n\text{D} \cdot \beta^{-n-1} + \text{D}^{-n-2}\phi\alpha \cdot n(n+1)\text{D}^2 \cdot \beta^{-n-2}$$
$$- \text{D}^{-n-3}\phi\alpha \cdot n(n+1)(n+2)\text{D}^3 \cdot \beta^{-n-3} + \text{etc. à l'infini.}$$

Ainsi toutes les fois que la fonction $\phi\alpha$ est telle qu'on puisse en trouver les dérivées inverses $\text{D}^{-n}\phi\alpha$, $\text{D}^{-n-1}\phi\alpha$, $\text{D}^{-n-2}\phi\alpha$, etc. d'un ordre quelconque, $\text{D}\alpha$ étant $=1$; cette formule donnera la dérivée inverse $\text{D}^{-n} \cdot \phi\alpha$, $\text{D} \cdot \alpha$, $\text{D}^2 \cdot \alpha$, $\text{D}^3 \cdot \alpha$, etc. étant β, γ, δ, etc. On développera $\text{D} \cdot \beta^{-n-1}$, $\text{D}^2 \cdot \beta^{-n-2}$, etc. à l'ordinaire, en considérant β comme un premier terme.

On auroit aussi pu tirer cette formule (1) de celle du n.° 20, en faisant les multiplications qu'indiquent les c au-dessous des D, suivant le numéro précédent, et divisant ensuite tout par $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$, ce qui supprimeroit le facteur zéro qui multiplie tous les termes.

Si $n = 1$, on a pour la dérivée inverse du premier ordre

$$\text{D}^{-1} \cdot \phi\alpha = \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\text{D}^{-1}\phi\alpha \cdot \beta^{-1} - \text{D}^{-2}\phi\alpha \cdot \text{D} \cdot \beta^{-2} + \text{D}^{-3}\phi\alpha \cdot 2\text{D}^2 \cdot \beta^{-3} - \text{D}^{-4}\phi\alpha \cdot 2 \cdot 3\text{D}^3 \cdot \beta^{-4}$$
$$+ \text{D}^{-5}\phi\alpha \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\text{D}^4 \cdot \beta^{-5} - \text{etc.} =$$

$$\text{D}^{-1}\phi\alpha \cdot \beta^{-1} - \text{D}^{-2}\phi\alpha \cdot \text{D} \cdot \beta^{-2} + \text{D}^{-3}\phi\alpha \cdot \text{D}^2 \cdot \beta^{-3} - \text{D}^{-4}\phi\alpha \cdot \text{D}^3 \cdot \beta^{-4}$$
$$+ \text{D}^{-5}\phi\alpha \cdot \text{D}^4 \cdot \beta^{-5} - \text{etc.}$$

Les expressions (1) et (2) sont remarquables en ce qu'elles montrent bien la liaison entre les dérivées directes et les dérivées inverses. Appliquons-les à une intégration.

386. On propose de trouver l'intégrale $\int^n (a+bx+cx^2)^r dx^n$, dx étant constante.

Faisant ici, comme n.° 367, $\alpha = a + bx + cx^2$, $\mathcal{C} = \partial(a + bx + cx^2) = b + 2cx$, $\gamma = \partial^2(a + bx + cx^2) = c$; on a $\varphi\alpha = \alpha^r$; et puisque $\mathrm{D}^n\varphi\alpha = \frac{d^n\varphi\alpha}{d\alpha^n}$, on a, en changeant n en $-n$, $\mathrm{D}^{-n}\varphi\alpha = d^{-n}\varphi\alpha . d\alpha^n = \int^n \varphi\alpha . d\alpha^n = \int^n \varphi\alpha$, $d\alpha$ étant constante; on a donc, par la formule (1),

$$\begin{aligned}\int^n (a+bx+cx^2)^r dx^n = {} & \int^n \alpha^r . (b + 2cx)^{-n} \\ & + \int^{n+1} \alpha^r . n(n+1)(b + 2cx)^{-n-2} c \\ & + \int^{n+2} \alpha^r . \frac{n(n+1)..(n+3)}{1 \,.\, 2} (b + 2cx)^{-n-4} c^2 \\ & + \int^{n+3} \alpha^r . \frac{n(n+1)....(n+5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} (b + 2cx)^{-n-6} c^3 \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Il faut compléter l'intégrale en y ajoutant $C + C_1 x + C_2 x^2 + \text{etc.} + C_{n-1} x^{n-1}$, expression qui renferme les n constantes arbitraires C, C_1, C_2, etc. C_{n-1}.

Il est aisé de voir qu'on a $\int^n \alpha^r . = \frac{\alpha^{r+n}}{(r+1)(r+2).....(r+n)}$: donc l'intégrale demandée est

$$\frac{(a + bx + cx^2)^{r+n}}{(r+1)(r+2)...(r+n).(b+2cx)^n} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{n(n+1)}{r+n+1} \frac{(a + bx + cx^2)c}{(b + 2cx)^2} \\ & + \frac{n(n+1)...(n+3)}{2(r+n+1)(r+n+2)} \frac{(a + bx + cx^2)^2 c^2}{(b + 2cx)^4} \\ & + \frac{n(n+1)....(n+5)}{2.3(r+n+1)...(r+n+3)} \frac{(a + bx + cx^2)^3 c^3}{(b + 2cx)^6} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

$$+ C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \text{etc.} + C_{n-1} x^{n-1}.$$

387. Si l'on demande l'intégrale

$$\int^n \varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) dx^n,$$

dx étant constante, et qu'on veuille ordonner la série suivant les puissances de x, voici une manière bien simple de trouver cette série au moyen de nos méthodes de dérivation.

Puisque

Puisque l'on a (n.° 21)

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}) =$$

$$\varphi a + \mathrm{D}.\varphi a.x + \mathrm{D}^2.\varphi a.x^2 + \mathrm{D}^3.\varphi a.x^3 + \text{etc.},$$ il s'ensuit que

$$\textstyle\int^n \varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}).dx^n =$$

$$\varphi a \textstyle\int^n dx^n + \mathrm{D}.\varphi a.\int^n x dx^n + \mathrm{D}^2.\varphi a.\int^n x^2 dx^n + \mathrm{D}^3.\varphi a.\int^n x^3 dx^n + \text{etc.}$$

Or, dx étant constante, on a généralement

$$\int^n x^r dx^n = \frac{x^{r+n}}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+n)};$$

donc, en complétant l'intégrale par n constantes arbitraires, on trouve

$$\int^n \varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})dx^n = \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \text{etc.} + C_{n-1}x^{n-1} + \\ \dfrac{x^n}{n}\varphi a + \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}\mathrm{D}.\varphi a + \dfrac{1.2.x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}\mathrm{D}^2.\varphi a \\ \qquad + \dfrac{1.2.3.x^{n+3}}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\mathrm{D}^3.\varphi a + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

formule dans laquelle $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3.\varphi a$, etc. se développent à la manière ordinaire; et si l'une de ces quantités devient zéro, la série se termine.

388. Si dans la formule du n.° 95 on change n en $-n$, on aura ces deux formules :

$$\mathrm{D}^{-n}.(a\alpha) = \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$a\mathrm{D}^{-n}.\alpha - n\mathrm{D}.a.\mathrm{D}^{-n-1}.\alpha + n(n+1)\mathrm{D}^2.a.\mathrm{D}^{-n-2}.\alpha - n(n+1)(n+2)\mathrm{D}^3.a.\mathrm{D}^{-n-3}.\alpha$$
$$+ n(n+1)(n+2)(n+3)\mathrm{D}^4.a.\mathrm{D}^{-n-4}.\alpha - \text{etc.},$$

$$\mathrm{D}^{-n}(\alpha a) = . \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$\alpha\mathrm{D}^{-n}.a - n\mathrm{D}.\alpha.\mathrm{D}^{-n-1}.a + n(n+1)\mathrm{D}^2.\alpha.\mathrm{D}^{-n-2}.a - n(n+1)(n+2)\mathrm{D}^3.\alpha.\mathrm{D}^{-n-3}.a$$
$$+ n(n+1)(n+2)(n+3)\mathrm{D}^4.\alpha.\mathrm{D}^{-n-4}.a + \text{etc.}$$

Ces formules se terminent dans les cas où l'une des dérivées de a ou de α et toutes les suivantes deviennent zéro; autrement elles vont l'une et l'autre à l'infini.

389. On peut tirer de ces formules différentes conséquences relatives aux intégrales.

Si l'on fait, par exemple, $n = 1$, $a = y$, $\alpha = dx$, y étant fonction de x; on aura par la formule (4), en changeant les dérivées en différentielles, et ajoutant la constante arbitraire C,

$$\int y dx = C + y\int dx - dy.\int^2 dx + d^2y.\int^3 dx - d^3y.\int^4 dx + \text{etc.},$$

et par la formule (5) on trouvera

$$\int y\,\mathrm{d}x = C + \mathrm{d}x\int y - \mathrm{d}^2x.\int^2 y + \mathrm{d}^3x.\int^3 y - \mathrm{d}^4x.\int^4 y + \text{etc.}$$

Si dans la première de ces séries infinies on suppose $\mathrm{d}x$ constante, on a $\int \mathrm{d}x = x$,

$\int^2 \mathrm{d}x = \int x = \dfrac{x^2}{2\,\mathrm{d}x}$, $\int^3 \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{2.3\,\mathrm{d}x^2}$, etc.; ainsi la série devient

$$\int y\,\mathrm{d}x = C + yx - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{d}^2y}{1.2.\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{3} - \frac{\mathrm{d}^3y}{1.2.3.\mathrm{d}x^3}\frac{x^4}{4} + \text{etc}:$$

et si dans la seconde série on suppose $\mathrm{d}y$ constante; puisque $\int y = \dfrac{y^2}{2\mathrm{d}y}$,

$\int^2 y = \dfrac{y^3}{2.3.\mathrm{d}y^2}$, etc., la seconde série devient

$$\int y\,\mathrm{d}x = C + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{y^2}{2} - \frac{\mathrm{d}^2x}{1.2.\mathrm{d}y^2}\frac{y^3}{3} + \frac{\mathrm{d}^3x}{1.2.3.\mathrm{d}y^3}\frac{y^4}{4} - \frac{\mathrm{d}^4x}{1.2.3.4.\mathrm{d}y^4}\frac{y^5}{5} + \text{etc.}$$

Ces deux séries pour $\int y\,\mathrm{d}x$ sont celles de JEAN BERNOULLI. Voyez ses œuvres tome I.er, page 125, et tome II.d, page 488.

Soit $a = \varphi x$, $\alpha = \mathrm{d}x^n$, $\mathrm{d}x$ constante, la formule (4) donne

$$\int^n \varphi x.\mathrm{d}x^n =$$
$$\varphi x\int^n \mathrm{d}x^n - n\,\mathrm{d}\varphi x.\int^{n+1}\mathrm{d}x^n + n(n+1)\,\mathrm{d}^2\varphi x.\int^{n+2}\mathrm{d}x^n$$
$$- n(n+1)(n+2)\,\mathrm{d}^3\varphi x.\int^{n+3}\mathrm{d}x^n + \text{etc.}$$

Or, $\mathrm{d}x$ étant constante, on a $\int \mathrm{d}x^n = \dfrac{x\,\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{d}x^{n-1}$, $\int^2 \mathrm{d}x^n = \int x\,\mathrm{d}x^{n-1}$ $= \dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x^{n-2}$, etc., et généralement $\int^r \mathrm{d}x^n = \dfrac{x^r.\mathrm{d}x^{n-r}}{1.2.3\ldots r}$. Donc, complétant l'intégrale par n constantes arbitraires, on trouve

$$\int^n \varphi x.\,\mathrm{d}x^n = \qquad\ldots\ldots(6)$$
$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1x + \mathfrak{C}_2x^2 + \mathfrak{C}_3x^3 + \text{etc.} + \mathfrak{C}_{n-1}x^{n-1} + \\ \dfrac{x^n}{n}\varphi x - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\dfrac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x^{n+2}}{n+2}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi x}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{x^{n+3}}{n+3}\dfrac{\mathrm{d}^3\varphi x}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

390. Si l'on a généralement

$$\varphi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}),$$

on a (n.° 112, formule 4) pour le coëfficient de x^n, $\mathrm{D}^{,1}$ se rapportant à α seul, $\mathrm{D}^{1,}$ à a seul, et D indiquant la dérivation totale,

$$\mathfrak{D}^n.\varphi(a,\alpha) = \mathfrak{D}^{,n}.\varphi(a,\alpha) + \mathrm{D}^{1,}.\mathfrak{D}^{,n-1}.\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{2,}.\mathfrak{D}^{,n-2}.\varphi(a,\alpha)$$
$$+ \text{etc.} + \mathfrak{D}^{n-1,}.\mathrm{D}^{,1}\varphi(a,\alpha) + \mathfrak{D}^{n,}.\varphi(a,\alpha);$$

en multipliant par $1.2.3\ldots.n$, on a, pour la dérivée non divisée,

$$\mathrm{D}^{n}.\varphi(a,\alpha) = \mathrm{D}^{,n}.\varphi(a,\alpha) + n\mathrm{D}^{1,}.\mathrm{D}^{,n-1}.\varphi(a,\alpha) + n(n-1)\mathrm{D}^{2,}.\mathrm{D}^{,n-2}\varphi(a,\alpha)$$
$$+ \text{etc.} + n\mathrm{D}^{n-1,}.\mathrm{D}^{,1}.\varphi(a,\alpha) + \mathrm{D}^{n,}.\varphi(a,\alpha);$$

et, en détachant l'échelle de dérivation,

$$\mathrm{D}^{n}.\varphi(a,\alpha) = (\mathrm{D}^{,1}. + \mathrm{D}^{1,}.)^{n} \times \varphi(a,\alpha).$$

A présent, si l'on change n en $-n$, ces deux dernières formules donnent, pour la dérivée inverse de l'ordre n,

$$\mathrm{D}^{-n}.\varphi(a,\alpha) = \qquad \ldots.(7)$$
$$\mathrm{D}^{,-n}.\varphi(a,\alpha) - n\mathrm{D}^{1,}.\mathrm{D}^{,-n-1}.\varphi(a,\alpha) + n(n+1)\mathrm{D}^{2,}.\mathrm{D}^{,-n-2}.\varphi(a,\alpha)$$
$$- n(n+1)(n+2)\mathrm{D}^{3,}.\mathrm{D}^{,-n-3}.\varphi(a,\alpha) + \text{etc. à l'infini};$$

et encore, en détachant l'échelle de dérivation,

$$\mathrm{D}^{-n}\,\varphi(a,\alpha) = (\mathrm{D}^{,1}. + \mathrm{D}^{1,}.)^{-n} \times \varphi(a,\alpha), \qquad \ldots.(8)$$

et l'on peut commencer le développement de $(\mathrm{D}^{,1}. + \mathrm{D}^{1,}.)^{-n}$ par $\mathrm{D}^{,1}.$ ou par $\mathrm{D}^{1,}.$

Si l'on avoit une fonction de trois, de quatre, ou d'un plus grand nombre de polynomes, tous ordonnés par rapport aux puissances de x, on auroit pareillement

$$\mathrm{D}^{-n}.\varphi(a,a',a'') = (\mathrm{D}^{,,1}. + \mathrm{D}^{,1}. + \mathrm{D}^{1,}.)^{-n} \times \varphi(a,a',a''), \qquad \ldots.(9)$$
$$\mathrm{D}^{-n}.\varphi(a,a',a'',a''') = (\mathrm{D}^{,,,1}. + \mathrm{D}^{,,1}. + \mathrm{D}^{,1}. + \mathrm{D}^{1,}.)^{-n} \times \varphi(a,a',a'',a'''), \quad ..(10)$$

et ainsi de suite, on développera les échelles à trois termes, à quatre termes, etc., comme, par les règles du §. II de l'article 1.er, on développe $(a+b+c)^{-n}$, $(a+b+c+d)^{-n}$, etc.; mais, en développant ainsi, on a des séries infinies.

391. Pour avoir des expressions finies, je remarque qu'en employant la division pour développer $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}$, on peut arrêter le développement à tel terme qu'on voudra, et en ajoutant le reste que laisse la division, divisé lui-même par $a+b$, on aura des expressions finies de $(a+b)^{-1}$, comme il suit :

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{(a+b)a},$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{(a+b)a^2},$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{(a+b)a^3},$$
$$= \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \text{etc.} \pm \frac{b^{r-1}}{a^r} \mp \frac{b^r}{(a+b)a^r}.$$

Mettant donc D, $D^{\cdot 1}$, $D^{1\cdot}$, au lieu de $a+b$, a, b respectivement, on a

$$D^{-1} = (D^{\cdot 1} + D^{1\cdot})^{-1} = D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1} = D^{\cdot -1} - D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{-1}D^{2\cdot}D^{\cdot -2},$$

et généralement

$$D^{-1} = D^{\cdot -1} - D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{2\cdot}D^{\cdot -3} - D^{3\cdot}D^{\cdot -4} + \text{etc.} \mp D^{r-1\cdot}D^{\cdot -r} \pm D^{-1}D^{r\cdot}D^{\cdot -r}.$$

On a donc

$$D^{-1}.\varphi(a,\alpha) = (D^{\cdot 1}. + D^{1\cdot}.)^{-1} \times \varphi(a,\alpha) = D^{\cdot -1}.\varphi(a,\alpha) - D^{-1}.D^{1\cdot}.D^{\cdot -1}.\varphi(a,\alpha);$$

ou [en mettant S, $S^{\cdot 1}$, $S^{1\cdot}$, (n.° 36) au lieu de D^{-1}, $D^{\cdot -1}$, $D^{-1\cdot}$, après le développement de l'échelle, si l'on aime mieux avoir des indices positifs]

$$S.\varphi(a,\alpha) = S^{\cdot 1}.\varphi(a,\alpha) - S.D^{1\cdot}.S^{\cdot 1}.\varphi(a,\alpha); \qquad \ldots.(11)$$

ce qui est une généralisation du théorème de l'intégration par parties, un des plus féconds du calcul intégral.

On a généralement

$$D^{-1}.\varphi(a,\alpha) = (D^{\cdot 1}. + D^{1\cdot}.)^{-1}.\varphi(a,\alpha) = \qquad \ldots..(12)$$

$$D^{\cdot -1}.\varphi(a,\alpha) - D^{1\cdot}.D^{\cdot -2}.\varphi(a,\alpha) + D^{2\cdot}.D^{\cdot -3}.\varphi(a,\alpha) - D^{3\cdot}.D^{\cdot -4}.\varphi(a,\alpha)$$
$$+ \text{etc.} \mp D^{r-1\cdot}.D^{\cdot -r}.\varphi(a,\alpha) \pm D^{-1}.D^{r\cdot}.D^{\cdot -r}.\varphi(a,\alpha):$$

ou bien encore $\quad D^{-1}.\varphi(a,\alpha) = S.\varphi(a,\alpha) = \qquad \ldots..(13)$

$$S^{\cdot 1}.\varphi(a,\alpha) - D^{1\cdot}.S^{\cdot 2}.\varphi(a,\alpha) + D^{2\cdot}.S^{\cdot 3}.\varphi(a,\alpha) - D^{3\cdot}.S^{\cdot 4}.\varphi(a,\alpha)$$
$$+ \text{etc.} \mp D^{r-1\cdot}.S^{\cdot r}.\varphi(a,\alpha) \pm S.D^{r\cdot}.S^{\cdot r}.\varphi(a,\alpha).$$

Quant aux dérivées inverses des ordres supérieurs au premier ; puisque $D^{-1} = D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1}$, en prenant derechef la dérivée inverse, on aura

$$D^{-2} = D^{-1}D^{-1} = (D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1})(D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1}) = (D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1})^2$$
$$= D^{\cdot -2} - 2D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{-2}D^{2\cdot}D^{\cdot -2}.$$

et en prenant une puissance quelconque n, on a pour la dérivée inverse de l'ordre n

$$D^{-n} = (D^{\cdot -1} - D^{-1}D^{1\cdot}D^{\cdot -1})^n, \qquad \ldots..(14)$$

expression qu'on développe par la régle du binome, et qui est toujours d'un nombre fini de termes.

Puisque D^{-1} est aussi $= D^{\cdot -1} - D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{-1}D^{2\cdot}D^{\cdot -2}$, on a pareillement

$$D^{-n} = (D^{\cdot -1} - D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{-1}D^{2\cdot}D^{\cdot -2})^n,$$

et généralement

$$D^{-n} = (D^{\cdot -1} - D^{1\cdot}D^{\cdot -2} + D^{2\cdot}D^{\cdot -3} - \text{etc.} \mp D^{r-1\cdot}D^{\cdot -r} \pm D^{-1}D^{r\cdot}D^{\cdot -r})^n.$$

Partant

$$D^{-n}.\varphi(a,\alpha) = \qquad \ldots..(15)$$

$$(D^{\cdot -1}. - D^{1\cdot}.D^{\cdot -2}. + D^{2\cdot}.D^{\cdot -3}. - \text{etc.} \mp D^{r-1\cdot}.D^{\cdot -r}. \pm D^{-1}.D^{r\cdot}.D^{\cdot -r}.)^n \times \varphi(a,\alpha),$$

expression finie. Ces théorémes, dont on peut trouver un plus grand nombre par les mémes principes, sont fort-utiles dans plusieurs rencontres.

Il

Il n'est pas difficile de faire voir qu'il est indifférent d'écrire les signes D^{-1} D, $D^{-1,}$, $D^{1,}$, $D^{,-1}$, $D^{,1}$ dans tel ordre qu'on voudra.

392. On peut faire différentes applications de ces formules; pour les appliquer aux différentielles, nous allons en déduire d'une manière simple les conditions d'intégrabilité des quantités différentielles d'un ordre quelconque.

Soit $V\mathrm{d}x$ une quantité différentielle, ou $V\mathrm{d}x = 0$ une équation différentielle d'un ordre quelconque r, V étant une fonction de x, y, $\partial.y$, $\partial^2 y$, etc., $\partial^r.y$, et $\mathrm{d}x$ étant constante; on demande les conditions auxquelles on reconnoit que $V\mathrm{d}x$ est une différentielle exacte; c'est-à-dire, que dans l'état où se trouve $V\mathrm{d}x$, elle est intégrable, sans qu'on ait besoin de supposer y une fonction particulière de x, la relation entre y et x pouvant être quelconque.

Soit Z l'intégrale de $V\mathrm{d}x$, ou $Z = \int V\mathrm{d}x$; si nous désignons par $\mathrm{d}^{1,}$, la différentiation par rapport à x seul, par $\mathrm{d}^{,1}$. la différentiation relative à y, $\partial.y$, $\partial^2.y$, $\partial^3.y$, etc. par d et $\int$ la différentiation et l'intégration totales; on aura $\mathrm{d}Z = \mathrm{d}\int V\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}V\mathrm{d}x$, ou, puisque $\mathrm{d} = \mathrm{d}^{1,} + \mathrm{d}^{,1}$,
$(\mathrm{d}^{1,} + \mathrm{d}^{,1})Z = \int(\mathrm{d}^{1,} + \mathrm{d}^{,1})V\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^{1,}Z + \mathrm{d}^{,1}Z = \int \mathrm{d}^{1,}V\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}^{,1}V\mathrm{d}x$.
Or, la relation entre y et x étant quelconque, $\mathrm{d}^{1,}$ et $\mathrm{d}^{,1}$ indiquent des opérations indépendantes; on a donc séparément

$$\mathrm{d}^{1,}Z = \int \mathrm{d}^{1,}V\mathrm{d}x \ldots\ldots (1), \quad \text{et} \quad \mathrm{d}^{,1}Z = \int \mathrm{d}^{,1}V\mathrm{d}x; \ \ldots\ldots (2)$$

et, en divisant par $\mathrm{d}x$, ces équations deviennent

$$\partial^{1,}.Z = \int.\partial^{1,}.V \ldots\ldots (3), \quad \text{et} \quad \partial^{,1}.Z = \int.\partial^{,1}V. \quad \ldots\ldots (4)$$

Cela posé, puisque $Z = \int V\mathrm{d}x$, si $V\mathrm{d}x$ est de l'ordre r, il est clair que Z ne sera plus que de l'ordre $r - 1$; ou, en d'autres termes, si $V\mathrm{d}x$ renferme $\partial^r.y$, Z ne pourra point renfermer de dérivée $\partial.y$, $\partial^2.y$, etc. supérieure à $\partial^{r-1}.y$, quelle que soit d'ailleurs la manière dont ces dérivées entrent dans Z. Ainsi $\partial.V$ et $\partial.Z$ seront de cette forme :

$$\partial.V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\partial.y + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\partial.y}\partial^2.y + \text{etc.} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\partial^{r-1}.y}\partial^r.y + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\partial^r.y}\partial^{r+1}.y, \ \ldots (5)$$

$$\partial.Z = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}\partial.y + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\partial.y}\partial^2.y + \text{etc.} + \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\partial^{r-1}.y}\partial^r.y, \quad \ldots\ldots (6)$$

expressions que nous représentons par

$$\partial.V = M + N\partial.y + O\partial^2.y + P\partial^3.y + \text{etc.} + N_{r-1}\partial^r.y + N_r\partial^{r+1}.y, \ \ldots (7)$$

$$\partial.Z = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\partial.y + \mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{P}\partial^3.y + \text{etc.} + \mathfrak{N}_{r-1}\partial^r.y. \quad \ldots (8)$$

On a donc d'abord $\partial^{1,}.V = M$, $\partial^{1,}.Z = \mathfrak{M}$; donc pour satisfaire à l'équation (3), il faut que l'on ait $\int.M = \mathfrak{M}$. Or cela a toujours lieu, si $\mathrm{d}x$ est constante;

car $\partial.Z$ étant $= V$, on a $\partial^{1\prime}.\partial.Z = \partial^{1\prime}.V$, ou $\partial.\partial^{1\prime}.Z = \partial^{1\prime}.V$, donc $\partial.\mathfrak{M} = M$, donc M est la dérivée totale de $\mathfrak{M}$; donc $\mathfrak{M} = \int.M$.

De plus, pour que l'équation (4) soit satisfaite, il faut qu'on ait, en mettant ∂^{-1} au lieu de $\int$,

$$\left.\begin{array}{l}\partial^{-1}.(N\partial.y + O\partial^{2}.y + P\partial^{3}.y + \text{etc.} + N_{r-1}\partial^{r}.y + N_{r}\partial^{r+1}.y) \\ \quad = \mathfrak{N}\partial.y + \mathfrak{O}\partial^{2}.y + \mathfrak{P}.\partial^{3}.y + \text{etc.} + \mathfrak{N}_{r-1}\partial^{r}.y.\end{array}\right\} \ldots(9)$$

Mais ∂ étant une dérivation totale, je puis la partager en deux autres, l'une $\partial^{1\prime}$ qui ne se rapporte qu'aux N, O, P, etc., N_{r-1}, N_{r}, tout variant cependant dans ces quantités, c'est-à-dire, tant x que y et $\partial.y$, $\partial^{2}.y$, $\partial^{3}.y$, etc. ; l'autre ∂'^{1}, qui n'affecte que les $\partial.y$, $\partial^{2}.y$, $\partial^{3}.y$, etc. qu'on voit dans (9). Ainsi j'aurai $\partial^{-1}. = (\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1}$. On ne confondra pas $\partial^{\cdot 1}.$ et $\partial^{1\cdot}.$ ci-dessus avec $\partial'^{1}.$ et $\partial^{1\prime}$. Ici le partage de la dérivation totale ∂ est différent et les . sont placées plus haut.

Il faut donc, en écrivant à rebours les séries de (9), que l'expression

$$(\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1} \times (N_{r}\partial^{r+1}.y + N_{r}\partial^{r-1}.y + \text{etc.} + P\partial^{3}.y + O\partial^{2}.y + N\partial.y) \quad ..(10)$$

étant développée soit égale à

$$\mathfrak{N}_{r-1}\partial^{r}.y + \text{etc.} + \mathfrak{P}\partial^{3}.y + \mathfrak{O}\partial^{2}.y + \mathfrak{N}\partial.y \quad \ldots\ldots(11)$$

Il n'y a plus qu'à développer $(\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1}$, qui devient

$$\partial'^{-1}. - \partial^{1\prime}.\partial'^{-2} + \partial^{2\prime}.\partial'^{-3}. - \partial^{3\prime}.\partial'^{-4} + \partial^{4\prime}.\partial'^{-5}. + \text{etc.}, \quad \ldots(12)$$

et à effectuer la multiplication indiquée dans (10), en observant que $\partial'^{-1}.\partial^{r}.y = \partial^{r-1}.y$; puis à comparer le résultat avec (11).

Soit, par exemple, $r = 4$, il faut qu'on ait le développement de

$$(\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1} \times (R\partial^{5}.y + Q\partial^{4}.y + P\partial^{3}.y + O\partial^{2}.y + N\partial.y) \quad \ldots(13)$$

égal à

$$\mathfrak{Q}\partial^{4}.y + \mathfrak{P}\partial^{3}.y + \mathfrak{O}\partial^{2}.y + \mathfrak{N}\partial.y \quad \ldots.(14)$$

En multipliant (12) par $R\partial^{5}.y + Q\partial^{4}.y + \text{etc.} + N\partial.y$, on a sur-le-champ,

$$(15)\ldots \begin{array}{r} R\partial^{4}.y - \partial.R.\partial^{3}.y + \partial^{2}.R.\partial^{2}.y - \partial^{3}.R.\partial.y + \partial^{4}.R.y - \partial^{5}.R.\partial^{-1}.y + \text{etc.} \\ + Q.\partial^{3}.y - \partial.Q.\partial^{2}.y + \partial^{2}.Q.\partial.y - \partial^{3}.Q.y + \partial^{4}.Q.\partial^{-1}.y - \text{etc.} \\ + P\partial^{2}.y + \partial.P.\partial.y + \partial^{2}.P.y - \partial^{3}.P.\partial^{-1}.y + \text{etc.} \\ + O\partial.y - \partial.O.y + \partial^{2}.O.\partial^{-1}.y - \text{etc.} \\ + N.y + \partial.N.\partial^{-1}.y + \text{etc.} \end{array}$$

Comparant présentement à (14), on voit qu'il faut que les colonnes affectées de y, $\partial^{-1}.y$, etc. soient zéro, ce qui a lieu si l'on a

$$N - \partial.O + \partial^{2}.P - \partial^{3}.Q + \partial^{4}.R = 0 ; \quad \ldots\ldots(16)$$

car les coëfficiens des colonnes suivantes de (15) ne sont autre chose que les

dérivées successives des coëfficiens de y. L'équation (16) est donc la condition d'intégrabilité cherchée. Dans (16) les ∂ marquent des dérivations totales, qu'on exécute en faisant tout varier et divisant par $\mathrm{d}x$.

393. On peut aussi développer $\partial^{-1}. = (\partial^{1'}. + \partial'^{1}.)^{-1}$ en commençant par $\partial^{1'}.$, ce qui donne

$$\partial^{-1}. = \partial^{-1'}. - \partial'^{1}.\partial^{-2'}. + \partial'^{2}.\partial^{-3'}. - \partial'^{3}.\partial^{-4'}. + \partial'^{4}.\partial^{-5'}. - \text{etc.},$$

et exécuter la multiplication en laissant les termes des séries (9) dans l'ordre où ils se trouvent.

Soit, par exemple, $r = 4$; en mettant $\int$ au lieu de ∂^{-1}, on trouve ainsi

$$\begin{array}{rl|rl|rl|rl|rl|rl}
\int.N.\partial.y & -\int^2.N & \partial^2.y & +\int^3.N & \partial^3.y & -\int^4.N & \partial^4.y & +\int^5.N & \partial^5.y & -\int^6.N & \partial^6.y & +\text{etc.} \\
 & +\int.O & & -\int^2.O & & +\int^3.O & & -\int^4.O & & +\int^5.O & & -\text{etc.} \\
 & & & +\int.P & & -\int^2.P & & +\int^3.P & & -\int^4.P & & +\text{etc.} \\
 & & & & & +\int.Q & & -\int^2.Q & & +\int^3.Q & & -\text{etc.} \\
 & & & & & & & +\int.R & & -\int^2.R & & +\text{etc.}
\end{array}$$

Comparant avec $\mathfrak{N}\partial.y + \mathfrak{O}.\partial^2.y + \mathfrak{P}\partial^3.y + \mathfrak{Q}\partial^4.y$; on voit que, pour que $V\mathrm{d}x$ soit intégrable d'elle-même, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\int.N = \mathfrak{N}, \\
&\int.O - \int^2.N = \mathfrak{O}, \\
&\int.P - \int^2.O + \int^3.N = \mathfrak{P}, \\
&\int.Q - \int^2.P + \int^3.O - \int^4.N = \mathfrak{Q}, \\
&\int.R - \int^2.Q + \int^3.P - \int^4.O + \int^5.N = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, sont des dérivées différentielles qu'on a obtenues par la différentiation de Z, on a le théorème que donne EULER dans le tome III de son Calcul intégral, page 523, savoir : Si $V\mathrm{d}x$ est intégrable d'elle-même, la quantité $N\mathrm{d}x$ sera aussi intégrable d'elle-même; et faisant $O - \int N\mathrm{d}x = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}\mathrm{d}x$ sera intégrable; faisant $P - \int\mathfrak{o}\mathrm{d}x = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\mathrm{d}x$ sera intégrable, faisant $Q - \int\mathfrak{p}\mathrm{d}x = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathrm{d}x$ sera intégrable; et faisant $R - \int\mathfrak{q}\mathrm{d}x = \mathfrak{r}$, $\int\mathfrak{r}\mathrm{d}x$ sera zéro, si l'on fait abstraction des constantes arbitraires.

394. Si $\mathrm{d}x$ est aussi variable dans $V\mathrm{d}x$, on pourra considérer x et y comme fonctions d'une autre variable. Soit, par exemple, $V\mathrm{d}x$ de l'ordre 4, tant par rapport à x que par rapport à y, on aura

$$\partial.V = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dx}\partial.x + \frac{dV}{d\partial.x}\partial^2.x + \frac{dV}{d\partial^2.x}\partial^3.x + \frac{dV}{d\partial^3.x}\partial^4.x + \frac{dV}{d\partial^4.x}\partial^5.x \\ + \frac{dV}{dy}\partial.y + \frac{dV}{d\partial.y}\partial^2.y + \frac{dV}{d\partial^2.y}\partial^3.y + \frac{dV}{d\partial^3.y}\partial^4.y + \frac{dV}{d\partial^4.y}\partial^5.y; \end{array} \right.$$

je représente cette expression par

$$\partial.V = \left\{ \begin{array}{l} n\partial.x + o\partial^2.x + p\partial^3.x + q\partial^4.x + r\partial^5.x \\ + N\partial.y + O\partial^2.y + P\partial^3.y + Q\partial^4.y + R\partial^5.y; \end{array} \right.$$

et, Z étant l'intégrale de $V dx$, $\partial.Z$ sera de la forme

$$\partial.Z = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{n}\partial.x + \mathfrak{o}\partial^2.x + \mathfrak{p}\partial^3.x + \mathfrak{q}\partial^4.x \\ + \mathfrak{N}\partial.y + \mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{P}\partial^3.y + \mathfrak{Q}\partial^4.y; \end{array} \right.$$

donc, pour satisfaire aux équations (3) et (4), il faut qu'on ait

$$(\partial^{\prime 1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1}(r\partial^5.x + q\partial^4.x + p\partial^3.x + o\partial^2.x + n\partial.x)$$
$$= \mathfrak{q}\partial^4.x + \mathfrak{p}\partial^3.x + \mathfrak{o}\partial^2.x + \mathfrak{n}\partial.x,$$

$\partial^{1\prime}$ se rapportant à r, q, p, o, n, et $\partial^{\prime 1}$ à $\partial.x$, $\partial^2.x$, $\partial^3.x$, etc.; ensuite il faut qu'on ait encore, comme ci-dessus,

$$(\partial^{\prime 1}. + \partial^{1\prime}.)^{-1}(R\partial^5.y + Q\partial^4.y + P\partial^3 y + O\partial^2.y + N\partial.y)$$
$$= \mathfrak{Q}\partial^4 y + \mathfrak{P}\partial^3.y + \mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{N}\partial.y,$$

ce qui, en développant comme ci-dessus et comparant les développemens aux seconds membres, donne les deux équations de condition :

$$n - \partial.o + \partial^2.p - \partial^3.q + \partial^4.r = 0,$$
$$N - \partial.O + \partial^2.P - \partial^3.Q + \partial^4.R = 0.$$

On voit en général, qu'il y a autant de ces équations de condition que dans V il y a de variables avec leurs dérivées différentielles.

395. Le principal avantage qu'offre cette manière d'employer l'échelle de dérivation, consiste en ce qu'elle fait trouver sur-le-champ les conditions pour qu'une quantité soit une différentielle exacte d'un ordre quelconque k.

Soit U l'intégrale de l'ordre k de $V dx^k$, que je suppose être une différentielle exacte du même ordre k, de sorte que $U = \int^k V.dx^k$; on aura $\partial.U = \partial.\int^k.V = \int^k.\partial.V$, donc $(\partial^{1\prime}. + \partial^{\prime 1}.)U = \int^k.(\partial^{1\prime}. + \partial^{\prime 1}.)V$; et puisque $\partial^{1\prime}$ et $\partial^{\prime 1}$ [qui ont ici la même signification qu'au commencement du n.° 392], indiquent des opérations indépendantes, il faut qu'on ait séparément

$$\partial^{1\prime}.U = \int^k.\partial^{1\prime}.V, \ \ldots\ldots(17), \quad \text{et } \partial^{\prime 1}.U = \int^k.\partial^{\prime 1}.V \ \ldots\ldots(18).$$

L'équation (17) a lieu d'elle-même si dx est constante; faisant donc $\partial = \partial^{\prime 1}. + \partial^{1\prime}$, comme

comme vers la fin du n.° 392 (où il ne faut pas confondre ∂'^{1} et $\partial^{1\prime}$ avec $\partial_{.}^{1}$ et $\partial^{1}_{.}$ qui ont les, placées plus bas), il faut que

$$\left.\begin{array}{l}(\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-k} \times (N_r \partial^{r+1}.y + \text{etc.} + P\partial^3.y + O\partial^2.y + N\partial.y)\\ = \mathfrak{N}_{r-1}\partial^{r-k}.y + \text{etc.} + \mathfrak{P}\partial^3.y + \mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{N}\partial.y;\end{array}\right. \quad \ldots(19)$$

car $\partial^r.y$ étant la plus haute dérivée de y dans V, U ne pourra être que de l'ordre $r-k$, et sa plus haute dérivée de y sera par conséquent $\partial^{r-k}.y$.

Or on a sur-le-champ

$$(\partial'^{1}. + \partial^{1\prime}.)^{-k} =$$

$$\partial'^{-k}. - k\partial^{1\prime}.\partial'^{-k-1}. + \frac{k.k+1}{1\,.\,2}\partial^{2\prime}.\partial'^{-k-2}. - \frac{k.k+1.k+2}{1\,.\,2\,.\,3}\partial^{3\prime}.\partial'^{-k-3}. + \text{etc.}$$

Il n'y a donc plus qu'à effectuer la multiplication dans (19) et à comparer le produit au second membre.

Soit, par exemple, $r=4$ et $k=3$, il faut qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l}(R\partial^5.y + Q\partial^4.y + P\partial^3.y + O\partial^2.y + N\partial.y)\times\\ (\partial'^{-3}. - 3\partial^{1\prime}.\partial'^{-4}. + 6\partial^{2\prime}.\partial'^{-5}. - 10\partial^{3\prime}.\partial'^{-6}. + \text{etc.})\end{array}\right\} = \mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{N}\partial.y$$

Effectuant la multiplication dans le premier membre, on a sur-le-champ

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}R\partial^2.y - 3\partial.R & \partial.y + 6\partial^2.R & y - 10\partial^3.R & \partial^{-1}.y + 15\partial^4.R & \partial^{-2}.y - 21\partial^5.R & \partial^{-3}.y + \text{etc.}\\ +Q & -3\partial.Q & +6\partial^2.Q & -10\partial^3.Q & +15\partial^4.Q & -\text{etc.}\\ & +P & -3\partial.P & +1\partial^2.P & -10\partial^3P & +\text{etc.}\\ & & +O & -3\partial.O & +6\partial^2.O & -\text{etc.}\\ & & & +N & -3\partial.N & +\text{etc.}\end{array}$$

Comparant à $\mathfrak{O}\partial^2.y + \mathfrak{N}\partial.y$, on trouve que les trois conditions, pour que $V dx^3$ soit une différentielle exacte du 3.e ordre, sont

$$P - 3\partial.Q + 6\partial^2.R = 0, \quad \ldots(\text{I})$$

$$O - 3\partial.P + 6\partial^2.Q - 10\partial^3.R = 0, \quad \ldots(\text{II})$$

$$N - 3\partial.O + 6\partial^2.P - 10\partial^3.Q + 15\partial^4.R = 0. \quad \ldots(\text{III})$$

Les coëfficiens de $\partial^{-3}.y$, $\partial^{-4}.y$, etc. contiennent les mêmes quantités que celui de $\partial^{-2}.y$, et égalés à zéro, ils n'expriment aucune condition qui ne soit une conséquence de (I), (II) et (III); ainsi le coëfficient de $\partial^{-3}.y$, par exemple, est égal à $-3\partial.(\text{III}) - 3\partial^2.(\text{II}) - \partial^3.(\text{I})$.

396. L'usage des échelles de dérivation s'étend au calcul des variations; leur utilité se fait surtout sentir dans les cas compliqués de ce calcul. Obligé de me resserrer dans des bornes convenables, je supprime les applications que j'avois faites à ce sujet.

397. Si dans la formule que nous avons trouvée pour $\text{D}^{n-r}.(\zeta^r a)$ dans le n.° 126, on change n en $-n$, elle devient

$$\text{D}^{-n-r}.(\zeta^r a) = \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\pm \alpha^r \text{D}^{-n}.a \mp r\alpha^{r-1}\text{D}^{-n}.(\alpha a) \pm \frac{r.r-1}{1\,.\,2}\text{D}^{-n}.(\alpha^2 a) \mp \text{etc.}$$

$$+ \frac{r.r-1}{1\,.\,2}\alpha^2\text{D}^{-n}.(\alpha^{r-2}a) - r\alpha\text{D}^{-n}.(\alpha^{r-1}a) + \text{D}^{-n}.(\alpha^r a),$$

les signes supérieurs sont pour r pair, les inférieurs pour r impair; ici chaque terme étant affecté d'une dérivée divisée à indice négatif, on peut considérer chaque terme comme divisé par le facteur zéro, et ainsi aucun des termes ne disparoît, comme il en a disparu au n.° 383.

Cette formule présente le moyen de rappeler l'intégrale $\int^{r+1} y\,dx^{r+1}$ à une expression finie d'intégrales du premier ordre, y étant une fonction quelconque de x, et dx constante.

En effet, il suffit de faire $a = y\,dx$, $\alpha = x$, $\zeta = dx$, $n = 1$, $\text{D}^{-n}. = \text{D}^{-1}. = \int$, $\text{D}^{-n-r}. = \pm 1.2.3\ldots r.\int^{r+1}$, le signe $+$ répondant à r pair et le signe $-$ à r impair; la formule (1) donne aussitôt

$$\int^{r+1} y\,dx^{r+1} = \int^{r+1}(dx^r.y\,dx) = \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots r}\left\{\begin{array}{l} x^r\int y\,dx - rx^{r-1}\int xy\,dx + \frac{r.r-1}{1\,.\,2}x^{r-2}\int x^2 y\,dx - \text{etc.} \\ + \frac{r.r-1}{1\,.\,2}x^2\int x^{r-2}y\,dx - rx\int x^{r-1}y\,dx + \int x^r y\,dx \end{array}\right\},$$

expression qui s'accorde avec ce que trouve Euler dans le second volume de son Calcul intégral, page 368.

Cette formule demeure la même si dx est variable et x, aussi bien que y, fonction d'une quantité quelconque t : dans ce cas on a coutume d'écrire $\int dx\int y\,dx$, $\int dx\int dx\int y\,dx$, etc., au lieu de $\int^2 y\,dx^2$, $\int^3 y\,dx^3$, etc., et notre formule (2) s'accorde encore avec ce que trouve Euler, par une voie moins facile, dans le recueil de mémoires qui forme le 4.e volume ou le supplément de son Calcul intégral, Pétersbourg 1794. Voyez *de formulis integralibus implicatis earumque evolutione et transformatione*, pages 544 et suivantes.

La formule (1) donne même encore

$$\int^{n+r} y\,dx^{n+r} =$$

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+r-1)}\left\{\begin{array}{l} x^r\int^n y\,dx^n - rx^{r-1}\int^n xy\,dx^n + \frac{r.r-1}{1\,.\,2}x^{r-2}\int^n x^2 y\,dx^n \\ -\text{etc.} + \frac{r.r-1}{1\,.\,2}x^2\int^n x^{r-2}y\,dx^n - rx\int^n x^{r-1}y\,dx^n + \int^n x^r y\,dx^n \end{array}\right\}.$$

398. On aura toujours des formules pour les dérivées inverses de l'ordre n, en prenant la formule de la dérivée directe de l'ordre quelconque n, et en y changeant n en $-n$. Par ce moyen et celui des échelles de dérivation on parvient aisément aux théorèmes généraux des dérivées inverses et à ceux du calcul intégral.

En appliquant ce procédé aux formules de l'article troisième, on en tireroit des théorèmes pour les dérivées inverses doubles, triples, etc., pour les intégrales doubles, triples, etc., et les intégrales des quantités aux différentielles partielles. Cette matière mériteroit bien d'être traitée à cause de son importance et de ses difficultés, mais nous ne pourrions nous y arrêter d'une manière utile, sans entrer dans des détails que le plan de cet ouvrage ne sauroit comporter.

(III.)

399. On trouve dans les *Mémoires de Berlin pour* 1772 (*) des théorèmes qui expriment la relation entre les différences d'un ordre quelconque et les différentielles, et entre les sommes et les intégrales : ils sont remarquables par leur simplicité et dûs à LAGRANGE, qui les a exposés sans démonstration; il a même ajouté, qu'il seroit peut-être difficile d'en donner une démonstration directe et analytique. LAPLACE les a démontrés depuis dans divers mémoires (**). Comme ces théorèmes tiennent aux dérivations, nous allons aussi en donner une démonstration qui nous paroît directe et facile. Voici les théorèmes :

Soit u une fonction quelconque de x, $\xi = \Delta x$ l'accroissement de x, et Δu l'accroissement de u qui répond à ξ; on aura pour la différence de l'ordre quelconque l

I....... $$\Delta^l u = \left\{ e^{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\xi} - 1 \right\}^l;$$

où e est le nombre dont le logarithme naturel est l'unité. Après avoir développé le second membre de cette équation suivant les puissances de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\xi$, il faudra appliquer les exposans de $\mathrm{d}u$ à la caractéristique d, pour indiquer des différentielles de même ordre que les puissances, c'est-à-dire changer $\mathrm{d}u^r$ en $\mathrm{d}^r u$.

(*) Dans le mémoire *sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, pages 194 et 195.

(**) *Mémoires présentés*, *etc.*, tome VII, pages 534 et suiv. *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, année 1777, pages 102 et suivantes, et année 1779, pages 245 et suivantes.

De plus, en changeant l en $-l$, et désignant par Σ la somme qui répond à la différence marquée par Δ, ce qui donne $\Delta^{-1} = \Sigma$, $\Delta^{-l} = \Sigma^l$, l'équation précédente subsistera toujours et deviendra

$$\text{II.....} \qquad \Delta^{-l}u = \Sigma^l u = \left\{ e^{\frac{du}{dx}\cdot\xi} - 1 \right\}^{-l}.$$

pourvu qu'après avoir dévelopé le second membre de cette équation, on change encore $(du)^r$ en $d^r u$ et $(du)^{-r}$ en $d^{-r}u$ ou $\int^r u$.

400. *Démonstration.* 1.° On a par le théorème de TAYLOR, u étant une fonction quelconque de x,

$$\Delta u = 1\frac{du}{dx}\xi + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\xi^3 + \text{etc.} \qquad \text{.....(1)}$$

Je mets à la place de 1, $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, etc. β, γ, δ, etc., et $\partial.u$ au lieu de $\frac{du}{dx}$, afin que l'équation (1) se présente sous cette forme :

$$\Delta u = \beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.} \qquad \text{....(2)}$$

Maintenant, puisque u est une fonction quelconque, on pourra mettre Δu au lieu de u, et l'on aura

$$\Delta\Delta u = \beta\partial.\Delta u.\xi + \gamma\partial^2.\Delta u.\xi^2 + \delta\partial^3.\Delta u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.\Delta u.\xi^4 + \text{etc.} \qquad \text{....(3)}$$

Mettant dans le second membre, au lieu de Δu, sa valeur (2), on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^2 u = \beta^2\partial^2.u.\xi^2 &+ \beta\gamma\partial^3.u.\xi^3 + \beta\delta\partial^4.u.\xi^4 + \beta\varepsilon\partial^5.u.\xi^5 + \text{etc.}\\ &+ \gamma\beta\partial^3.u.\xi^3 + \gamma\gamma\partial^4.u.\xi^4 + \gamma\delta\partial^5.u.\xi^5 + \text{etc.}\\ &+ \delta\beta\partial^4.u.\xi^4 + \delta\gamma\partial^5.u.\xi^5 + \text{etc.}\\ &+ \varepsilon\beta\partial^5.u.\xi^5 + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

où les coëfficiens β^2, $\beta\gamma + \gamma\beta$, $\beta\delta + \gamma\gamma + \delta\beta$, etc. sont égaux respectivement à β^2, $\text{D}.(\beta.\beta) = \text{D}.\beta^2$, $\text{D}^2.(\beta.\beta) = \text{D}^2.\beta^2$, $\text{D}^3.(\beta.\beta) = \text{D}^3.\beta^2$, etc., β étant regardé comme un premier terme. Ainsi la série sera

$$\Delta^2 u = \beta^2\partial^2.u.\xi^2 + \text{D}.\beta^2.\partial^3.u.\xi^3 + \text{D}^2.\beta^2.\partial^4.u.\xi^4 + \text{D}^3.\beta^2.\partial^5.u.\xi^5 + \text{etc.}; \qquad \text{...(4)}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Delta^2 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.})^2, \qquad \text{...(5)}$$

pourvu qu'après le développement on change $(\partial.u)^2$ en $\partial^2.u$, $(\partial u)^3$ en $\partial^3.u$, $(\partial u)^4$ en $\partial^4.u$; et généralement $(\partial.u)^m$ en $\partial^m.u$.

2.°

2.° A présent, dans l'équation (4) je mets partout Δu à la place de u, et j'ai
$$\Delta^3 u = \beta^2\partial^2.\Delta u.\xi^2 + \mathrm{D}.\beta^2.\partial^3.\Delta u.\xi^3 + \mathrm{D}^2.\beta^2.\partial^4.\Delta u.\xi^4 + \mathrm{D}^3.\beta^2.\partial^5.\Delta u.\xi^5 + \text{etc.}; \quad ..(6)$$
substituant dans le second membre au lieu de Δu sa valeur (2), on trouve
$$\Delta^3 u = \beta^3\partial^3.u.\xi^3 + \left.\begin{array}{r}\beta\mathrm{D}.\beta^2 \\ +\ \gamma\beta^2\end{array}\right|\partial^4.u.\xi^4 + \left.\begin{array}{r}\beta\mathrm{D}^2.\beta^2 \\ +\ \gamma\mathrm{D}.\beta^2 \\ +\ \delta\beta^2\end{array}\right|\partial^5.u.\xi^5 + \left.\begin{array}{r}\beta\mathrm{D}^3.\beta^2 \\ +\ \gamma\mathrm{D}^2.\beta^2 \\ +\ \delta\mathrm{D}.\beta^2 \\ +\ \varepsilon\beta^2\end{array}\right|\partial^6.u.\xi^6 + \begin{array}{l}\text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.},\end{array}$$
où les coëfficiens de $\partial^3.u.\xi^3$, $\partial^4.u.\xi^4$, etc. sont évidemment égaux à β^3, $\mathrm{D}.(\beta.\beta^2) = \mathrm{D}.\beta^3$, $\mathrm{D}^2.(\beta.\beta^2) = \mathrm{D}^2.\beta^3$, $\mathrm{D}^3.(\beta.\beta^2) = \mathrm{D}^3.\beta^3$, etc., de sorte qu'on a
$$\Delta^3 u = \beta^3\partial^3.u.\xi^3 + \mathrm{D}.\beta^3.\partial^4.u.\xi^4 + \mathrm{D}^2.\beta^3.\partial^5.u.\xi^5 + \mathrm{D}^3.\beta^3.\partial^6.u.\xi^6 + \text{etc.}, \quad ..(7)$$
ou, ce qui revient au même,
$$\Delta^3 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.})^3,$$
si après le développement on change $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$.

3.° En général, il est aisé de voir que, quel que soit l'ordre de la différence, le développement de $\Delta^l u$ aura cette forme :
$$\Delta^l u = B\partial^l.u.\xi^l + C\partial^{l+1}.u.\xi^{l+1} + D\partial^{l+2}.u.\xi^{l+2} + E\partial^{l+3}.u.\xi^{l+3} + \text{etc.} \quad ..(8)$$
Pour passer à la différence de l'ordre suivant, je mets Δu à la place de u, et en mettant tout de suite la valeur (2) de Δu au lieu de u dans le second membre, je trouve
$$\Delta^{l+1}u =$$
$$\beta B\partial^{l+1}.u.\xi^{l+1} + \left.\begin{array}{r}\beta C \\ +\ \gamma B\end{array}\right|\partial^{l+2}.u.\xi^{l+2} + \left.\begin{array}{r}\beta D \\ +\ \gamma C \\ +\ \delta B\end{array}\right|\partial^{l+3}.u.\xi^{l+3} + \left.\begin{array}{r}\beta E \\ +\ \gamma D \\ +\ \delta C \\ +\ \varepsilon B\end{array}\right|\partial^{l+4}.u.\xi^{l+4} + \begin{array}{l}\text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.} \\ +\ \text{etc.};\end{array}$$
et il est visible que cette série se réduit à
$$\Delta^{l+1}u = \beta B\partial^{l+1}.u.\xi^{l+1} + \mathrm{D}.(\beta B).\partial^{l+2}.u.\xi^{l+2} + \mathrm{D}^2.(\beta B).\partial^{l+3}.u.\xi^{l+3} + \mathrm{D}^3.(\beta B).\partial^{l+4}.u.\xi^{l+4} + \text{etc.} \quad ..(9)$$
Or cette série est égale à celle qu'on obtient en multipliant
$$B\partial^l.u.\xi^l + C\partial^{l+1}.u.\xi^{l+1} + D\partial^{l+2}.u.\xi^{l+2} + E\partial^{l+3}.u.\xi^{l+3} + \text{etc.}$$
par la série
$$\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.},$$

pourvu qu'on change après la multiplication $\partial.u.\partial^l.u$ en $\partial^{l+1}.u$, $\partial^2.u.\partial^l.u$ en $\partial^{l+2}.u$, et en général $\partial^r.u.\partial^s.u$ en $\partial^{r+s}.u$. Donc, si l'on a le développement en ξ d'une différence quelconque $\Delta^l u$; pour avoir la différence suivante, il suffit de multiplier ce développement par $\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.}$, en changeant dans le produit $\partial^r.u.\partial^s.u$ en $\partial^{r+s}.u$.

4.° Or on a eu ci-dessus

$$\Delta^3 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.})^3;$$

donc on aura de cette manière, pour la différence suivante,

$$\Delta^4 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^4,$$

donc aussi, pour la différence suivante,

$$\Delta^5 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^5,$$

et ainsi de suite. Donc on a généralement, l étant un nombre entier positif quelconque,

$$\Delta^l u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^l, \qquad \ldots.(10)$$

ou bien, en remettant les valeurs de β, γ, δ, etc.,

$$\Delta^l u = (1\partial.u.\xi + \frac{1}{1.2}\partial^2.u.\xi^2 + \frac{1}{1.2.3}\partial^3.u.\xi^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.})^l, \quad ..(11)$$

à condition qu'on change $(\partial.u.)^r$ en $\partial^r.u$, en appliquant les exposans de $\partial.u$ à la caractéristique ∂.

5.° A présent il est aisé de voir qu'on a aussi, sous la même condition,

$$\partial.u.\xi + \frac{1}{1.2}\partial^2.u.\xi^2 + \frac{1}{1.2.3}\partial^3.u.\xi^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.} = e^{\partial.u.\xi} - 1,$$

e étant le nombre dont le logarithme naturel est l'unité; car on sait qu'on a

$$e^v = 1 + 1v + \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \text{etc.}$$

Donc enfin $\qquad \Delta^l u = (e^{\partial.u.\xi} - 1)^l,$

en changeant après le développement $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$.

401. Venons à la démonstration du second théorème.

1.° Commençons par le cas où n de positif qu'il est dans le premier théorème devient $= -1$; car c'est dans ce passage que se trouve la principale difficulté.

Je mets Σu au lieu de u dans la formule (2); $\Delta\Sigma u$ étant $= u$, la formule devient

$$u = \beta\partial.\Sigma u.\xi + \gamma\partial^2.\Sigma u.\xi^2 + \delta\partial^3.\Sigma u.\xi^3 + \text{etc.}; \qquad \ldots.(12)$$

de là je tire, en divisant par $\beta\xi$, intégrant par $\int$, et transposant,

$$\Sigma u = \beta^{-1} \textstyle\int .u.\xi^{-1} - \beta^{-1}\gamma\partial.\Sigma u.\xi - \beta^{-1}\delta\partial^2.\Sigma u.\xi^2 - \text{etc.} \quad \ldots(13)$$

Je prends successivement les dérivées $\partial.$, $\partial^2.$, etc. de cette équation, afin d'avoir les valeurs en ξ de $\partial.\Sigma u$, $\partial^2.\Sigma u$, $\partial^3.\Sigma u$, etc., que je substituerai ensuite dans (13) même ; mais sans effectuer ces substitutions, il est visible que par leur moyen le second membre de (13) prendra la forme de celui de l'équation suivante

$$\Sigma u = \mathfrak{a}\partial^{-1}.u.\xi^{-1} + \mathfrak{b}\partial^0.u + \mathfrak{c}\partial.u.\xi + \mathfrak{d}\partial^2.u.\xi^2 + \text{etc.} \quad \ldots(14)$$

L'équation (13) donne aussi

$$\partial^{-1}.u.\xi^{-1} = \beta\Sigma u + \gamma\partial.\Sigma u.\xi + \delta\partial^2.\Sigma u.\xi^2 + \varepsilon\partial^3.\Sigma u\xi^3 + \text{etc.},$$

d'où l'on tire, en multipliant par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\xi$, $\mathfrak{c}\xi^2$, $\mathfrak{d}\xi^3$, etc., et prenant les dérivées $\partial.$, $\partial^2.$, $\partial^3.$, etc.,

$$\begin{array}{lcrrrl}
\mathfrak{a}\partial^{-1}.u.\xi^{-1} & = & \mathfrak{a}\beta\Sigma u + \mathfrak{a}\gamma\partial.\Sigma u.\xi & + \mathfrak{a}\delta\partial^2.\Sigma u.\xi^2 & + \mathfrak{a}\varepsilon\partial^3.\Sigma u.\xi^3 & + \text{etc.}, \\
\mathfrak{b}\partial^0.u & = & \mathfrak{b}\beta\partial.\Sigma u.\xi & + \mathfrak{b}\gamma\partial^2.\Sigma u.\xi^2 & + \mathfrak{b}\delta\partial^3.\Sigma u.\xi^3 & + \text{etc.}, \\
\mathfrak{c}\partial.u.\xi & = & & \mathfrak{c}\beta\partial^2.\Sigma u.\xi^2 & + \mathfrak{c}\gamma\partial^3.\Sigma u.\xi^3 & + \text{etc.}, \\
\mathfrak{d}\partial^2.u.\xi^2 & = & & & + \mathfrak{d}\beta\partial^3.\Sigma u.\xi^3 & + \text{etc.}, \\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

Si l'on ajoute ensemble toutes ces équations ; la série qui formera le premier membre de leur somme étant égale à Σu, en vertu de l'équation (14), et ξ pouvant être quelconque, on aura pour déterminer $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc., les équations $\mathfrak{a}\beta = 1$, $\mathfrak{a}\gamma + \mathfrak{b}\beta = 0$, $\mathfrak{a}\delta + \mathfrak{b}\gamma + \mathfrak{c}\beta = 0$, $\mathfrak{a}\varepsilon + \mathfrak{b}\delta + \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{d}\beta = 0$, etc. Or $\mathfrak{a}$ et β étant des premiers termes, ces équations sont $\mathfrak{a}\beta = 1$, $\mathrm{D}.(\mathfrak{a}\beta) = \mathrm{D}.1$, $\mathfrak{D}^2.(\mathfrak{a}\beta) = \mathfrak{D}^2.1$, $\mathfrak{D}^3.(\mathfrak{a}\beta) = \mathfrak{D}^3.1$, etc. La première $\mathfrak{a}\beta = 1$, qui est l'origine des dérivations, donne $\mathfrak{a} = \beta^{-1}$, d'où l'on tire $\mathfrak{b} = \mathrm{D}.\beta^{-1}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{D}^2.\beta^{-1}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{D}^3.\beta^{-1}$, et en général $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{D}^n.\beta^{-1}$. Donc la somme précédente devient

$$\begin{aligned}\Sigma u = \beta^{-1}.\partial^{-1}.u.\xi^{-1} + \mathrm{D}.\beta^{-1}.u + \mathfrak{D}^2.\beta^{-1}.\partial.u.\xi + \mathfrak{D}^3.\beta^{-1}.\partial^2.u.\xi^2 \\ + \text{etc.} + \mathfrak{D}^{n+1}.\beta^{-1}.\partial^n.u.\xi^n + \text{etc.}\end{aligned} \quad \ldots(15)$$

Si cette conclusion ne paroissoit pas évidente à tout le monde, j'observerois, qu'en supposant

$$\frac{1}{\beta v + \gamma v^2 + \delta v^3 + \varepsilon v^4 + \text{etc.}} = \mathfrak{a}v^{-1} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}v + \mathfrak{d}v^2 + \text{etc.},$$

et multipliant de part et d'autre par le dénominateur, on aura, pour déterminer $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc., précisément les mêmes équations $\mathfrak{a}\beta = 1$, $\mathfrak{a}\gamma + \mathfrak{b}\beta = 0$, $\mathfrak{a}\delta + \mathfrak{b}\gamma + \mathfrak{c}\beta = 0$, etc. que ci-dessus. Or il est évident qu'ici le premier membre $(\beta v + \gamma v^2 + \delta v^3 + \varepsilon v^4 + \text{etc.})^{-1}$, développé, est égal à $\beta^{-1}v^{-1} + \mathrm{D}.\beta^{-1} + \mathfrak{D}^2.\beta^{-1}.v$

$+$ etc. $+ \mathrm{D}^{n+1}.\beta^{-1}\nu^{n} +$ etc. Donc il est évident que la valeur du coëfficient de $\partial^{n}.u.\xi^{n}$ dans (15) est aussi égale à $\mathrm{D}^{n+1}.\beta^{-1}$.

Il n'est pas moins clair que l'équation (15) peut aussi se mettre sous la forme

$$\Sigma u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^{2}.u.\xi^{2} + \delta\partial^{3}.u.\xi^{3} + \text{etc.})^{-1}, \qquad \ldots\ldots(16)$$

pourvu qu'après le développement on change $(\partial.u)^{r}$ en $\partial^{r}.u$, et $(\partial.u)^{-r}$ en $\int^{r}.u$. Donc, par la fin du numéro précédent, on a, sous la même condition, en remettant les valeurs de β, γ, δ, etc.,

$$\Delta^{-1}u = \Sigma u = (e^{\partial.u.\xi} - 1)^{-1}.$$

2.° On peut présentement passer de la valeur de Σu à la valeur de $\Sigma^{l}u$, d'une manière semblable à celle par laquelle nous avons passé ci-dessus de la série de Δu à celle de $\Delta^{l}u$.

En effet, mettant Σu au lieu de u dans (14), on a

$$\Sigma^{2}u = \mathfrak{a}\partial^{-1}.\Sigma u.\xi^{-1} + \mathfrak{b}\Sigma u + \mathfrak{c}\partial.\Sigma u.\xi + \mathfrak{d}\partial^{2}.\Sigma u\xi^{2} + \text{etc.},$$

et, substituant au lieu de Σu le second membre de (14), il est visible que cette équation prendra la forme

$$\Sigma^{2}u = \mathfrak{a}'\partial^{-2}.u.\xi^{-2} + \mathfrak{b}'\partial^{-1}.u.\xi^{-1} + \mathfrak{c}'\partial^{0}.u + \mathfrak{d}'\partial.u.\xi + \text{etc.}; \quad ..(17)$$

raisonnant de même sur cette équation (17), puisque $\Sigma^{3}u = \Sigma^{2}\Sigma u$, on voit que $\Sigma^{3}u$ sera de la forme

$$\Sigma^{3}u = \mathfrak{a}''\partial^{-3}.u.\xi^{-3} + \mathfrak{b}''\partial^{-2}.u.\xi^{-2} + \mathfrak{c}''\partial^{-1}.u.\xi^{-1} + \mathfrak{d}''\partial^{0}.u. + \text{etc.}$$

En continuant ainsi, on voit sans peine qu'en général $\Sigma^{l}u$ est de la forme

$$\begin{aligned}\Sigma^{l}u = {} & \mathfrak{A}\partial^{-l}.u.\xi^{-l} + \mathfrak{B}\partial^{-l+1}.u.\xi^{-l+1} + \mathfrak{C}\partial^{-l+2}.u.\xi^{-l+2} \\ & + \text{etc.} + \mathfrak{A}_{l}\partial^{0}.u + \mathfrak{A}_{l+1}\partial.u.\xi + \mathfrak{A}_{l+2}\partial^{2}.u.\xi^{2} + \text{etc.}\end{aligned} \quad ..(18)$$

3.° Pour avoir $\Sigma^{l+1}u$, je mets dans le premier membre de (18) Σu à la place de u, et dans le second au lieu de u la valeur (14) de Σu, ce qui donne

$$\begin{array}{llll}\Sigma^{l+1}u = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.\partial^{-l-1}.u.\xi^{-l-1} + \mathfrak{A}\mathfrak{b} & \!\!\Big|\, \partial^{-l}.u.\xi^{-l} + \mathfrak{A}\mathfrak{c} & \!\!\Big|\, \partial^{-l+1}.u.\xi^{-l+1} & + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \mathfrak{B}\mathfrak{a} & \!\!\Big| \qquad\quad + \mathfrak{B}\mathfrak{b} & \!\!\Big| & + \text{etc.} \\ & \qquad\qquad + \mathfrak{C}\mathfrak{a} & \!\!\Big| & + \text{etc.} \\ & & & + \text{etc.},\end{array}$$

série qui, en regardant $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{a}$ comme des premiers termes, se réduit à

$$\begin{aligned}\Sigma^{l+1}u = {} & \mathfrak{A}\mathfrak{a}.\partial^{-l-1}.u.\xi^{-l-1} + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\partial^{-l}.u.\xi^{-l} + \mathrm{D}^{2}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\partial^{-l+1}.u.\xi^{-l+1} \\ & + \text{etc.} + \mathrm{D}^{l}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\partial^{0}.u + \mathrm{D}^{l+1}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).\partial.u.\xi + \text{etc.};\end{aligned} \quad \ldots(19)$$

et il est facile de voir que cette série est égale à celle qu'on obtient en multipliant le 2ᵈ membre de (18) par celui de (14) ou par celui de (15), qui a été démontré égal à ce dernier. Ainsi il est démontré que, pour passer de la valeur en

en ξ de $\Sigma^l u$ à celle de $\Sigma^{l+1} u$, il suffit de multiplier celle-là par $(\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \varepsilon\partial^4.u.\xi^4 + \text{etc.})^{-1}$, pourvu qu'après le développement on change $\partial^{-s}.u.\partial^{-r}.u$ en $\partial^{-s-r}.u$ et $\partial^{-s}.u\partial^{r}.u$ en $\partial^{-s+r}.u$, etc.

4.° De là il s'ensuit que pour passer de Σu à $\Sigma^2 u$, à cause de $\Sigma u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^{-1}$, on aura, en multipliant comme on vient de le dire,

$$\Sigma^2 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^{-2},$$

et en passant de même de $\Sigma^2 u$ à $\Sigma^3 u$, on aura

$$\Sigma^3 u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^{-3},$$

et généralement

$$\Sigma^l u = (\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.})^{-l}, \qquad \ldots(20)$$

pourvu qu'on ait soin après les développemens de changer $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$ et $(\partial.u)^{-r}$ en $\partial^{-r}.u$ ou $\int^r.u$.

5.° Cette démonstration a lieu, quelles que soient les valeurs de β, γ, δ, etc. Dans le cas particulier où β, γ, δ, etc. sont 1, $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, etc.; on peut mettre $e^{\partial.u.\xi} - 1$ au lieu de $\beta\partial.u.\xi + \gamma\partial^2.u.\xi^2 + \delta\partial^3.u.\xi^3 + \text{etc.}$; donc dans ce cas on a

$$\Sigma^l u = \left(e^{\partial.u.\xi} - 1\right)^{-l},$$

en changeant après le développement $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$ et $(\partial.u)^{-r}$ en $\int^r.u$. Ainsi le second théorème est aussi démontré.

402. Nos méthodes de dérivation donnent des moyens faciles de développer les formules des théorèmes précédens, et même de calculer immédiatement un terme quelconque des développemens.

En effet, par les formules (10) et (20), le coëfficient de $\partial^{l+r}.u.\xi^{l+r}$ dans le développement de $\Delta^l u$ est représenté par $\text{D}^r.\beta^l$, et celui de $\partial^{-l+r}.\xi^{-l+r}$ dans le développement de $\Sigma^l u$ l'est par $\text{D}^r.\beta^{-l}$. On développera donc $\text{D}^r.\beta^l$ et $\text{D}^r.\beta^{-l}$ à la manière ordinaire, β étant un premier terme; puis on substituera à la place de β, γ, δ, ε, etc. leurs valeurs 1, $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, $\frac{1}{1.2.3.4}$, etc. On peut même abréger ces développemens au moyen du procédé du n.° 84.

403. Les démonstrations précédentes, quoiqu'un peu longues, me paroissent être à l'abri de toute objection et ne laisser aucun nuage; elles démontrent les théorèmes tels que LAGRANGE les a énoncés.

Mais on peut simplifier et les démonstrations et les énoncés de ces propositions, en les débarrassant de la condition du changement de $(\partial.u)^r$ en $\partial^r.u$ après les développemens. Pour cela il faut faire en sorte que les exposans affectent ∂ et non $\partial.u$, et que demeurant toujours attachés à ∂ dans les développemens, ils puissent toujours être considérés comme des indices. On y parvient en détachant l'échelle de la fonction, comme nous l'avons pratiqué dans ce qui précède. Cette séparation de l'échelle met plus de netteté dans les expressions, plus de facilité dans les calculs et fait en outre arriver facilement à des théorèmes bien plus étendus, comme nous allons le voir.

404. Si l'on fait $\varphi x = u$ et $\Delta x = \xi$, on a par le théorème de Taylor

$$u + \Delta u = u + \xi\partial.u + \frac{1}{1.2}\xi^2\partial^2.u + \frac{1}{1.2.3}\xi^3\partial^3.u + \text{etc.},$$

et, en détachant de u les échelles,

$$(1+\Delta)\times u = (1 + \xi\partial. + \frac{1}{1.2}\xi^2\partial^2. + \frac{1}{1.2.3}\xi^3\partial^3. + \text{etc.})\times u,$$

ou bien encore (n.° 400, 5°.)

$$(1+\Delta)\times u = e^{\xi\partial.}\times u. \qquad \ldots..(A)$$

En retranchant u de chaque membre de la première équation, ou ce qui revient au même, en retranchant 1 de chaque échelle de (A), on a

$$\Delta u = (e^{\xi\partial.} - 1)\times u. \qquad \ldots..(B)$$

A présent, voici comment on parvient très-simplement aux théorèmes du n.° 399. 1.° u étant une fonction quelconque, je mets Δu à la place de u, et j'ai $\Delta\Delta u = (e^{\xi\partial.} - 1)\times\Delta u = (e^{\xi\partial.} - 1)(e^{\xi\partial.} - 1)\times u$, ou $\Delta^2 u = (e^{\xi\partial.} - 1)^2\times u$. Je mets encore Δu à la place de u, et j'ai
$\Delta^2\Delta u = (e^{\xi\partial.} - 1)^2\Delta u = (e^{\xi\partial.} - 1)^2(e^{\xi\partial.} - 1)\times u$, ou $\Delta^3 u = (e^{\xi\partial.} - 1)^3\times u$, et ainsi de suite. Donc on a généralement

$$\Delta^l u = (e^{\xi\partial.} - 1)^l\times u; \qquad \ldots..(C)$$

il n'y a rien à changer après le développement.

2.° Puisqu'on vient de voir que, pour passer de $\Delta^k u$ à $\Delta^{k+1}u$, il faut multiplier l'échelle de $(e^{\xi\partial.} - 1)^k\times u$ par $e^{\xi\partial.} - 1$; il s'ensuit que pour revenir de $\Delta^{k+1}u$ à $\Delta^k u$, il faut diviser l'échelle de $(e^{\xi\partial.} - 1)^{k+1}\times u$ par $e^{\xi\partial.} - 1$; partant, pour revenir de $\Delta^k u$ à $\Delta^{k-l}u$, il faut diviser l'échelle de $(e^{\xi\partial.} - 1)^k\times u$ par $(e^{\xi\partial.} - 1)^l$, ce qui donne $\Delta^{k-l}u = (e^{\xi\partial.} - 1)^{k-l}\times u$. Donc, en faisant

$k = 0$, on a $\Delta^{-l}u = \Sigma^l u = (e^{\xi \partial.} - 1)^{-l} \times u.$ .....(D)

405. Les formules (C) et (D) ne sont que des cas particuliers du théorème qui va suivre.

Dans $(1+\Delta)\times u = e^{\xi\partial.}\times u$ les échelles $1+\Delta$ et $e^{\xi\partial.}$ indiquent des opérations à faire sur u, qui sont différentes, mais dont les résultats doivent être égaux : il est clair qu'en faisant sur chacune de ces échelles une même opération, chaque échelle sera modifiée de la même manière, et qu'appliquées à u elles donneront encore des résultats égaux. Désignant donc par F une fonction ou opération quelconque, algébrique ou transcendante ; puisque $1+\Delta = e^{\xi\partial.}$, on aura $F(1+\Delta) = Fe^{\xi\partial.}$, partant le théorème suivant,

$$F(1+\Delta)\times u = Fe^{\xi\partial.}\times u, \quad \ldots\ldots (E)$$

où F n'affecte que les échelles.

406. A présent, si l'on suppose que F désigne qu'il faut diminuer l'échelle de l'unité, puis prendre la puissance l ou $-l$, la formule (E) donne les deux théorèmes (C) et (D) ; et l'on voit par là que l peut même être fractionnaire et irrationnel.

Si F désigne qu'il faut prendre le logarithme naturel, puis encore la puissance n ou $-n$ de ce logarithme, la formule (E) donne

$$\xi^n\partial^n.u = \{\log(1+\Delta)\}^n \times u, \quad \ldots\ldots (F)$$

$$\xi^{-n}\textstyle\int^n.u = \{\log(1+\Delta)\}^{-n}\times u. \quad \ldots\ldots (G)$$

Ces formules expriment les différentielles et les intégrales en différences et en sommes.

407. Il faut avoir soin de ne pas confondre les cas où le signe de fonction F affecte uniquement l'échelle avec ceux où il enveloppe toute la quantité ; c'est-à-dire que les expressions $F(1+\Delta)\times u$ et $Fe^{\xi\partial.}\times u$ ne sont nullement synonymes des expressions $F\{(1+\Delta)\times u\}$ et $F\{e^{\xi\partial.}\times u\}$.

Pour le faire voir par des exemples : soit, 1.°, F le logarithme naturel ; on aura, F n'affectant que l'échelle, $\log e^{\xi\partial.}\times u = \xi\partial.\times u = \xi\partial.u$, ce qui est la différentielle première de u ; tandis que, F affectant toute la quantité, on a

$$\begin{aligned}\log\{e^{\xi\partial.}\times u\} &= \log(u + \xi\partial.u + \xi^2\partial^2.u + \xi^3\partial^3.u + \text{etc.})\\ &= \log u + \xi\partial.\log u + \xi^2\partial^2.\log u + \xi^3\partial^3.\log u + \text{etc.}\end{aligned}$$

*

Soit, 2.°, F la puissance m; on aura $\{e^{\xi\partial.}\}^m \times u = e^{m\xi\partial.} \times u = \phi(x + m\xi)$, tandis que $\{e^{\xi\partial.} \times u\}^m = \{\phi(x+\xi)\}^m$.

408. Observons à l'égard des cas ordinaires où F enveloppe toute la quantité, que, puisque l'on a, u étant $= \phi x$,

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) &= F(u + \xi\partial.u + \xi^2\partial^2.u + \xi^3\partial^3.u + \text{etc.}) \\ &= Fu + \xi\partial.Fu + \xi^2\partial^2.Fu + \xi^3\partial^3.Fu + \text{etc.}, \end{aligned}$$

il en résulte que

$$F\{e^{\xi\partial} \times \phi x\} = e^{\xi\partial} \times F\phi x; \qquad \ldots.(H)$$

cest-à-dire, qu'il est indifférent dans quel ordre on exécute sur ϕx les opérations désignées par F et $e^{\xi\partial}$.

En mettant $1 + \Delta$ à la place de $e^{\xi\partial}$, on a aussi

$$F\{(1+\Delta)\times\phi x\} = e^{\xi\partial}\times F\phi x = (1+\Delta)\times F\phi x. \qquad \ldots.(I)$$

Ici on ne peut pas prendre une fonction quelconque f de l'échelle $e^{\xi\partial}$ ou $1 + \Delta$, comme au n.° 405. Pour le faire voir par un exemple simple; supposons qu'on mette Δ au lieu de $1 + \Delta$ et que ϕx soit x et $F\phi x = x^2$, alors (I) deviendroit $(\Delta x)^2 = \Delta x^2$, ce qui n'a pas lieu, car Δx^2 est $= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Cependant, comme ξ est une quantité quelconque*, on peut dans (H) mettre $m\xi$ au lieu de ξ, m étant aussi quelconque; alors $e^{\xi\partial}$ étant $= 1 + \Delta$, on a $e^{m\xi\partial} = (1 + \Delta)^m$, et l'on trouve

$$F\{(1+\Delta)^m\times\phi x\} = e^{m\xi\partial}\times F\phi x = (1+\Delta)^m\times F\phi x. \qquad \ldots.(K)$$

409. Les théorèmes précédens peuvent être étendus aux fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Soit $u = \phi(x, y)$, $\Delta x = \xi$ et $\Delta y = \upsilon$ les accroissemens de x et de y indépendans; Δu désignant l'accroissement total de u lorsque x et y varient à la fois, désignons par $\Delta^{1,}u$ et $\Delta^{,1}u$ les accroissemens de u pris en faisant varier x séparément et y séparément; on a, comme on sait,

$$\begin{aligned} \phi(x+\xi, y+\upsilon) = u &+ \xi\partial^{1,}.u + \frac{1}{1.2}\xi^2\partial^{2,}.u + \text{etc.} \\ &+ \upsilon\partial^{,1}.u + \frac{1}{1.2}2\xi\upsilon\partial^{1,}.\partial^{,1}.u + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{1.2}\upsilon^2\partial^{,2}.u + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.}; \end{aligned}$$

et

et il est évident que cette formule peut s'exprimer par les échelles, de la manière suivante,

$$(1+\Delta)\times u=\left\{1+(\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.)+\frac{1}{1.2}(\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.)^2+\frac{1}{1.2.3}(\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.)^3+\text{etc.}\right\}\times u.$$

Mais dans le calcul des différences on a $u+\Delta u=u+\Delta^{1,}u+\Delta^{,1}u+\Delta^{1,}\Delta^{,1}u$. En effet, en supposant d'abord que x seul prenne son accroissement dans $\varphi(x,y)$, on a $\varphi(x+\xi,y)=\varphi(x,y)+\Delta^{1,}\varphi(x,y)$, et, en supposant ensuite que y prenne aussi son accroissement, on trouve

$$\varphi(x+\xi,y+\upsilon)=\varphi(x,y+\upsilon)+\Delta^{1,}\varphi(x,y+\upsilon)$$
$$=\varphi(x,y)+\Delta^{,1}\varphi(x,y)+\Delta^{1,}\varphi(x,y)+\Delta^{1,}\Delta^{,1}\varphi(x,y).$$

Donc, en détachant les échelles, on a

$$(1+\Delta)\times u=(1+\Delta^{1,}+\Delta^{,1}+\Delta^{1,}\Delta^{,1})\times u=(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})\times u.$$

En égalant à présent les deux valeurs de $(1+\Delta)u$, on trouve

$$(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})\times u=e^{\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.}\times u. \quad .....(L)$$

Il est visible que, u étant $=\varphi(x,y,t)$, on a pareillement

$$(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})(1+\Delta^{,,1})\times u=e^{\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.+\tau\partial^{,,1}.}\times u. \quad ...(M)$$

Le théorème général (E) devient donc pour ce cas

$$F\{(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})(1+\Delta^{,,1})\}\times u=Fe^{\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.+\tau\partial^{,,1}.}\times u. \quad ..(N)$$

Puisque ξ, υ, τ sont quelconques, on peut mettre $m\xi$, $n\upsilon$, $r\tau$ au lieu de ξ, υ, τ, et le théorème (K) se généralise comme il suit :

$$F\{[(1+\Delta^{1,})^m(1+\Delta^{,1})^n(1+\Delta^{,,1})^r]\times\varphi(x,y,t)\}= \quad ....(O)$$
$$(e^{m\xi\partial^{1,}+n\upsilon\partial^{,1}+r\tau\partial^{,,1}})\times F\varphi(x,y,t)=[(1+\Delta^{1,})^m(1+\Delta^{,1})^n(1+\Delta^{,,1})^r]\times F\varphi(x,y,t).$$

De ces théorèmes (N) et (O) on peut tirer non-seulement tous ceux que Lagrange a donnés dans son mémoire cité au n.° 399, mais encore beaucoup d'autres. Nous nous bornerons ici aux suivans, qui concernent les différentielles.

410. Soit u fonction de x et de y seulement (car on pourra facilement étendre les résultats au cas de u fonction de x, y et t), $\Delta^{,,1}$ et $\tau\partial^{,,1}.$ disparoîtront des échelles de la formule (N) : supposons en premier lieu que F désigne dans (N) qu'il faut ôter 1 de l'échelle, puis prendre la puissance quelconque $\pm l$ du reste ; on aura, Δ étant $=\Delta^{1,}+\Delta^{,1}+\Delta^{1,}\Delta^{,1}$,

$$(\Delta^{1,}+\Delta^{,1}+\Delta^{1,}\Delta^{,1})^l\times u=\Delta^l u=(e^{\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.}-1)^l\times u, \quad ...(P)$$
$$(\Delta^{1,}+\Delta^{,1}+\Delta^{1,}\Delta^{,1})^{-l}\times u=\Sigma^l u=(e^{\xi\partial^{1,}.+\upsilon\partial^{,1}.}-1)^{-l}\times u. \quad ...(Q)$$

De ces formules découlent les suivantes. Puisque ξ et υ sont indépendans,

on peut faire zéro chacun séparément ; alors $\Delta^{1,}$ disparoît avec ξ et $\Delta^{,1}$ avec υ ; et l'on aura, en mettant m et n au lieu de l,

$$\Delta^{\pm m,} = (e^{\xi\partial^{1,}} - 1)^{\pm m}, \quad \Delta^{,\pm n} = (e^{\upsilon\partial^{,1}} - 1)^{\pm n} :$$

donc, en multipliant ces échelles entre elles, on a

$$\Delta^{m,}\Delta^{,n}u = (e^{\xi\partial^{1,}} - 1)^{m}.(e^{\upsilon\partial^{,1}} - 1)^{n} \times u, \qquad \ldots\ldots(\mathrm{R})$$

$$\Sigma^{m,}\Sigma^{,n}u = (e^{\xi\partial^{1,}} - 1)^{-m}.(e^{\upsilon\partial^{,1}} - 1)^{-n} \times u. \qquad \ldots\ldots(\mathrm{S})$$

Ces formules expriment les différences et les sommes en différentielles et en intégrales ; cherchons les formules inverses qui expriment les différentielles et les intégrales en différences et en sommes de quantités à deux variables. A cet effet, u étant $\phi(x, y)$ et τ zéro, on supposera que dans (N), F indique qu'il faut prendre le logarithme naturel, puis la puissance quelconque $\pm l$ de ce logarithme, et la formule (N) donnera

$$(\xi\partial^{1,} + \upsilon\partial^{,1})^{\pm l} \times u = \{\log(1 + \Delta^{1,}) + \log(1 + \Delta^{,1})\}^{\pm l} \times u.$$
$$= \{\log(1 + \Delta)\}^{\pm l} \times u. \qquad \ldots\ldots(\mathrm{T})$$

Donc, puisqu'on peut faire ξ et υ zéro séparément, et que $\Delta^{1,}$ disparoît avec ξ et $\Delta^{,1}$ avec υ, on a aussi

$$\xi^{\pm m}\partial^{\pm m,} = \{\log(1 + \Delta^{1,})\}^{\pm m}, \text{ et } \upsilon^{\pm n}\partial^{,\pm n} = \{\log(1 + \Delta^{,1})\}^{\pm n}.$$

Partant, en multipliant ces échelles entre elles, on a

$$\xi^{m}\upsilon^{n}\partial^{m,}.\partial^{,n}.u = \{\log(1 + \Delta^{1,})\}^{m}.\{\log(1 + \Delta^{,1})\}^{n} \times u, \qquad \ldots\ldots(\mathrm{U})$$

$$\xi^{-m}\upsilon^{-n}\int^{m,}.\int^{,n}.u = \{\log(1 + \Delta^{1,})\}^{-m}.\{\log(1 + \Delta^{,1})\}^{-n} \times u. \qquad \ldots\ldots(\mathrm{V})$$

411. Cette manière d'employer les échelles de dérivation fait connoître avec beaucoup de simplicité les lois des premiers développemens. Pour achever les développemens des échelles, il faut recourir aux méthodes de dérivation des trois premiers articles ; et ces méthodes donneront avec facilité non-seulement les termes successifs de ces développemens, mais même un terme quelconque indépendamment des autres.

Un seul exemple suffira. On a trouvé $\xi^{l}\partial^{l}.u = \{\log(1 + \Delta)\}^{l} \times u$; j'aurai donc, par un premier développement de l'échelle $\{\log(1 + \Delta)\}^{l}$,

$$\{\log(1 + \Delta)\}^{l} = \Delta^{l}(1 - \tfrac{1}{2}\Delta + \tfrac{1}{3}\Delta^{2} - \tfrac{1}{4}\Delta^{3} + \text{etc.})^{l}.$$

Je représente la série par

$$(\alpha + \beta\Delta + \gamma\Delta^{2} + \delta\Delta^{3} + \varepsilon\Delta^{4} + \text{etc.})^{l} ;$$

on en fera le développement réduit, comme n.° 31 ; puis on y remettra au lieu de α, β, γ, etc. leurs valeurs 1, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, etc.

ARTICLE SEPTIÈME.

Applications du calcul des dérivations à d'autres branches de la théorie des suites.

412. Nous réunissons dans cet article différentes applications du calcul des dérivations, non dans la vue de traiter les matières à fond, mais dans celle d'indiquer des sujets d'application de nos méthodes et d'offrir des exemples de la manière de les employer. Les suites (*) que nous avons considérées jusqu'à présent sont ordonnées suivant les puissances d'une lettre ou les dimensions de plusieurs; ici nous considérerons aussi des suites qui procèdent suivant d'autres lois.

(I.)

Des suites qui procèdent suivant les cosinus ou suivant les sinus des multiples d'un même angle.

413. Les suites de cette forme sont d'un usage fréquent en Astronomie. Nos méthodes de dérivation apportent à la manière de les traiter plus de facilité et de perfection.

PROBLÈME. Convertir la fonction quelconque

$$\varphi\{\alpha + \zeta\cos x + \gamma(\cos x)^2 + \delta(\cos x)^3 + \text{etc.}\} \quad \ldots\ldots(1)$$

en une série qui procède suivant les cosinus des angles multiples de x, savoir :

$$A + B\cos x + C\cos 2x + D\cos 3x + \text{etc.} \quad \ldots\ldots(2)$$

Je fais d'abord un premier développement de la série (1) en une série ordonnée suivant les puissances de $\cos x$; ce développement est (n.° 21)

$$\varphi\alpha + \text{D}.\varphi\alpha.\cos x + \text{D}^2.\varphi\alpha.(\cos x)^2 + \text{D}^3.\varphi\alpha.(\cos x)^3 + \text{etc.} \quad \ldots(3)$$

Je substitue à présent à la place de $\cos x$ sa valeur en exponentielles imaginaires, qui est, comme on sait, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, e étant le

(*) Il me paroît qu'il y auroit de l'avantage à mettre une différence entre les termes *série* et *suite*, qu'on emploie indistinctement. On pourroit appeler *suite* tout assemblage de termes fait suivant des lois quelconques, et *série*, l'espèce de suites dont les termes assemblés par les signes + ou — sont ordonnés suivant les puissances d'une lettre ou suivant les puissances et les produits de plusieurs lettres. De cette manière le mot *suite* seroit générique, et comprendroit non-seulement les *séries*, mais les produits continus de facteurs qui suivent des lois données, les fractions continues, etc., etc.

nombre dont le logarithme naturel est l'unité ; et, pour faire cette substitution avec plus de facilité, je fais $2^{-1}e^{x\sqrt{-1}} = t$ et $2^{-1}e^{-x\sqrt{-1}} = u$, de sorte que $\cos x = t + u$; substituant donc dans (3), il est aisé de voir, par la règle du binome et parce que $\mathrm{D.D.} = 2\mathrm{p}^2.$, $\mathrm{D.p}^2. = 3\mathrm{p}^3.$, $\mathrm{p}^2.\mathrm{p}^2. = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\mathrm{p}^4.$; etc., que la série sera

$$
(4)\ldots\ldots
\begin{array}{llllll}
\varphi\alpha & + \mathrm{D}.\varphi\alpha.t & + \mathrm{p}^2.\varphi\alpha.t^2 & + \mathrm{p}^3.\varphi\alpha.t^3 & + \mathrm{p}^4.\varphi\alpha.t^4 & + \text{etc.} \\
 & + \mathrm{D}.\varphi\alpha.u & + \mathrm{D.D}.\varphi\alpha.tu & + \mathrm{D.p}^2.\varphi\alpha.t^2u & + \mathrm{D.p}^3.\varphi\alpha.t^3u & + \text{etc.} \\
 & & + \mathrm{p}^2.\varphi\alpha.u^2 & + \mathrm{p}^2.\mathrm{D}.\varphi\alpha.tu^2 & + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^2.\varphi\alpha.t^2u^2 & + \text{etc.} \\
 & & & + \mathrm{p}^3.\varphi\alpha.u^3 & + \mathrm{p}^3.\mathrm{D}.\varphi\alpha.tu^3 & + \text{etc.} \\
 & & & & + \mathrm{p}^4.\varphi\alpha.u^4 & + \text{etc.} \\
 & & & & & + \text{etc.}
\end{array}
$$

Mais $\mathrm{D.p}^2.\varphi\alpha = \mathrm{p}^2.\mathrm{D}.\varphi\alpha$, $\mathrm{D.p}^3.\varphi\alpha = \mathrm{p}^3.\mathrm{D}.\varphi\alpha$, etc. ; de plus on a, comme on sait, $\cos r.x = 2^{-1}(e^{rx\sqrt{-1}} + e^{-rx\sqrt{-1}})$, de sorte qu'il faut ordonner la série (4) suivant les quantités $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{1}}$, $e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}$, $e^{3x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}}$, etc., ou, ce qui revient au même, suivant

$$
\begin{array}{l}
1 = tu = t^2u^2 = t^3u^3 = t^4u^4 = \text{etc.}, \\
t + u = t^2u + tu^2 = t^3u^2 + t^2u^3 = t^4u^3 + t^3u^4 = \text{etc.}, \\
t^2 + u^2 = t^3u + tu^3 = t^4u^2 + t^2u^4 = t^5u^3 + t^3u^5 = \text{etc.}, \\
\quad \text{etc.} \qquad \text{etc.};
\end{array}
$$

remettant ensuite à la place de t et de u leurs valeurs, on trouvera, pour la série cherchée,

$$
\varphi\{\alpha + \beta\cos x + \gamma(\cos x)^2 + \delta(\cos x)^3 + \text{etc.}\} = \quad \ldots\ldots(5)
$$

$$
\begin{array}{l}
\varphi\alpha + \mathrm{D.D}.\varphi\alpha.2^{-2} + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^2.\varphi\alpha.2^{-4} + \mathrm{p}^3.\mathrm{p}^3.\varphi\alpha.2^{-6} + \mathrm{p}^4.\mathrm{p}^4\,\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.} \\
+ (\mathrm{D}.\varphi\alpha + \mathrm{D.p}^2.\varphi\alpha.2^{-2} + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^3.\varphi\alpha.2^{-4} + \mathrm{p}^3.\mathrm{p}^4.\varphi\alpha.2^{-6} + \mathrm{p}^4.\mathrm{p}^5.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.}).\cos x \\
+ (\mathrm{p}^2.\varphi\alpha.2^{-1} + \mathrm{D.p}^3.\varphi\alpha.2^{-3} + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^4.\varphi\alpha.2^{-5} + \mathrm{p}^3.\mathrm{p}^5.\varphi\alpha.2^{-7} + \text{etc.}).\cos 2x \\
+ (\mathrm{p}^3.\varphi\alpha.2^{-2} + \mathrm{D.p}^4.\varphi\alpha.2^{-4} + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^5.\varphi\alpha.2^{-6} + \mathrm{p}^3.\mathrm{p}^6.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.}).\cos 3x \\
+ (\mathrm{p}^4.\varphi\alpha.2^{-3} + \mathrm{D.p}^5.\varphi\alpha.2^{-5} + \mathrm{p}^2.\mathrm{p}^6.\varphi\alpha.2^{-7} + \mathrm{p}^3.\mathrm{p}^7.\varphi\alpha.2^{-9} + \text{etc.}).\cos 4x \\
+ \text{etc.},
\end{array}
$$

où la loi est bien facile à saisir.

Pour exécuter les dérivations indiquées dans (5), ou pour développer $\mathrm{p}^r.\mathrm{p}^s.\varphi\alpha$ en général, il n'y a rien de plus simple à faire que de développer $\mathrm{p}^{r+s}.\varphi\alpha$ par les règles des §§. II et III de l'article premier, puis de multiplier tout

tout le développement par $\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+s)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots s}$, ou $\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+r)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r}$; car $\text{D}^r.\text{D}^s.\varphi\alpha = \frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+s)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots s}\,\text{D}^{r+s}.\varphi\alpha$, et $\frac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+s)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots s}$ $= \frac{(s+1)(s+2)\ldots\ldots(s+r)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots r}$.

414. PROBLÈME. Convertir la fonction

$$\varphi\{\alpha + \zeta\sin x + \gamma(\sin x)^2 + \delta(\sin x)^3 + \text{etc.}\} \quad \ldots(6)$$

en une suite de cette forme :

$$A + B\sin x + C\cos 2x + D\sin 3x + E\cos 4x + \text{etc.} \quad \ldots(7)$$

La solution est pareille à celle du problème précédent. J'ai d'abord, en donnant un premier développement à (6),

$$\varphi\alpha + \text{D}.\varphi\alpha.\sin x + \text{D}^2.\varphi\alpha.(\sin x)^2 + \text{D}^3.\varphi\alpha.(\sin x)^3 + \text{etc.} \quad \ldots(8)$$

Mais, puisque l'on a $\sin x = (2\sqrt{-1})^{-1}.\{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\}$, on fera $(2\sqrt{-1})^{-1}\,e^{x\sqrt{-1}} = t$, et $(-2\sqrt{-1})^{-1}\,e^{-x\sqrt{-1}} = u$, afin d'avoir $\sin x = t + u$; substituant cette valeur de $\sin x$ dans (8), développant et ordonnant de même qu'au numéro précédent, on aura pour (8) la même formule (4) que ci-dessus. Rangeant donc et assemblant les termes de (4) de même que précédemment, puis remettant au lieu de t et u leurs valeurs, et observant que $(2\sqrt{-1})^{-1}.\{e^{rx\sqrt{-1}} - e^{-rx\sqrt{-1}}\} = \sin rx$, et $2^{-1}.\{e^{sx\sqrt{-1}} + e^{-sx\sqrt{-1}}\} = \cos sx$, on trouve

$$\varphi\{\alpha + \zeta\sin x + \gamma(\sin x)^2 + \delta(\sin x)^3 + \text{etc.}\} = \quad \ldots(9)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi\alpha + \text{D}.\text{D}.\varphi\alpha.2^{-2} + \text{D}^2.\text{D}^2.\varphi\alpha.2^{-4} + \text{D}^3.\text{D}^3.\varphi\alpha.2^{-6} + \text{D}^4.\text{D}^4.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.}\\
&+(\text{D}\varphi\alpha + \text{D}.\text{D}^2.\varphi\alpha.2^{-2} + \text{D}^2.\text{D}^3.\varphi\alpha.2^{-4} + \text{D}^3.\text{D}^4.\varphi\alpha.2^{-6} + \text{D}^4.\text{D}^5.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.}).\sin x\\
&-(\text{D}^2.\varphi\alpha.2^{-1} + \text{D}.\text{D}^3.\varphi\alpha.2^{-3} + \text{D}^2.\text{D}^4.\varphi\alpha.2^{-5} + \text{D}^3.\text{D}^5.\varphi\alpha.2^{-7} + \text{etc.}).\cos 2x\\
&-(\text{D}^3.\varphi\alpha.2^{-2} + \text{D}.\text{D}^4.\varphi\alpha.2^{-4} + \text{D}^2.\text{D}^5.\varphi\alpha.2^{-6} + \text{D}^3.\text{D}^6.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{etc.}).\sin 3x\\
&+(\text{D}^4.\varphi\alpha.2^{-3} + \text{D}.\text{D}^5.\varphi\alpha.2^{-5} + \text{D}^2.\text{D}^6.\varphi\alpha.2^{-7} + \text{D}^3.\text{D}^7.\varphi\alpha.2^{-9} + \text{etc.}).\cos 4x\\
&+(\text{D}^5.\varphi\alpha.2^{-4} + \text{D}.\text{D}^6.\varphi\alpha.2^{-6} + \text{D}^2.\text{D}^7.\varphi\alpha.2^{-8} + \text{D}^3.\text{D}^8.\varphi\alpha.2^{-10} + \text{etc.}).\sin 5x\\
&-(\text{D}^6.\varphi\alpha.2^{-5} + \text{etc.}).\cos 6x - (\text{D}^7.\varphi\alpha.2^{-6} + \text{etc.}).\sin 7x + \text{etc.} + \text{etc.},
\end{aligned}$$

suite qui ne diffère de la précédente (5), qu'en ce que les lignes successives sont affectées ici de 1, $\sin x$, $-\cos 2x$, $-\sin 3x$, $+\cos 4x$, $+\sin 5x$,

$-\cos 6x$, $-\sin 7x$, $+$ etc., tandis que dans la suite (5) elles le sont de $1, \cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\cos 5x$, $\cos 6x$, $\cos 7x$, etc.

On développera $p^r.p^s.\phi\alpha$ de même qu'au numéro précédent.

415. Exemple. Des formules (5) et (9) on peut tirer plusieurs conséquences utiles. Ainsi si l'on y fait égal à l'unité d'abord le coëfficient γ, ensuite δ, ensuite ε, etc., et qu'on fasse chaque fois tous les autres coëfficiens égaux à zéro, et $\phi\alpha = \alpha$, la formule (5) donne sur-le-champ les formules connues:

$(\cos x)^2 = 2.2^{-2} + 2^{-1}\cos 2x$,

$(\cos x)^3 = 3.2^{-2}\cos x + 2^{-2}\cos 3x$,

$(\cos x)^4 = 2.3.2^{-4} + 4.2^{-3}\cos 2x + 2^{-3}\cos 4x$,

$(\cos x)^5 = 2.5.2^{-4}\cos x + 5.2^{-4}\cos 3x + 2^{-4}\cos 5x$,

et en général, n étant un nombre entier positif quelconque, on aura

$$(\cos x)^{2n} = 2^{-2n}.p^n.p^n.\alpha + 2^{-2n+1}.\{p^{n-1}.p^{n+1}.\alpha.\cos 2x + p^{n-2}.p^{n+2}.\alpha.\cos 4x + p^{n-3}.p^{n+3}.\alpha.\cos 6x + \text{etc.} + p^{2n}.\alpha.\cos 2nx\},$$

$$(\cos x)^{2n+1} = 2^{-2n}.\{p^n.p^{n+1}.\alpha.\cos x + p^{n-1}.p^{n+2}.\alpha.\cos 3x + p^{n-2}.p^{n+3}.\alpha.\cos 5x + p^{n-3}.p^{n+4}.\alpha.\cos 7x + \text{etc.} + p^{2n+1}.\alpha.\cos(2n+1)x\};$$

pourvu qu'on fasse partout $p^{2n}.\alpha = 1$ dans l'avant-dernière, et $p^{2n+1}.\alpha = 1$ dans la dernière de ces formules.

La formule (9) donnera, de la même manière,

$(\sin x)^2 = 2.2^{-2} - 2^{-1}\cos 2x$,

$(\sin x)^3 = 3.2^{-2}\sin x - 2^{-2}\sin 3x$,

$(\sin x)^4 = 2.6.2^{-4} - 4.2^{-3}\cos 2x + 2^{-3}\cos 4x$,

$(\sin x)^5 = 2.5.2^{-4} - 5.2^{-4}\sin 3x + 2^{-4}\sin 5x$,

et généralement, n étant un nombre entier positif quelconque, on aura

$$(\sin x)^{2n} = 2^{-2n}.p^n.p^n.\alpha - 2^{-2n+1}.\{p^{n-1}.p^{n+1}.\alpha.\cos 2x - p^{n-2}.p^{n+2}.\alpha.\cos 4x + p^{n-3}.p^{n+5}.\alpha.\cos 6x - \text{etc.} \mp p^{2n}.\alpha.\cos 2nx\},$$

$$(\sin x)^{2n+1} = 2^{-2n}.\{p^n.p^{n+1}.\alpha.\sin x - p^{n-1}.p^{n+2}.\alpha.\sin 3x + p^{n-2}p^{n+3}.\alpha.\sin 5x - p^{n-3}.p^{n+4}.\alpha.\sin 7x + \text{etc.} \pm p^{2n+1}.\alpha.\sin(2n+1)x\};$$

pourvu qu'on fasse partout $p^{2n}.\alpha = 1$ dans l'avant-dernière, et $p^{2n+1}.\alpha = 1$ dans la dernière formule.

416. Autre exemple. On a besoin en Astronomie de développer $(1 - \zeta\cos x)^{-m}$ en une suite qui procède suivant les cosinus des angles multiples de x. En

faisant dans la formule (5) $\varphi\alpha = 1^{-m}$, $\text{D}.\alpha = -\beta$, et γ, δ, ε, etc. $=0$, elle donne sur-le-champ, l'exposant m étant quelconque, fractionnaire, irrationnel, etc.,

$$(1 - \beta\cos x)^{-m} =$$

$$1 + m(m+1)\beta^2.2^{-2} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.1.2}\beta^4.2^{-4} + \frac{m\ldots.(m+5)}{1.2.3.1.2.3}\beta^6.2^{-6} + \text{etc.}$$

$$+\left\{m\beta + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.1.2}\beta^3 2^{-2} + \frac{m\ldots(m+4)}{1.2.1.2.3}\beta^5 2^{-4} + \frac{m\ldots(m+6)}{1.2.3.1.2.3.4}\beta^7 2^{-6} + \text{etc.}\right\}.\cos x$$

$$+\left\{\frac{m(m+1)}{1.2}\beta^2 2^{-1} + \frac{m\ldots.(m+3)}{1.1.2.3}\beta^4 2^{-3} + \frac{m\ldots.(m+5)}{1.2.1.2.3.4}\beta^6 2^{-5} + \frac{m\ldots.(m+7)}{1.2.3.1.2\ldots5}\beta^8 2^{-7} + \text{etc.}\right\}.\cos 2x$$

$$+\left\{\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\beta^5 2^{-2} + \frac{m\ldots(m+4)}{1.1.2.3.4}\beta^5 2^{-4} + \frac{m\ldots(m+6)}{1.2.1.2.3\ldots5}\beta^7 2^{-6} + \frac{m\ldots(m+8)}{1.2.3.1.2..6}\beta^9 2^{-8} + \text{etc.}\right\}.\cos 3x$$

$$+ \text{etc.},$$

où la loi elle facile à saisir. Cette manière de développer $(1-\beta\cos x)^{-m}$ me paroît ne rien laisser à désirer du côté de la simplicité (*). Nous pourrions aisément multiplier le nombre des conséquences intéressantes que l'on peut tirer des théorèmes (5) et (9).

417. PROBLÈME. On propose de développer

$$\varphi\{\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x + \delta\cos 3x + \varepsilon\cos 4x + \text{etc.}\} \quad \ldots.(1)$$

en une suite de la même forme,

$$A + B\cos x + C\cos 2x + D\cos 3x + E\cos 4x + \text{etc.} \quad \ldots(2)$$

Puisque l'on a $\cos x = 2^{-1}e^{x\sqrt{-1}} + 2^{-1}e^{-x\sqrt{-1}}$ et $\cos rx = 2^{-1}\{e^{rx\sqrt{-1}} + e^{-rx\sqrt{-1}}\}$, je fais $e^{x\sqrt{-1}} = t$ et $e^{-x\sqrt{-1}} = u$, et j'aurai $\cos rx = 2^{-1}(t^r + u^r)$; substituant dans la fonction (1), elle devient

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta 2^{-1}t + \gamma 2^{-1}t^2 + \delta 2^{-1}t^3 + \varepsilon 2^{-1}t^4 + \text{etc.} \\ + \beta 2^{-1}u + \gamma 2^{-1}u^2 + \delta 2^{-1}u^3 + \varepsilon 2^{-1}u^4 + \text{etc.} \end{matrix}\right\} \quad \ldots.(3)$$

Pour faire plus commodément les dérivations, je représente cette expression (3) par

$$\varphi\left\{\begin{matrix} \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t + \mathfrak{c}t^2 + \mathfrak{d}t^3 + \mathfrak{e}t^4 + \text{etc.} \\ + \mathfrak{b}'u + \mathfrak{c}''u^2 + \mathfrak{d}'''u^3 + \mathfrak{e}^{IV}u^4 + \text{etc.} \end{matrix}\right\}, \quad \ldots.(4)$$

(*) On peut comparer cette solution à celle qu'EULER a donnée dans sa pièce sur les inégalités de Saturne et de Jupiter, couronnée par l'Académie des sciences de Paris en 1748, et à la méthode de CLAIRAUT, *Mémoires de l'Académie de Paris*, année 1754, pages 545 et suivantes.

où je considère $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}'''$, etc. comme différens de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. en exécutant les premiers développemens, sauf à faire après ces développemens $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}''=\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}'''=\mathfrak{d}$, etc. Or, le polynome de (4) est un polynome double, α y a deux dérivées, savoir $\text{D}.\alpha=\mathfrak{b}$ et $\text{D}'.\alpha=\mathfrak{b}'$, mais aucune des lettres $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. n'a de dérivée D', ni aucune des lettres $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}'''$, etc. n'a de dérivée D. Sous cette restriction, on voit que la formule (4), analogue à celle du n.° 190, aura pour développement

$$\varphi\{\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos 2x+\delta\cos 3x+\text{etc.}\}= \quad \ldots\ldots(5)$$

$$\begin{array}{l}\varphi a+\text{D}.\varphi a.t+\text{D}^2.\varphi a.t^2+\text{D}^3.\varphi a.t^3+\text{D}^4.\varphi a.t^4+\text{etc.}\\ +\text{D}'.\varphi a.u+\text{D}'.\text{D}.\varphi a.tu+\text{D}'.\text{D}^2.\varphi a.t^2u+\text{D}'.\text{D}^3.\varphi a.t^3u+\text{etc.}\\ +\text{D}'^2.\varphi a.u^2+\text{D}'^2.\text{D}.\varphi a.tu^2+\text{D}'^2.\text{D}^2.\varphi a.t^2u^2+\text{etc.}\\ +\text{D}'^3.\varphi a.u^3+\text{D}'^3.\text{D}.\varphi a.tu^3+\text{etc.}\\ +\text{D}'^4.\varphi a.u^4+\text{etc.}\\ +\text{etc.}\end{array}$$

Or, puisque, d'après ce qui précède, les dérivations D' et D sont absolument les mêmes, mais totalement indépendantes entre elles, il est clair qu'en général $\text{D}'^r.\varphi a=\text{D}^r.\varphi a$, et $\text{D}'^r.\text{D}^s.\varphi a=\text{D}'^s.\text{D}^r.\varphi a$; ainsi on pourra ordonner le second membre de (5) suivant

1, tu, t^2u^2, t^3u^3, etc.; $t+u$, t^2u+tu^2, $t^3u^2+t^2u^3$, etc.;

t^2+u^2, t^3u+tu^3, $t^4u^2+t^2u^4$, etc; t^3+u^3, t^4u+tu^4, etc., etc.;

et même, à cause qu'ici tu est égal à l'unité, tu étant $=e^{x\sqrt{-1}}.e^{-x\sqrt{-1}}$, et que par conséquent toutes les quantités de la première de ces suites se réduisent à 1, toutes celles de la seconde à $t+u$, toutes celles de la troisième à t^2+u^2, et ainsi de suite; la série (5) s'ordonnera de cette manière suivant 1, $t+u$, t^2+u^2, t^3+u^3, etc.; et en remettant ensuite, à la place de $t^{r+s}u^s+t^su^{r+s}=t^r+u^r$, sa valeur $e^{rx\sqrt{-1}}+e^{-rx\sqrt{-1}}=2.\cos rx$, on aura

$$\varphi\{\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos 2x+\delta\cos 3x+\text{etc.}\}= \quad \ldots\ldots(6)$$

$$\begin{array}{l}\varphi a+\text{D}'.\text{D}.\varphi a+\text{D}'^2.\text{D}^2.\varphi a+\text{D}'^3.\text{D}^3.\varphi a+\text{D}'^4.\text{D}^4.\varphi a+\text{etc.}\\ +(\text{D}.\varphi a+\text{D}'.\text{D}^2.\varphi a+\text{D}'^2.\text{D}^3.\varphi a+\text{D}'^3.\text{D}^4.\varphi a+\text{etc.}).2\cos x\\ +(\text{D}^2.\varphi a+\text{D}'.\text{D}^3.\varphi a+\text{D}'^2.\text{D}^4.\varphi a+\text{D}'^3.\text{D}^5.\varphi a+\text{etc.}).2\cos 2x\\ +(\text{D}^3.\varphi a+\text{D}'.\text{D}^4.\varphi a+\text{D}'^2.\text{D}^5.\varphi a+\text{D}'^3.\text{D}^6.\varphi a+\text{etc.}).2\cos 3x\\ +(\text{D}^4.\varphi a+\text{D}'.\text{D}^5.\varphi a+\text{etc.})2\cos 4x+(\text{D}^5.\varphi a+\text{D}'.\text{D}^6.\varphi a+\text{etc.}).2.\cos 5x\\ +\text{etc.}+\text{etc.}\end{array}$$

Dans

Dans cette série, quoique $D'^m.D^n.\varphi a = D'^n D^m.\varphi a$, cependant $D'^m.D^n.\varphi a$ ne sera pas $= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n} D^{m+n}.\varphi a$, comme n.° 413, parce qu'ici $D'^m.$ et $D^n.$ marquent des dérivations entièrement indépendantes, quoique les mêmes; et il n'est pas difficile de voir, par le n.° 135, que l'on a généralement

$$D'^m.D^n.\varphi a =$$

$$D^m.\left\{\begin{array}{l}\mathrm{D}\varphi\alpha.D^{n-1}.\beta.2^{-1} + D^2\varphi\alpha.D^{n-2}.\beta^2.2^{-2} + D^3\varphi\alpha.D^{n-3}.\beta^3.2^{-3} + \text{etc.} \\ + D^{n-2}\varphi\alpha.D^2.\beta^{n-2}.2^{-n+2} + D^{n-1}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^{n-1}.2^{-n+1} + D^n\varphi\alpha.\beta^n.2^{-n}\end{array}\right\},$$

où $D^m.$ n'affecte que $\varphi\alpha$ et non β, de sorte qu'en développant encore par $D^m.$, on trouve pour le terme général de la série qui multiplie $2\cos(n-m)x$ dans (6),

$$D'^m.D^n.\varphi a = \qquad\ldots\ldots(7)$$

$$\mathrm{DD}\varphi\alpha.D^{m-1}.\beta.D^{n-1}.\beta.2^{-2} + D^2\mathrm{D}\varphi\alpha.D^{m-2}.\beta^2.D^{n-1}.\beta.2^{-3} + D^3\mathrm{D}\varphi\alpha.D^{m-3}.\beta^3.D^{n-1}.\beta.2^{-4}$$

$$+ \mathrm{D}D^2\varphi\alpha.D^{m-1}.\beta.D^{n-2}.\beta^2.2^{-3} + D^2D^2\varphi\alpha.D^{m-2}.\beta^2.D^{n-2}.\beta^2.2^{-4}$$

$$+ \mathrm{D}D^3\varphi\alpha.D^{m-1}.\beta.D^{n-3}.\beta^3.2^{-4}$$

$+$ etc. .... $+$ etc.

$$+ D^m D^{n-2}\varphi\alpha.\beta^m D^2.\beta^{n-2}.2^{-m+n+2}$$

$$+ D^{m-1}D^{n-1}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^{m-1}.\mathrm{D}.\beta^{n-1}.2^{-m+n+2} + D^m D^{n-1}\varphi\alpha.\beta^m\mathrm{D}.\beta^{n-1}.2^{-m+n-1}$$

$$+ D^{m-2}D^n\varphi\alpha.D^2.\beta^{m-2}.\beta^n.2^{-m+n+2} + D^{m-1}D^n\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^{m-1}.\beta^n\,2^{-m+n-1} + D^m D^n\varphi\alpha.\beta^{m+n}.2^{-m+n};$$

où, dans $D^r.\beta^{m-r}.D^s.\beta^{n-s}$, $D^r.$ n'affecte que β^{m-r} et nullement $D^s.\beta^{n-s}$; de sorte qu'il faut développer séparément $D^r.\beta^{m-r}$ et $D^s.\beta^{n-s}$, puis multiplier ces développemens l'un par l'autre; les dérivées divisées de β étant γ, δ, ε, ζ, etc. Ainsi on aura, par exemple,

$$D'^2.D^3.\varphi a = \mathrm{DD}\varphi\alpha.\gamma.\delta.2^{-2} + D^2\mathrm{D}\varphi\alpha.\beta^2.\delta.2^{-3} + D^2D^2\varphi\alpha.\beta^2.2\beta\gamma.2^{-4}$$

$$+ \mathrm{D}D^2\varphi\alpha.\gamma.2\beta\gamma.2^{-3} + \mathrm{D}D^3\varphi\alpha.\gamma.\beta^3.2^{-4} + D^2D^3\varphi\alpha.\beta^5.2^{-5}.$$

418. Si l'on demande à développer

$$\varphi\{\alpha + \beta\sin z + \gamma\cos 2z + \delta\sin 3z + \varepsilon\cos 4z + \zeta\sin 5z + \eta\cos 6z + \text{etc.}\}$$

en une série ordonnée de la même manière :

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin z + \mathfrak{C}\cos 2z + \mathfrak{D}\sin 3z + \mathfrak{E}\cos 4z + \mathfrak{F}\sin 5z + \mathfrak{G}\cos 6z + \text{etc.};$$

la solution de ce cas se déduit facilement de celle du problème précédent, si l'on y met $\frac{1}{2}\pi + z$ à la place de x, $\frac{1}{2}\pi$ désignant l'angle droit. Alors l'on a, comme on sait, $\cos(\frac{1}{2}\pi + z) = -\sin z$, $\cos(\pi + 2z) = -\cos 2z$, $\cos(\frac{3}{2}\pi + 3z) = \sin 3z$, $\cos(2\pi + 4z) = \cos 4z$, $\cos(\frac{5}{2}\pi + 5z) = -\sin 5z$,

$\cos(3\pi + 6z) = -\cos 6z$, etc.; la suite (1),

$\varphi\{\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x + \delta\cos 3x + \varepsilon\cos 4x + \zeta\cos 5x + \eta\cos 6x + \text{etc.}\}$,

devient

$$\varphi\{\alpha - \beta\sin z - \gamma\cos 2z + \delta\sin 3z + \varepsilon\cos 4z - \zeta\sin 5z - \eta\cos 6z + \text{etc.}\},$$

et la suite (2) résultante du développement devient

$$A - B\sin z - C\cos 2z + D\sin 3z + E\cos 4z - F\sin 5z - G\cos 6z + \text{etc.}$$

Ainsi il suffira de changer, dans le second membre de (6), $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\cos 5x$, $\cos 6x$, etc., respectivement en $-\sin z$, $-\cos 2z$, $\sin 3z$, $\cos 4z$, $-\sin 5z$, $-\cos 6z$, $+$ etc., et de mettre partout dans les développemens des quantités dont la formule (7) représente l'expression générale, $-\beta$, $-\gamma$, $-\zeta$, $-\eta$, $-\varkappa$, $-\lambda$, etc. à la place de β, γ, ζ, η, $\varkappa$, λ, etc.

419. PROBLÈME. On propose de développer

$$\varphi\{\alpha + \beta\sin x + \gamma\sin 2x + \delta\sin 3x + \varepsilon\sin 4x + \zeta\sin 5x + \text{etc.}\} \quad \ldots(8)$$

en une suite qui procède suivant les sinus et cosinus des multiples de x.

Ce problème, pour lequel on peut employer une analyse semblable à celle du n.° 417, n'est pas susceptible d'une solution aussi simple que les précédens.

Puisque $\sin rx = (2\sqrt{-1})^{-1}.\{e^{rx\sqrt{-1}} - e^{-rx\sqrt{-1}}\}$, en faisant $t = e^{x\sqrt{-1}}$ et $u = e^{-x\sqrt{-1}}$, on aura $\sin rx = (2\sqrt{-1})^{-1}.(t^r - u^r)$, $tu = 1$, et la fonction (8) prendra cette forme :

$$\varphi\left\{\begin{array}{l} \alpha + \dfrac{\beta}{2\sqrt{-1}}t + \dfrac{\gamma}{2\sqrt{-1}}t^2 + \dfrac{\delta}{2\sqrt{-1}}t^3 + \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{-1}}t^4 + \text{etc.} \\ -\dfrac{\beta}{2\sqrt{-1}}u - \dfrac{\gamma}{2\sqrt{-1}}u^2 - \dfrac{\delta}{2\sqrt{-1}}u^3 - \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{-1}}u^4 - \text{etc.} \end{array}\right\}, \ldots(9)$$

que je représente par

$$\varphi\left\{\begin{array}{l} a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \text{etc.} \\ \quad + b'u + c''u^2 + d'''u^3 + e^{IV}u^4 + \text{etc.} \end{array}\right\}, \quad \ldots(10)$$

expression de laquelle on tire, en développant, une série double, de même que de la formule (4) du n.° 417, savoir :

$$\begin{array}{l} \varphi a + \mathrm{D}.\varphi a.t + \mathrm{D}^2.\varphi a.t^2 + \mathrm{D}^3.\varphi a.t^3 + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{D}'.\varphi a.u + \mathrm{D}'.\mathrm{D}.\varphi a.tu + \mathrm{D}'.\mathrm{D}^2.\varphi a.t^2u + \text{etc.} \\ \qquad + \mathrm{D}'^2.\varphi a.u^2 + \mathrm{D}'^2.\mathrm{D}.\varphi a.tu^2 + \text{etc.} \\ \qquad\quad + \mathrm{D}'^3.\varphi a.u^3 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + \text{etc.}; \end{array} \quad \ldots(11)$$

mais ici, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'''$, n'étant égaux que quant à la valeur et non quant au signe, les dérivées $\mathrm{D}'.\varphi a$ et $\mathrm{D}.\varphi a$, ou $\mathfrak{D}'^r.\mathfrak{D}^r.\varphi a$ et $\mathfrak{D}'^r.\mathfrak{D}^r\varphi a$, ne sont plus égales, de sorte qu'on ne pourra pas réduire (11) comme on a réduit le second membre de (5); mais, en mettant dans (11) l'unité au lieu de tu, on en tire

$$\varphi\{\alpha + \beta\sin x + \gamma\sin 2x + \delta\sin 3x + \text{etc.}\} = \quad \ldots\ldots(12)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi a + \mathrm{D}'.\mathrm{D}.\varphi a + \mathfrak{D}'^2.\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \text{etc.}\\
&+ (\mathrm{D}.\varphi a + \mathrm{D}'.\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^2.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \text{etc.})t\\
&+ (\mathrm{D}'.\varphi a + \mathfrak{D}'^2.\mathrm{D}.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^5.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \text{etc.})u\\
&+ (\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathrm{D}'.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^2\,\mathfrak{D}^4.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathfrak{D}^5.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^6.\varphi a + \text{etc.})t^2\\
&+ (\mathfrak{D}'^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathrm{D}.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^5.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^6.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \text{etc.})u^2\\
&+ (\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathrm{D}'.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \mathfrak{D}'^2.\mathfrak{D}^5.\varphi a + \mathfrak{D}'^3.\mathfrak{D}^6.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathfrak{D}^7.\varphi a + \text{etc.})t^3\\
&+ (\mathfrak{D}'^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^4.\mathrm{D}.\varphi a + \mathfrak{D}'^5.\mathfrak{D}^2.\varphi a + \mathfrak{D}'^6.\mathfrak{D}^3.\varphi a + \mathfrak{D}'^7.\mathfrak{D}^4.\varphi a + \text{etc.})u^3\\
&+ \text{etc.} \quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Pour mettre à la place des t et u leurs valeurs en sinus et cosinus de x et de ses multiples, il est nécessaire de développer cette formule et de remettre à la place de $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}''$, etc. leurs valeurs $(2\sqrt{-1})^{-1}\beta$, $-(2\sqrt{-1})^{-1}\beta$, $(2\sqrt{-1})^{-1}\gamma$, $-(2\sqrt{-1})^{-1}\gamma$, etc.; mais, sans faire les développemens réduits, il est aisé de voir qu'on peut se contenter des développemens en $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$, où l'on observera que D ne peut affecter aucun $\mathfrak{b}'$ ni D' aucun $\mathfrak{b}$, et que $\mathfrak{D}^n.\mathfrak{b}^r$ et $\mathfrak{D}'^n.\mathfrak{b}'^r$ seront égaux à $(2\sqrt{-1})^{-r}\mathfrak{D}^n.\beta^r$ et à $(-2\sqrt{-1})^{-r}\mathfrak{D}^n.\beta^r$, où les dérivées divisées de β seront simplement γ, δ, ε, etc.; et l'on aura ainsi pour le commencement de la formule (12),

$$\varphi\{\alpha + \beta\sin x + \gamma\sin 2x + \delta\sin 3x + \varepsilon\sin 4x + \text{etc.}\} = \quad \ldots(13)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi\alpha| + \mathrm{DD}\varphi\alpha.\beta^2.2^{-2}| + \mathrm{DD}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta.\mathrm{D}.\beta.2^{-2} + \mathfrak{D}^2\mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\beta^4.2^{-4}| + \text{etc. etc.}\\
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha.\beta.\sin x| + \mathrm{DD}\varphi\alpha.\beta\mathrm{D}.\beta.2^{-1}\cos x + \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\beta^3.2^{-2}\sin x| + \text{etc. etc.}\\
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta.\sin 2x - \mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\beta^2.2^{-1}\cos 2x| + \mathrm{DD}\varphi\alpha.\beta\mathfrak{D}^2.\beta.2^{-1}\cos 2x\\
&+ \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\beta\mathrm{D}.\beta^2.2^{-2}\sin 2x - \mathrm{D}\mathfrak{D}^3\varphi\alpha.\beta^4.2^{-3}\cos 2x| + \text{etc. etc.}\\
&+ \mathrm{D}\varphi\alpha.\mathfrak{D}^2.\beta.\sin 3x - \mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\mathrm{D}.\beta^2.2^{-1}\cos 3x - \mathfrak{D}^3\varphi\alpha.\beta^3.2^{-2}\sin 3x|\\
&+ \mathrm{DD}\varphi\alpha.\beta\mathfrak{D}^3.\beta.2^{-1}\cos 3x + \mathrm{D}\mathfrak{D}^2\varphi\alpha.\beta\mathfrak{D}^2.\beta^2.2^{-2}\sin 3x - \mathrm{D}\mathfrak{D}^3\varphi\alpha.\beta\mathrm{D}.\beta^3.2^{-3}\cos 3x\\
&- \mathrm{D}\mathfrak{D}^4\varphi\alpha.\beta^5.2^{-4}\sin 3x| + \text{etc. etc.}\\
&+ \text{etc. etc.}
\end{aligned}$$

Il est aisé de pousser ce développement aussi loin qu'on voudra.

(II.)

Des produits de facteurs dont les premières différences sont constantes.

420. Les produits de la forme $m(m-r)(m-2r)\ldots\ldots(m-nr+r)$ ou $m(m+r)(m+2r)\ldots\ldots(m+nr-r)$ se présentent fréquemment dans l'Analyse ; nous les avons rencontrés trop souvent pour n'avoir pas désiré de les exprimer d'une manière abrégée, afin de simplifier les formules dans lesquelles ils entrent. Les signes de dérivation en offrent le moyen. Si nous n'en avons pas fait usage plus tôt, c'est que nous avons craint de présenter nos résultats sous des formes trop éloignées des formes ordinaires.

Vandermonde (*) et Kramp (**), en assimilant ces produits aux puissances, ont été conduits à les exprimer commodément et à y remarquer plusieurs propriétés qu'on peut regarder comme les fondemens d'une théorie que ce dernier Auteur vient d'enrichir de plusieurs théorèmes, et à laquelle il a ajouté des recherches sur la manière d'évaluer ces produits par des séries convergentes.

Ces produits et les coëfficiens binomiaux ont aussi mérité l'attention d'Euler, qui a donné sur ce sujet différens mémoires (***), et des notations particulières pour les coëfficiens binomiaux.

Sans entrer dans de trop grands détails sur la théorie des produits dont il est question, notre dessein est de la rappeler aux dérivations tant en elle-même que quant aux notations. Par ce moyen les expressions se lieront plus étroitement aux différentielles, ou aux intégrales définies, et généralement aux formules dont ces produits tirent leur origine ; nous aurons en même temps des signes très-expressifs pour les coëfficiens binomiaux, et des moyens de rendre plus faciles certaines démonstrations par l'application de nos formules précédentes.

421. Pour abréger nous nommerons *quantité factorielle*, ou simplement *factorielle*, le produit $m(m-r)(m-2r)(m-3r)\ldots\ldots(m-nr+r)$,

(*) Dans son mémoire *sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle*, imprimé parmi ceux de l'Académie des sciences de Paris, année 1772, première partie, pages 489 et suivantes.

(**) Dans le chapitre III de l'*Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg, an VII.

(***) Dans les *Acta*, surtout dans les tomes VII et VIII des *nova Acta* de l'Académie de Pétersbourg. Comme cette matière est liée aux intégrales définies, on peut y rapporter plusieurs autres mémoires du même Géomètre répandus dans les Commentaires de Pétersbourg, ainsi que différentes parties du 1.er et du 4.e volumes de son Calcul intégral et de ses *Opuscula analytica*.

ou

ou $m(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots\ldots(m+nr-r)$; nous appellerons *factorielle divisée* l'expression $\frac{m(m-r)(m-2r)\ldots(m-nr+r)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}$. Le premier facteur m s'appellera la quantité *initiale*; r est la *différence factorielle*, et n l'indice ou le nombre des facteurs.

422. Si l'on suppose $\text{D}.\alpha = \zeta$ et zéro toutes les dérivées suivantes de α, on a, par ce qui précède,

$$\text{D}^n.\alpha^m = \text{D}^n\alpha^m.\zeta^n = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)\alpha^{m-n}\zeta^n;$$

d'où il s'ensuit que, si l'on fait $\alpha = 1$, $\zeta = \text{D}.1 = 1$, on aura

$$\text{D}^n1^m = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+1), \qquad \ldots(1)$$

pourvu qu'on ne fasse $1^m = 1$ qu'après le développement. On aura pareillement

$$(-1)^n.\text{D}^n1^{-m} = m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n-1), \qquad \ldots(2)$$

$$r^n.\text{D}^n1^{\frac{m}{r}} = m(m-r)(m-2r)(m-3r)\ldots\ldots(m-nr+r), \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$(-r)^n.\text{D}^n1^{-\frac{m}{r}} = m(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots\ldots(m+nr-r). \qquad \ldots(4)$$

Ainsi, pour passer de (1) à (3), on divise dans D^n1^m l'exposant m par r et l'on multiplie $\text{D}^n1^{\frac{m}{r}}$ par r^n; pour passer de (1) à (4), on divise dans D^n1^m l'exposant m par $-r$ et l'on multiplie $\text{D}^n1^{\frac{m}{-r}}$ par $(-r)^n$.

Si par l'expression $\text{D}^n.1^{\frac{m}{-r.}}$, où l'on a mis un point après le dénominateur $-r$ de l'exposant $\frac{m}{-r}$, on convient d'entendre que $\text{D}.1$, la première dérivée de 1, est égale à ce dénominateur pris avec le signe qui l'affecte [$\text{D}^2.1$, $\text{D}^3.1$, etc. étant toujours zéro], on aura des notations fort simples. Les factorielles (2), (3), (4) s'exprimeront respectivement par $\text{D}^n.1^{\frac{m}{-1.}}$, $\text{D}^n.1^{\frac{m}{r.}}$, $\text{D}^n.1^{\frac{m}{-r.}}$; ou bien par $\text{D}^n.1^{m:-1.}$, $\text{D}^n.1^{m:r.}$, $\text{D}^n.1^{m:-r.}$, en mettant $m:r$ au lieu de $\frac{m}{r}$, pour plus de facilité typographique; et l'on aura

$$\text{D}^n.1^{m:r.} = r^n.\text{D}^n1^{m:r} \quad \text{et} \quad \text{D}^n.1^{m:-r.} = (-r)^n.\text{D}^n1^{m:-r} \qquad \ldots\ldots(5)$$

423. Quant aux factorielles divisées, on a pareillement

$$\text{Ð}^n1^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots\ldots\,n},$$

$$D^n.1^{m:r} = \frac{m(m-r)(m-2r)(m-3r)\ldots\ldots(m-nr+r)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ldots\ldots\ n}, \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$D^n 1^{m:r} = \frac{\frac{m}{r}\left(\frac{m}{r}-1\right)\left(\frac{m}{r}-2\right)\ldots\left(\frac{m}{r}-n+1\right)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ n} = \frac{m(m-r)(m-2r)\ldots(m-nr+r)}{r\ .\ 2r\ .\ 3r\ \ldots\ldots\ldots\ nr};$$

ainsi les coëfficiens binomiaux s'expriment aussi très-simplement par nos notations.

---

424. Recueillons à présent quelques propriétés des factorielles.

Sans changer la valeur de la factorielle $D^n.1^{m:r}$, on peut changer ou l'initiale m ou la différence factorielle r.

En effet, puisque $1^{m:r} = 1^{M:\frac{Mr}{m}}$, on a $D^n 1^{m:r} = D^n 1^{M:\frac{Mr}{m}}$; or, numéro précédent, $D^n 1^{m:r} = \frac{D^n.1^{m:r}}{r^n}$, et $D^n 1^{M:\frac{Mr}{m}} = \frac{m^n}{M^n r^n} D^n.1^{M:\frac{Mr}{m}}$; donc on a

$$D^n.1^{m:r} = \frac{m^n}{M^n} D^n.1^{M:\frac{Mr}{m}}, \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

où de m l'initiale est changée en M.

Pareillement, puisque $1^{m:r} = 1^{\frac{mR}{r}:R}$, on a $D^n 1^{m:r} = D^n 1^{\frac{mR}{r}:R}$; or on vient de voir que $D^n 1^{m:r} = \frac{D^n.1^{m:r}}{r^n}$, et $D^n 1^{\frac{mR}{r}:R} = \frac{D^n.1^{\frac{mR}{r}:R}}{R^n}$; donc on a aussi

$$D^n.1^{m:r} = \frac{r^n}{R^n} D^n.1^{\frac{mR}{r}:R}, \qquad \ldots\ldots(8)$$

où de r la différence est devenue R.

425. Puisque la valeur d'une factorielle demeure la même si l'on écrit ses facteurs dans un ordre renversé, c'est-à-dire, puisque

$$m(m-r)(m-2r)\ldots\ldots(m-nr+r) = (m-nr+r)(m-nr+2r)\ldots\ldots(m-r)m,$$

ce qui est représenté par cette équation

$$D^n.1^{m:r} = D^n.1^{(m-nr+r):-r}; \qquad \ldots\ldots(9)$$

on a le moyen de changer le signe de la différence, sans changer la différence ni la valeur de la factorielle.

426. Si la différence r devient $= 0$, la factorielle devient une puissance, et l'on a

$$D^n.1^{m:0} = m^n; \qquad \ldots\ldots(10)$$

car $D^n.1^{m:o} = m(m-o)(m-2.o)(m-3.o)\dots(m-n.o+o) = m^n$;

Si, dans le quotient de $D^n.1^{(p+\frac{s}{u}):r}$ divisé par $D^n.1^{(q+\frac{t}{v}):k}$, u et v deviennent zéro, la valeur de ce quotient sera $= \frac{s^n}{t^n}$.

En effet on a dans ce cas

$$\frac{D^n.1^{(p+\frac{s}{o}):r}}{D^n.1^{(q+\frac{t}{o}):k}} = \frac{(p+\frac{s}{o})(p+\frac{s}{o}-r)(p+\frac{s}{o}-2r)\dots(p+\frac{s}{o}-nr+r)}{(q+\frac{t}{o})(q+\frac{t}{o}-k)(q+\frac{t}{o}-2k)\dots(q+\frac{t}{o}-nk+k)};$$

et, en multipliant par zéro chaque facteur du second membre, où il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur, il est clair que ce second membre se réduit à $\frac{s^n}{t^n}$.

427. Après ces observations sur les initiales et les différences des factorielles, portons notre examen sur les indices.

THÉORÈME. On a pour $D^{n+s}.1^{m:r}$ ces deux expressions

$$D^{n+s}.1^{m:r} = D^n.1^{m:r} \times D^s.1^{(m-nr):r}, \quad \dots\dots(11)$$

$$\text{et } D^{n+s}.1^{m:r} = D^s.1^{m:r} \times D^n.1^{(m-sr):r}. \quad \dots\dots(12)$$

En effet, on peut partager la factorielle proposée en différens groupes de facteurs; ainsi l'on a

$$\begin{aligned}D^{n+s}.1^{m:r} &= m(m-r)(m-2r)\dots(m-nr+r)\times(m-nr)(m-nr-r)\dots(m-nr-sr+r)\\ &= m(m-r)(m-2r)\dots(m-sr+r)\times(m-sr)(m-sr-r)\dots(m-sr-nr+r),\end{aligned}$$

ce qui donne le théorème.

428. De là on peut déduire les valeurs des factorielles lorsque l'indice de D devient négatif et entier, et même pour des cas d'indices fractionnaires.

De (12) il s'ensuit d'abord, en y faisant $s = -n$,

$$D^0.1^{m:r} = D^{-n}.1^{m:r} \times D^n.1^{(m+nr):r};$$

donc, puisque $D^0.1^{m:r} = 1^{m:r} = 1$, on a

$$D^{-n}.1^{m:r} = \frac{1}{D^n.1^{(m+nr):r}}; \quad \dots\dots(13)$$

et, comme $D^n.1^{(m+nr):r} = D^n.1^{(m+r):-r}$ [formule (9)], on a aussi

$$D^{-n}.1^{m:r} = \frac{1}{D^n.1^{(m+r):-r}}. \quad \dots\dots(14)$$

En développant cette dernière équation, elle donne

$$D^{-n}.1^{m:r} = \frac{1}{(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots\ldots(m+nr)}.$$

La notation D^{-n} a l'avantage qu'en la considérant comme une dérivation inverse de l'ordre n, elle fait trouver par sa nature même la valeur de $D^{-n}.1^{m:r}$. Car, puisque $D^n.1^{m:r} = r^n.D^n 1^{m:r}$, on a, en changeant n en $-n$, $D^{-n}.1^{m:r} = r^{-n}.D^{-n}1^{m:r}$, c'est-à-dire qu'au lieu de multiplier par r lorsqu'on exécute la dérivation directe dans $D.1^{m:r}$, il faut diviser par r lorsqu'on exécute la dérivation inverse dans $D^{-1}.1^{m:r}$, ce qui s'accorde avec ce qui a été observé au n.° 384; et, en exécutant les dérivations inverses, on trouve

$$D^{-n}.1^{m:r} = S^n.1^{\frac{m}{r}} = \frac{S^{n-1}.1^{\frac{m}{r}+1}}{m+r} = \frac{S^{n-2}.1^{\frac{m}{r}+2}}{(m+r)(m+2r)}$$

$$= \frac{S^{n-3}.1^{\frac{m}{r}+5}}{(m+r)(m+2r)(m+3r)} = \frac{1}{(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots(m+nr)}.$$

On a donc $\dfrac{1}{1.2.3\ldots n} = D^{-n}1^{0} = \dfrac{1}{D^n 1^n} = \dfrac{1}{D^n.1^{1:-1}}$.

429. En égalant entre eux les seconds membres de (11) et de (12), on trouve

$$D^n.1^{m:r} = D^n.1^{(m-sr):r} \times \frac{D^s.1^{m:r}}{D^s.1^{(m-nr):r}};$$

et si l'on change n en $-n$, et m, r en M, R, on a aussi

$$D^{-n}.1^{M:R} = D^{-n}.1^{(M-sR):R} \times \frac{D^s.1^{M:R}}{D^s.1^{(M+nR):R}}.$$

Multipliant ensemble ces deux équations, il vient

$$D^n.1^{m:r} \times D^{-n}.1^{M:R} = \quad \ldots\ldots(15)$$

$$D^n.1^{(m-sr):r} \times D^{-n}.1^{(M-sR):R}\,\frac{D^s.1^{m:r} \times D^s.1^{M:R}}{D^s.1^{(m-nr):r} \times D^s.1^{(M+nR):R}}.$$

Or, si l'on met $\frac{s}{0}$ au lieu de s (ou, comme on a coutume de s'exprimer, si l'on suppose que s devienne infini), il est visible, par les n.os 426 et 428, que $D^n.1^{(m-\frac{s}{0}r):r} \times D^{-n}.1^{(M-\frac{s}{0}R):R}$ devient $= \frac{r^n}{R^n}$; donc,

THÉORÈME. Quel que soit n, on a toujours

$$D^n.1^{m:r} \times D^{-n}.1^{M:R} = \frac{r^n}{R^n}\,\frac{D^{\frac{s}{0}}.1^{m:r} \times D^{\frac{s}{0}}.1^{M:R}}{D^{\frac{s}{0}}.1^{(m-nr):r} \times D^{\frac{s}{0}}.1^{(M+nR):R}}, \quad \ldots(16)$$

où

où l'indice $\frac{s}{0}$ de D, dans le second membre, indique que les factorielles sont composées d'un nombre infini de facteurs ; et l'on a, en développant,

$$\mathrm{D}^n.1^{m:r.}\times\mathrm{D}^{-n}.1^{M:R.}= \qquad \ldots\ldots(17)$$

$$\frac{r^n.m.M(m-r)(M-R)(m-2r)(M-2R)(m-3r)(M-3R)\ldots\ldots \text{ à l'infini}}{R^n.(m-nr)(M+nR)(m-nr-r)(M+nR-R)(m-nr-2r)(M+nR-2R)\ldots \text{ à l'infini}}.$$

Toutes les fois que n est un nombre entier, le premier membre donnera une expression finie de l'expression en suites infinies du second membre. On voit que dans les seconds membres de (16) n n'affecte aucun indice, mais qu'il entre seulement dans les exposans de 1 ; ainsi le développement du second membre de (16) se fait de même lorsque n devient une fraction ou une quantité irrationnelle ; donc ce second membre donne une expression en suites infinies de $\mathrm{D}^n.1^{m:r.}\times\mathrm{D}^{-n}.1^{M:R.}$, lors même que l'indice n est fractionnaire ou irrationnel, positif ou négatif.

Si $r=1$ et $R=1$, et si s est infini, on a

$$\mathrm{D}^n1^m.\mathrm{D}^{-n}1^M=\frac{\mathrm{D}^s1^m.\mathrm{D}^s1^M}{\mathrm{D}^s1^{m-n}.\mathrm{D}^s1^{M+n}}= \qquad \ldots\ldots(18)$$

$$\frac{m.M(m-1)(M-1)(m-2)(M-2)\ldots\ldots \text{ à l'infini}}{(m-n)(M+n)(m-n-1)(M+n-1)(m-n-2)(M+n-2)\ldots \text{ à l'infini}}.$$

Si de plus on fait s négatif et infini, on a ce théorème de VANDERMONDE,

$$\mathrm{D}^n1^m.\mathrm{D}^{-n}1^M=\frac{\mathrm{D}^{-s}1^m.\mathrm{D}^{-s}1^M}{\mathrm{D}^{-s}1^{m-n}.\mathrm{D}^{-s}1^{M+n}}= \qquad \ldots\ldots(19)$$

$$\frac{(m-n+1)(M+n+1)(m-n+2)(M+n+2)(m-n+3)(M+n+3)\ldots \text{ à l'infini}}{(m+1)(M+1)(m+2)(M+2)(m+3)(M+3)\ldots \text{ à l'infini}};$$

et il est facile de voir qu'en effet le dernier membre de (18) est égal au dernier membre de (19), en multipliant en croix ces deux expressions.

---

430. Appliquons à présent nos formules de dérivations aux factorielles divisées. Ces factorielles ont des propriétés qui leur sont particulières : en voici quelques-unes.

On a $$\underset{c}{\mathrm{D}}^n1^m=\underset{c}{\mathrm{D}}^{m-n}1^m. \qquad \ldots\ldots(1)$$

La démonstration se tire des développemens. En effet on a

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-n)},$$

comme on le voit en multipliant en croix.

431. $\mathrm{D}.1$ étant $= -1$, on a

$$\mathrm{D}^n.1^{m:-1.} = \mathrm{D}^{m-1}.1^{(n+1):-1.} \qquad \ldots\ldots(2)$$

C'est un corollaire du n.° 215, qu'on obtient en y faisant $a = 1$ et $r = m$.

432. Puisque $1^{(m+M):r} = 1^{m:r}.1^{M:r}$, si dans la formule du n.° 87 on fait $\alpha = 1^{M:r}$ et $a = 1^{m:r}$, on a d'une manière bien simple cette proposition :

Théorème. $$\mathrm{D}^n.1^{(m+M):r.} = \mathrm{D}^n.(1^{m:r.}.1^{M:r.}) = \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\mathrm{D}^n.1^{M:r.} + \mathrm{D}.1^{m:r.}\times\mathrm{D}^{n-1}.1^{M:r.} + \mathrm{D}^2.1^{m:r.}\times\mathrm{D}^{n-2}.1^{M:r.} + \mathrm{D}^3.1^{m:r.}\times\mathrm{D}^{n-3}.1^{M:r.} + \text{etc.}$$

Si n est positif et entier la suite se termine, et son dernier terme est $\mathrm{D}^n 1^{m:r.}$.

On peut tirer de ce théorème plusieurs conséquences remarquables.

433. Si dans (3) on fait $r = 1$ et $n = s + M$, on aura

$$\mathrm{D}^{s+M}1^{m+M} =$$

$$1^m.\mathrm{D}^{s+M}1^M + \mathrm{D}1^m.\mathrm{D}^{s+M-1}1^M + \mathrm{D}^2 1^m.\mathrm{D}^{s+M-2}1^M + \mathrm{D}^3 1^m.\mathrm{D}^{s+M-3}1^M.$$
$$+ \text{etc.} + \mathrm{D}^{m-3}1^m.\mathrm{D}^{s+3}1^M + \mathrm{D}^{m-2}1^m.\mathrm{D}^{s+2}1^M + \mathrm{D}^{m-1}1^m.\mathrm{D}^{s+1}1^M + \mathrm{D}^m 1^m.\mathrm{D}^s 1^M;$$

car $\mathrm{D}^{m+1}1^m = 0$, comme on sait : donc, puisqu'on a, n.° 430,

$$\mathrm{D}^m 1^m = 1,\ \mathrm{D}^{m-1}1^m = \mathrm{D}^1 1^m,\ \mathrm{D}^{m-2}1^m = \mathrm{D}^2 1^m,\ \text{etc.},\ \mathrm{D}^{m-k}1^m = \mathrm{D}^k 1^m,$$

la suite précédente, écrite à rebours, donne ce théorème

$$\mathrm{D}^{s+M}1^{m+M} = \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$1.\mathrm{D}^s 1^M + \mathrm{D}1^m.\mathrm{D}^{s+1}1^M + \mathrm{D}^2 1^m.\mathrm{D}^{s+2}1^M + \mathrm{D}^3 1^m.\mathrm{D}^{s+3}1^M + \mathrm{D}^4 1^m.\mathrm{D}^{s+4}1^M + \text{etc.}$$

Cette suite est aussi égale à $\mathrm{D}^{m-s}1^{m+M}$ par le n.° 430. (*)

434. On démontre aussi avec facilité le théorème suivant, auquel Lagrange parvint le premier (**), savoir :

$$1 + n^2 + \left\{\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\right\}^2 + \left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}^2 + \left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}^2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots7\,.\,5\,.\,3\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots n}2^n. \qquad \ldots\ldots(5)$$

En effet, en faisant dans la formule (3) ci-dessus $r=1$; $m=n$, $M=n$; cette formule devient

$$\mathrm{D}^n 1^{2n} = \mathrm{D}^n(1^n.1^n) = \mathrm{D}^n 1^n + \mathrm{D}1^n.\mathrm{D}^{n-1}1^n + \mathrm{D}^2 1^n.\mathrm{D}^{n-2}1^n + \mathrm{D}^3 1^n.\mathrm{D}^{n-3}1^n + \text{etc.};$$

(*) Ce théorème a été donné par Euler dans le tome V, 1.re partie des *Acta* de l'Académie de Pétersbourg, page 97. Les dérivations nous y ont conduits d'une manière fort simple.

(**) Dans le tome V. des Mélanges de l'Académie de Turin, page 177. Euler s'est depuis occupé de ce théorème dans différens endroits. Voyez les mémoires de l'Académie des sciences de Paris, année 1778, page 606, et le tome des *Acta* de Pétersbourg, que nous venons de citer.

et, puisque (n.° 430) $\mathfrak{D}^n 1^n = D^0 1^n = 1$, $\mathfrak{D}^{n-1} 1^n = D 1^n$, $\mathfrak{D}^{n-2} 1^n = \mathfrak{D}^2 1^n$, etc., on a

$$\mathfrak{D}^n 1^{2n} = 1 + (D 1^n)^2 + (\mathfrak{D}^2 1^n)^2 + (\mathfrak{D}^3 1^n)^2 + (\mathfrak{D}^4 1^n)^2 + \text{etc.} \quad \ldots.(6)$$

Le second membre de cette équation étant égal au premier membre de (5), il n'y a plus qu'à démontrer que l'on a

$$\mathfrak{D}^n 1^{2n} = 2^n \mathfrak{D}^n.1^{(2n-1):2}, \text{ ou } D^n 1^{2n} = 2^n D^n.1^{(2n-1):2}. \quad \ldots\ldots(7)$$

On y parvient facilement au moyen de ce qui précède. En effet, en faisant dans (11) du n.° 427 $r = 1$, $s = n$ et $m = 2n$, on a $D^{2n} 1^{2n} = D^n 1^{2n}.D^n 1^n$; mais

$$D^{2n} 1^{2n} = 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots 6.5.4.3.2.1 =$$
$$2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2 \times (2n-1)(2n-3)\ldots 5.3.1 = D^n.1^{2n:2} \times D^n.1^{(2n-1):2};$$

or $D^n.1^{2n:2} = 2^n D^n 1^n$, par la 1.re des formules (5) du n.° 422; donc $D^{2n} 1^{2n} = 2^n.D^n 1^n \times D^n.1^{(2n-1):2} = D^n 1^{2n}.D^n 1^n$; partant $D^n 1^{2n} = 2^n.D^n.1^{(2n-1):2}$.

Si dans l'équation (4) m et M sont fractionnaires et que n le soit dans l'équation (6), puisque m, M et n n'entrent pas dans les indices de D des seconds membres de ces équations, il s'ensuit que dans ce cas ces seconds membres seront des suites infinies égales à des dérivées à indice fractionnaire.

435. Remarquons, en passant, que, m étant entier positif, on a

$$(1 + 1.x + 1.x^2 + \text{etc.} + 1.x^l)^m = (1.x^l + 1.x^{l-1} + \text{etc.} + 1.x + 1)^m;$$

et les développemens des deux membres renfermeront les mêmes puissances de x, l'un dans l'ordre ascendant, l'autre dans l'ordre inverse; donc, puisque ces deux développemens doivent être égaux entre eux, quel que soit x, il faut que les coëfficiens des mêmes puissances de x y soient égaux entre eux. Or, dans la supposition de $D.1$, $\mathfrak{D}^2.1$, etc. $\mathfrak{D}^l.1 = 1$, et $\mathfrak{D}^{l+1}.1$, $\mathfrak{D}^{l+2}.1$, etc. $= 0$, le coëfficient de x^p sera $\mathfrak{D}^p.1^m$ dans le premier développement, et dans le second, il sera $\mathfrak{D}^{lm-p}.1^m$, comme il est aisé de le voir (n.° 83). Donc on a ici $\mathfrak{D}^p.1^m = \mathfrak{D}^{lm-p}.1^m$. C'est une extension de la propriété du n.° 430.

A présent, si dans la supposition de $D.1$, $\mathfrak{D}^2.1$, etc., $\mathfrak{D}^l.1 = 1$, on met 1^M au lieu de α et 1^m au lieu de a dans la formule du n.° 87, on trouvera, comme n.° 433, que dans cette supposition on a aussi

$$\mathfrak{D}^{s+lm}.1^{m+M} = \mathfrak{D}^{lM-s}.1^{m+M} = \quad \ldots\ldots(8)$$
$$1.\mathfrak{D}^s.1^M + D.1^m.\mathfrak{D}^{s+1}.1^M + \mathfrak{D}^2.1^m.\mathfrak{D}^{s+2}.1^M + \mathfrak{D}^3.1^m.\mathfrak{D}^{s+3}.1^M + \text{etc.},$$

et, en mettant dans le n.° 87 1^n et 1^n au lieu de α et a, on trouvera encore, comme n.° 434, qu'on a dans la supposition actuelle

$$\mathfrak{D}^{ln}.1^{2n} = 1 + (D.1^n)^2 + (\mathfrak{D}^2.1^n)^2 + (\mathfrak{D}^3.1^n)^2 + (\mathfrak{D}^4.1^n)^2 + \text{etc.} \quad \ldots.(9)$$

Ainsi les propriétés observées dans les numéros cités pour les binomes, s'étendent aux polynomes de la forme ci-dessus. Elles ont même encore lieu lorsque m, M et n deviennent fractionnaires. Ces propositions appartiennent à EULER : voyez le tome V, 2[de] partie, des *Acta* de Pétersbourg. Les dérivations, comme on voit, en rendent la démonstration fort simple.

Après cette digression, revenons aux factorielles.

436. Si l'on met $1^{q:r}$ au lieu de α, et $1^{p:r}$ au lieu de a, dans la formule du n.° 95, $\mathrm{D}.1$ étant $= r$, on en tire sur-le-champ

$$\mathrm{D}^n.1^{(p+q):r} = \quad \ldots\ldots(10)$$
$$\mathrm{D}^n.1^{q:r} + \mathrm{D}1^n.\mathrm{D}.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{n-1}.1^{q:r} + \mathrm{D}^2 1^n.\mathrm{D}^2.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{n-2}.1^{q:r} + \mathrm{D}^3 1^n.\mathrm{D}^3.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{n-3}.1^{q:r} + \text{etc.}$$

Cette formule donne la conversion de la factorielle du binome en une suite de factorielles de monomes : elle est aux factorielles ce que la formule ordinaire du binome est aux puissances. Nous y sommes arrivés d'une manière bien simple et sans induction.

Elle suit aussi de (3) du n.° 432.

457. Je mets $M + nr$ au lieu de q, et je multiplie tout par $\mathrm{D}^{-n}.1^{M:r}$; j'ai

$$\mathrm{D}^n.1^{(p+M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r} =$$
$$\mathrm{D}^n.1^{(M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r} + \mathrm{D}1^n.\mathrm{D}.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{n-1}.1^{(M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r}$$
$$+ \mathrm{D}^2 1^n.\mathrm{D}^2.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{n-2}.1^{(M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r} + \text{etc.}$$

Mais on a $\mathrm{D}^{n-k}.1^{(M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r} = \mathrm{D}^{-k}.1^{M:r}$; c'est ce qui résulte de (11) du n.° 427 si l'on y met $-n$, $n-k$, M au lieu de n, s et m. Ainsi la formule qu'on vient de trouver, se réduit à celle du théorème suivant de VANDERMONDE, important dans la théorie des factorielles, parce qu'il sert à les lier aux intégrales définies.

THÉORÈME. $\mathrm{D}^n.1^{(p+M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r} = \quad \ldots\ldots(11)$

$$1 + \mathrm{D}1^n.\mathrm{D}.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{-1}.1^{M:r} + \mathrm{D}^2 1^n.\mathrm{D}^2.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{-2}.1^{M:r} + \mathrm{D}^3 1^n.\mathrm{D}^3.1^{p:r} \times \mathrm{D}^{-3}.1^{M:r} + \text{etc.}$$

Puisque n, p, M n'entrent pas dans les indices du second membre, celui-ci donnera la valeur de $\mathrm{D}^n 1^{(p+M+nr):r} \times \mathrm{D}^{-n}.1^{M:r}$, quels que soient n, p et M, entiers, fractionnaires, irrationnels, positifs ou négatifs.

En comparant avec (16) et (17) du n.° 429, où l'on fera $R = r$, et $m = p + M + nr$, on aura deux expressions de la même quantité factorielle

D^n.

$D^n . 1^{m:r} \times D^{-n} . 1^{M:r}$ l'une par une suite, l'autre par le quotient de deux factorielles qui se continuent à l'infini ; ce qui donne le moyen de convertir des suites finies ou infinies en produits continus.

On peut modifier la forme de ce théorème de différentes manières ; on peut, par exemple, changer $D^{-n} . 1^{M:r}$ en $\frac{1}{D^n . 1^{(M+nr):r}}$ (n.° 428), et alors la suite donnera la valeur de $\frac{D^n . 1^{(p+M+nr):r}}{D^n . 1^{(M+nr):r}}$: on peut exécuter la même chose sur (16) du n.° 429.

438. Si dans (11) du n.° précédent on change entre eux n et $p:r$, le second membre demeure le même ; donc on a

$$D^n . 1^{(p+M+nr):r} \times D^{-n} . 1^{M:r} = D^{p:r} . 1^{(p+M+nr):r} \times D^{-p:r} . 1^{M:r},$$

ce qui donne une transformation d'indices assez remarquable.

Du n.° 427 on peut aussi déduire la formule

$$\frac{D^n . 1^{(m-sr):r}}{D^n . 1^{m:r}} = \frac{D^s . 1^{(m-nr):r}}{D^s . 1^{m:r}},$$

en égalant entre eux les seconds membres de (11) et de (12). La formule du n.° 431 n'est qu'un cas particulier de celle-ci ; on l'obtient en faisant $r = -1$, $m = -1$, $s = m - 1$.

Ces formules donnent le moyen d'avoir les valeurs des premiers membres, lorsque l'indice n est fractionnaire, pourvu que dans la première $p:r$ soit un nombre entier et que s le soit dans la seconde.

---

439. Quoique les applications qu'on peut faire de cette théorie des factorielles soient ce qu'elle présente de plus intéressant, je ne pourrai m'en occuper que pour en donner une idée.

Soit proposé de ramener aux factorielles l'intégrale $rm\int x^{rm-1}(1-x^r)^n dx$, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

Je développe $(1-x^r)^n$, et l'expression précédente devient

$$rm\int x^{rm-1}\{1 - D1^n . x^r + D^2 1^n . x^{2r} - D^3 1^n . x^{3r} + \text{etc.}\} dx,$$

ou bien

$$rm\int x^{rm-1} dx - D1^n . rm\int x^{rm+r-1} dx + D^2 1^n . rm\int x^{rm+2r-1} dx$$
$$- D^3 1^n . rm\int x^{rm+3r-1} dx + \text{etc.};$$

en exécutant l'intégration, on trouve

$$x^{rm} - D1^n . \frac{m}{m+1} x^{rm+r} + D^2 1^n . \frac{m}{m+2} x^{rm+2r} - D^3 1^n . \frac{m}{m+3} x^{rm+3r} + \text{etc.}$$

Cette intégrale, étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, se réduit à

$$1 - D 1^n . \frac{m}{m+1} + D^2 1^n . \frac{m}{m+2} - D^3 1^n . \frac{m}{m+3} + \text{etc.} \qquad \ldots (12)$$

Or cette expression est évidemment égale à

$$1 + D 1^n . D 1^{-m} . D^{-1} 1^m + D^2 1^n . D^2 1^{-m} . D^{-2} 1^m + D^3 1^n . D^3 1^{-m} . D^{-3} 1^m + \text{etc.} \qquad \ldots (13)$$

Comparant à la formule (11) en y faisant $r = 1$, $p = -m$, $M = m$, elle donne pour la série (13) l'expression $D^n 1^n . D^{-n} 1^m$; et la formule (19) du n.° 429 donnera pour cette expression une fraction de factorielles d'un nombre infini de facteurs. Ainsi

$$rm \int x^{rm-1} (1 - x^r)^n dx, \text{ [depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1] = \qquad \ldots (14)$$

$$D^n 1^n . D^{-n} 1^m = \frac{1(m+n+1)2(m+n+2)3(m+n+3)4(m+n+4)\ldots\ldots}{(n+1)(m+1)(n+2)(m+2)(n+3)(m+3)(n+4)(m+4)\ldots\ldots}$$

440. Voici un exemple où l'indice n de D est une fraction.

Soit 1 le rayon du cercle, x l'abscisse comptée du centre; on sait que la surface est $= \int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$; et en prenant l'intégrale de $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, cette intégrale est égale au quart de la surface du cercle; je désigne ce quart par $\frac{1}{4}\pi$. Comparant $\int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ avec $rm \int x^{rm-1} (1 - x^r)^n dx$, on a $r = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $rm - 1 = 0$, donc $m = \frac{1}{2}$; mettant ces valeurs dans (13) et (14), on trouve

$$\frac{1}{4}\pi = D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} . D^{-\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = \frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots.},$$

ce qui est l'expression connue de WALLIS.

A cause que, n.° 427, $D^{-\frac{1}{2}+1} 1^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} . D^1 1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, ou $D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}}$, on a aussi

$$\frac{1}{4}\pi = \{D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}}\}^2, \text{ et } D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

π étant la surface du cercle dont le rayon $= 1$.

Je ne m'étendrai pas davantage : je n'ai voulu qu'indiquer l'usage qu'on peut faire des dérivées à indice fractionnaire et reveiller par là l'attention sur les différentielles à indice fractionnaire, sujet qui a été peu cultivé jusqu'à présent. (*)

(*) On trouve sur les différentielles à indice fractionnaire une remarque de LEIBNIZ à la fin de sa lettre à JEAN BERNOULLI, du 28 décembre 1695, *Commercium epistolicum*, tome 1.er, page 107, et une remarque d'EULER dans le tome V des anciens Commentaires de Pétersbourg, page 56; c'est à-peu-près tout ce que je connois sur cette matière.

(III.)

De la méthode directe et inverse des différences, et de la transformation, sommation et interpolation des suites.

441. On peut apporter de grandes simplifications à la méthode des différences par la séparation des échelles et par l'application des formules de dérivation. Nous allons le faire voir succinctement, et montrer qu'on obtient ainsi avec la plus grande facilité les théorèmes généraux de cette méthode, et que ces moyens sont très-propres à l'enrichir et à l'étendre à de nouvelles recherches.

442. Commençons par fixer la signification d'une notation qui nous devient nécessaire.

u ou ϕx étant une fonction quelconque de x, on a coutume de désigner par u', u'', u''', etc. $u^{(n)}$, ou par $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, etc., $u^{(n)}$, les valeurs ou les états successifs de u ou de ϕx, lorsque x y devient successivement $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$, etc., $x+n\Delta x$, et même les états successifs de u lorsque x varie par des accroissemens quelconques inégaux entre eux. On désigne aussi ces états successifs de u par des indices inférieurs, de cette manière : u, $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$, $u_{\prime\prime\prime}$, etc., u_{n}, ou de celle-ci : u, u_1, u_2, u_3, etc, u_n; et les états antérieurs à l'état primitif u sont alors indiqués par $u_{-\prime}$, $u_{-\prime\prime}$, $u_{-\prime\prime\prime}$, etc. u_{-n}, ou bien par u_{-1}, u_{-2}, u_{-3}, etc., u_{-n}, etc. Nous emploirons ces notations; mais nous désignerons plus souvent ces *États* successifs par $\mathrm{E}u$, E^2u, E^3u, etc., E^nu, etc.; de sorte que $\mathrm{E}u=u_1$, $\mathrm{E}^2u=u_2$, etc., $\mathrm{E}^nu=u_n$, $\mathrm{E}^{-n}u=u_{-n}$, $\mathrm{E}^0u=u$; et si x croît uniformément, on aura $\mathrm{E}^0\phi x=\phi x$, $\mathrm{E}\phi x=\phi(x+\Delta x)$, $\mathrm{E}^2\phi x=\phi(x+2\Delta x)$, etc., $\mathrm{E}^n\phi x=\phi(x+n\Delta x)$, $\mathrm{E}^{-1}\phi x=(\phi x-\Delta x)$, $\mathrm{E}^{-2}\phi x=\phi(x-2\Delta x)$, etc., $\mathrm{E}^{-n}\phi x=\phi(x-n\Delta x)$. On peut désigner de même les valeurs successives de la variable x, par E^0x, $\mathrm{E}x$, E^2x, etc., E^nx.

En se servant ainsi de la caractéristique E, on a l'avantage de pouvoir la séparer des quantités qu'elle affecte, et la faire entrer dans les échelles détachées des fonctions.

443. Soit que x croisse uniformément ou non, on a $\mathrm{E}\phi x=\phi(x+\Delta x)=\phi x+\Delta\phi x$; donc, en détachant les échelles, on a

$$\mathrm{E}=1+\Delta, \qquad \text{et } \Delta=\mathrm{E}-1, \qquad \ldots\ldots(1)$$

partant $$E^m = (1+\Delta)^m, \quad E^{-m} = (1+\Delta)^{-m},$$
$$\Delta^m = (E-1)^m, \quad \Delta^{-m} = \Sigma^m = (E-1)^{-m}.$$

Si $\Delta x = \xi$ est constante, on a (n.° 404) $E = e^{\xi\partial} = e^{\Delta x.\partial}$; et si l'on fait $dx = \Delta x$ (n.° 352), on aura $E = e^{d}$; donc, si Δx est constante, on a

$$d = \Delta x.\partial = \log E = \log(1+\Delta), \qquad \ldots\ldots(2)$$

c'est-à-dire que la différentielle est alors égale au logarithme de l'état varié; et l'on a $d^n = (\log E)^n$.

444. Si l'on a la fonction $\varphi(x,y)$ de deux variables x et y, ces variables étant indépendantes, ou l'une et l'autre fonction d'une même variable t, on désignera par $E^{1,}$ l'état varié de $\varphi(x,y)$ lorsque x seul y a varié de Δx; par $E^{,1}$ l'état varié de $\varphi(x,y)$ lorsque y seul y a augmenté de Δy; et par E l'état varié de la fonction lorsque x et y y sont devenus à la fois $x+\Delta x$, et $y+\Delta y$, de sorte que

$$E^{1,}\varphi(x,y) = \varphi(x+\Delta x,y), \quad E^{,1}\varphi(x,y) = \varphi(x,y+\Delta y),$$
$$E\varphi(x,y) = \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) = E^{1,}E^{,1}\varphi(x,y);$$

et en détachant les échelles, on a

$$E^{1,} = 1 + \Delta^{1,}, \quad \text{et } E^{,1} = 1 + \Delta^{,1},$$
$$E = 1 + \Delta = (1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1}) = E^{1,}E^{,1}. \qquad \ldots\ldots(3)$$

Puisque $\Delta = \Delta^{1,} + \Delta'^{1} + \Delta^{1,}\Delta^{,1} = \Delta^{1,} + \Delta^{,1}(1+\Delta^{1,}) = \Delta^{,1} + \Delta^{1,}(1+\Delta^{,1})$, il s'ensuit que

$$\Delta = \Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,}, \quad \text{ou } \Delta = \Delta^{,1} + \Delta^{1,}E^{,1}; \qquad \ldots\ldots(4)$$

et en appliquant l'une de ces équations à échelles à $\varphi(x,y)$, on a

$$\Delta\varphi(x,y) = \Delta^{1,}\varphi(x,y) + \Delta^{,1}\varphi(x+\Delta x,y).$$

On tire aussi des équations (4)

$$\Delta^m = (\Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,})^m, \quad \Delta^m = (\Delta^{,1} + \Delta^{1,}E^{,1})^m,$$
$$\Sigma^m = \Delta^{-m} = (\Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,})^{-m}, \quad \Sigma^m = (\Delta^{,1} + \Delta^{1,}E^{,1})^{-m}.$$

Les équations (4) sont très-importantes; elles rapprochent le calcul des différences de celui des différentielles.

Soit $u = \varphi(x,y,z)$, les variables x, y, et z étant indépendantes ou chacune fonction d'une même variable t; si l'on désigne encore par $E^{,,1}$ l'état varié de u lorsque z y est devenu $z+\Delta z$, on aura pareillement

$$E^{1,} = 1 + \Delta^{1,}, \quad E^{,1} = 1 + \Delta^{,1}, \quad E^{,,1} = 1 + \Delta^{,,1},$$
$$E = E^{1,}E^{,1}E^{,,1} = (1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})(1+\Delta^{,,1}). \qquad \ldots\ldots(5)$$

De

De là on tire $E = (1 + \Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,})(1 + \Delta^{,,1}) = 1 + \Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,} + \Delta^{,,1}E^{1,} + \Delta^{,1}\Delta^{,,1}E^{1,}$; donc, en ôtant l'unité de part et d'autre,

$$\Delta = \Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,} + \Delta^{,,1}E^{1,}E^{,1}\,; \qquad \ldots\ldots(6)$$

et, comme $\Delta^{1,}$, $\Delta^{,1}$, $\Delta^{,,1}$ entrent de la même manière dans Δ, on a aussi

$$\Delta = \Delta^{,1} + \Delta^{1,}E^{,1} + \Delta^{,,1}E^{1,}E^{,1}, \quad \Delta = \Delta^{,,1} + \Delta^{1,}E^{,,1} + \Delta^{,1}E^{,,1}E^{1,}.$$

On trouveroit des formules pareilles pour quatre variables, et ainsi de suite.

445. On peut à présent prendre une fonction quelconque f des échelles dans les équations précédentes, et l'on aura

$$fE \times \varphi x = f(1 + \Delta) \times \varphi x, \qquad \ldots(\mathfrak{A})$$

$$fE \times \varphi(x,y) = f(E^{1,}E^{,1}) \times \varphi(x,y) = f[(1 + \Delta^{1,})(1 + \Delta^{,1})] \times \varphi(x,y), \qquad \ldots(\mathfrak{B})$$

$$f\Delta \times \varphi(x,y) = f(\Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,}) \times \varphi(x,y), \qquad \ldots(\mathfrak{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} fE \times \varphi(x,y,z) = f(E^{1,}E^{,1}E^{,,1}) \times \varphi(x,y,z) = \\ f[(1 + \Delta^{1,})(1 + \Delta^{,1})(1 + \Delta^{,,1})] \times \varphi(x,y,z), \end{array}\right\} \qquad \ldots(\mathfrak{D})$$

$$f\Delta \times \varphi(x,y,z) = f(\Delta^{1,} + \Delta^{,1}E^{1,} + \Delta^{,,1}E^{,1}E^{1,}) \times \varphi(x,y,z). \qquad \ldots(\mathfrak{E})$$

Ces théorèmes, dont on pourroit augmenter le nombre, sont vrais, que les variables x, y et z croissent uniformément ou non uniformément; et sous ce rapport ils sont plus généraux que leurs analogues (E) et (N) des n.os 405 et 409. On développera séparément les échelles, en observant que f n'affecte qu'elles et jamais les fonctions séparées par le signe $\times$; puis on multipliera par les fonctions. On observera aussi que $\Delta^{,1}E^{1,} \times \varphi(x,y)$, par exemple, $= \Delta^{,1}\varphi(x + \Delta x, y) = \Delta^{,1}u_{1,0}$, si $u = \varphi(x,y)$; que $\Delta^{,s}E^{r,}E^{,s} \times u = \Delta^{,s}u_{r,s}$.

446. Donnons quelques développemens résultant des équations précédentes.

On a, n.° 443, $E^n \times u = (1 + \Delta)^n \times u$, u étant $= \varphi x$; en développant l'échelle du second membre, on trouve

$$E^n u = \left(1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 + \text{etc.}\right) \times u,$$

ce qui donne

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 u + \text{etc.} \qquad \ldots(7)$$

Cette formule se termine si n est un nombre entier positif; si n est fractionnaire, elle ne se termine plus, et alors on s'en sert pour les interpolations.

En procédant de même à l'égard de la formule $\mathrm{E}^{-n} \times u = (1 + \Delta)^{-n} \times u$, et en employant nos notations de factorielles, on a

$$u_{-n} = u + \mathrm{D}1^{-n}.\Delta u + \mathrm{D}^2 1^{-n}.\Delta^2 u + \mathrm{D}^3 1^{-n}.\Delta^3 u + \text{etc.} \quad \ldots(8)$$

447. La formule $\Delta^n u = (\mathrm{E} - 1)^n \times u$ donne

$$\Delta^n u = \mathrm{E}^n u - n\mathrm{E}^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\mathrm{E}^{n-2} u - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{E}^{n-3} u + \text{etc.}\,; \quad \ldots(9)$$

c'est la formule connue pour exprimer la différence d'un ordre quelconque par les états variés de la fonction.

Si l'on fait n négatif, on a $\Delta^{-n} u = (\mathrm{E} - 1)^{-n} \times u$; partant

$$\Sigma^n u = \mathrm{E}^{-n} u + n\mathrm{E}^{-n-1} u + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\mathrm{E}^{-n-2} u + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{E}^{-n-3} u + \text{etc.} \quad \ldots(10)$$

C'est l'intégrale de l'ordre n en états variés de u qui précèdent l'état initial u.

Si l'on fait $n = 1$ et Δx constante, cette formule devient

$$\Sigma\phi x = \phi(x - \Delta x) + \phi(x - 2\Delta x) + \phi(x - 3\Delta x) + \text{etc.} \quad \ldots(11)$$

Nous ne dirons rien sur la manière de compléter les intégrales aux différences; on sait qu'il faut ajouter une constante arbitraire à chaque intégration, et que cette constante peut même être regardée en général comme une fonction arbitraire, continue ou discontinue; par exemple, si Δx est constante et $= a$, il faut ajouter à $\Sigma\phi x$ la fonction arbitraire $\psi\left(\sin\frac{\pi x}{a},\ \cos\frac{\pi x}{a}\right)$, π étant le rapport de la circonférence au rayon. (*)

Si dans les formules ci-dessus on écrit $(-1)^n(1 - \mathrm{E})^n$ au lieu de $(\mathrm{E} - 1)^n$, et qu'on commence le développement par 1; on aura ces deux autres formules:

$$\Delta^n u = (-1)^n\left\{u - n\mathrm{E}u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\mathrm{E}^2 u - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{E}^3 u + \text{etc.}\right\} \quad \ldots(12)$$

$$\Sigma^n u = (-1)^{-n}\left\{u + n\mathrm{E}u + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\mathrm{E}^2 u + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{E}^3 u + \text{etc.}\right\}. \quad \ldots(13)$$

Ainsi l'on a, en faisant $n = 1$ et Δx constante,

$$\Sigma\phi x = -\left\{\phi x + \phi(x + \Delta x) + \phi(x + 2\Delta x) + \phi(x + 3\Delta x) + \text{etc.}\right\}. \quad \ldots(14)$$

La sorte de paradoxe que présentent les deux valeurs (11) et (14) de $\Sigma\phi x$ comparées entre elles, n'est pas difficile à résoudre; ainsi je ne m'y arrêterai point.

(*) On peut voir sur la manière de compléter ces sortes d'intégrales un mémoire d'EULER dans le tome III des nouveaux Commentaires de Pétersboorg, intitulé *de determinatione serierum*; LAPLACE, Mémoires présentés, etc., tome VII, page 73; un mémoire de MONGE *sur les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales aux différences finies*, Mémoires présentés, tome IX.

Si l'on fait $\Delta x = 1$, dans le cas de x entier, la formule (11) devient

$$\Sigma\phi x = \quad \ldots\ldots(15)$$
$$\phi(x-1)+\phi(x-2)+\phi(x-3)+\text{etc.}+\phi(1)+\phi(0)+\phi(-1)+\phi(-2)+\text{etc.}$$

Si donc on suppose que x soit le quantième du terme d'une suite, ϕx son terme général; et si l'on suppose que la suite ne se continue pas au-delà de $\phi(0)$, qui répond au quantième zéro, $\phi(0)$ étant une constante; où si l'on fait $\phi(0) + \phi(-1) + \phi(-2) + \text{etc.}$ égale à la constante $-C$, on aura l'expression

$$\Sigma\phi x + C = \phi(x-1) + \phi(x-2) + \phi(x-3) + \text{etc.} + \phi(1); \quad \ldots(16)$$

c'est la somme des termes de la suite depuis celui qui répond au quantième 1 jusqu'à celui qui répond au quantième $x-1$ inclusivement. Si l'on veut que le terme ϕx qui répond au quantième x soit compris dans la somme, comme cela se pratique dans la sommation des suites, on aura $\Sigma\phi(x+1) + C$ égale à cette somme; et l'on déterminera C par la condition que tout doit s'évanouir quand on fait $x = 0$. On voit par là que $\Sigma E\phi x + C = \phi x + \Sigma\phi x + C$.

On a $\Delta^n E^r u = (E-1)^n E^r \times u$; donc

$$\Delta^n u_r = E^{n+r}u - nE^{n+r-1}u + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}E^{n+r-2}u - \text{etc.}, \quad \ldots(17)$$

et, en changeant n en $-n$,

$$\Sigma^n u_r = E^{r-n}u + nE^{r-n-1}u + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}E^{r-n-2}u + \text{etc.} \quad \ldots(18)$$

Remarquons en passant que la séparation des échelles, comme nous la pratiquons, présente un procédé plus simple et en même temps plus sûr que celui qui consiste à considérer les indices 0, 1, 2, etc. de $\Delta^0 u$, $\Delta^1 u$, $\Delta^2 u$, etc., et ceux des états successifs $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, etc. comme des exposans de puissances dans les développemens, et à changer, après les développemens réduits, ces exposans en indices; car on pourroit se tromper sur le moment où le changement doit se faire. Ainsi il est arrivé (*) qu'en suivant ce dernier procédé pour le développement de $\Delta^{-1}u = (u^{(1)} - u^{(0)})^{-1}$, on a eu $\Delta^{-1}u = u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} + \text{etc.}$, qu'on a fait $= \frac{1}{u^1} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} + \text{etc.}$; puis, en convertissant les exposans de u en indices, on en a conclu

$$\Sigma u = \frac{1}{u^{(1)}} + \frac{1}{u^{(2)}} + \frac{1}{u^{(3)}} + \text{etc.} =$$
$$\frac{1}{u+\Delta u} + \frac{1}{u+2\Delta u+\Delta^2 u} + \frac{1}{u+3\Delta u+3\Delta^2 u+\Delta^3 u} + \text{etc.},$$

(*) Mémoires de l'Académie de Turin, pour 1786 et 1787, page 452.

résultat erronné. Il falloit faire la conversion des exposans en indices dans l'expression $u^{-1}+u^{-2}+u^{-3}+$ etc., et l'on auroit eu $\Delta^{-1}u = u_{(-1)} + u_{(-2)} + u_{(-3)} +$ etc., ce qui est vrai. Par la séparation de l'échelle on a $\Delta^{-1}u = (\mathrm{E}-1)^{-1}\times u$, et, en développant, $\Delta^{-1}u = (\mathrm{E}^{-1}+\mathrm{E}^{-2}+\mathrm{E}^{-3}+\text{etc.})\times u = (\frac{1}{\mathrm{E}}+\frac{1}{\mathrm{E}^2}+\frac{1}{\mathrm{E}^3}+\text{etc.})\times u$; mais, comme il faut exécuter une multiplication par u, on aura $\Delta^{-1}u = \frac{u}{\mathrm{E}}+\frac{u}{\mathrm{E}^2}+\frac{u}{\mathrm{E}^3}+\text{etc.} = \mathrm{E}^{-1}u+\mathrm{E}^{-2}u + \mathrm{E}^{-3}u+\text{etc.}$, et non $\Delta^{-1}u = \frac{1}{\mathrm{E}u}+\frac{1}{\mathrm{E}^2u}+\frac{1}{\mathrm{E}^3u}+\text{etc.}$; car, pour arriver à ce dernier résultat, il faudroit qu'on eût à diviser chaque terme par u.

448. Quelle que soit Δx, on demande la valeur de la suite $u+u_1+u_2+u_3+\text{etc.}+u_n = u+\mathrm{E}u+\mathrm{E}^2u+\mathrm{E}^3u+\text{etc.}+\mathrm{E}^n u$ en différences Δu, $\Delta^2 u$, etc.; u étant une fonction quelconque de x.

En détachant l'échelle, la suite proposée prend cette forme

$$(1+\mathrm{E}+\mathrm{E}^2+\mathrm{E}^3+\text{etc.}+\mathrm{E}^n)\times u = \left\{\frac{1-\mathrm{E}^{n-1}}{1-\mathrm{E}}\right\}\times u.$$

Or, en mettant $1+\Delta$ au lieu de E, ce second membre devient

$$\left\{\frac{1-(1+\Delta)^{n+1}}{-\Delta}\right\}\times u = \left\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}\Delta+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^2+\text{etc.}\right\}\times u.$$

Donc, u étant $=\varphi x$, on a pour la suite de $n+1$ états successifs de u,

$$u+u_1+u_2+u_3+\text{etc.}+u_n = \quad \ldots\ldots(19)$$

$$(n+1)u+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}\Delta u+\frac{(n+1)\,n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^2 u+\frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Si la suite $u+\mathrm{E}u+\mathrm{E}^2u+$ etc. ne se termine pas, sa somme sera

$$=(\frac{1}{1-\mathrm{E}})\times u = \frac{1}{-\Delta}\times u = -\Delta^{-1}u = -\Sigma u.$$

Puisque la suite $u+\mathrm{E}\,u+\mathrm{E}^2\,u+\text{etc.}+\mathrm{E}^n u$ représente en général une suite quelconque terminée, u étant une fonction qui en donne un terme quelconque; la formule (19) sert à trouver les sommes des suites au moyen des différences de u : elle se termine d'elle-même si n est entier positif.

Pour donner un exemple, supposons qu'on demande la somme des cubes x^3, $(x+r)^3$, $(x+2r)^3$, $(x+3r)^3$, etc. $(x+nr)^3$. Dans ce cas $u=x^3$, $\Delta x = r$, $\Delta u = 3x^2r+3xr^2+r^3$, $\Delta^2 u = 6xr^2+6r^3$, $\Delta^3 u = 6r^3$, $\Delta^4 u$, $\Delta^5 u$, $\Delta^6 u$, etc. $=0$; de sorte que la somme cherchée sera, par la formule (19),

$(n+1)x^3$

$$(n+1)x^3 + \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}(3x^2r + 3xr^2 + r^3) + \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}(6xr^2 + 6r^3)$$
$$+ \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}6r^3.$$

Comparez la suite (19) avec la formule (7) ci-dessus, n.° 446.

449. On aura de la même manière

$$u - \Delta u + \Delta^2 u - \Delta^3 u + \text{etc.} \pm \Delta^n u = \qquad \ldots\ldots(20)$$
$$(n+1)u - \frac{(n+1)}{1\,.\,2}\,\mathrm{E}u + \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\mathrm{E}^2u - \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\mathrm{E}^3u$$
$$+ \text{etc.} \pm (n+1)\mathrm{E}^n u \mp \mathrm{E}^{n+1}u,$$

les signes supérieurs étant pour n pair et les inférieurs pour n impair.

En effet, en détachant l'échelle, le premier membre peut être mis sous la forme $\left\{\frac{1-(-\Delta)^{n+1}}{1+\Delta}\right\}\times u$; or, en mettant au lieu de $-\Delta$ sa valeur $1 - \mathrm{E}$, cette expression devient $\left\{\frac{1-(1-\mathrm{E})^{n+1}}{\mathrm{E}}\right\}\times u$, qu'il suffit de développer pour avoir le théorème (20).

Si on prend la différence, non en soustrayant l'état proposé u de l'état varié u_1, mais l'état varié u_1 de l'état proposé, et qu'on désigne cette différence par ${}_1\Delta u$, on aura ${}_1\Delta u = u - \mathrm{E}u$, ${}_1\Delta^2 u = u - 2\,\mathrm{E}u + \mathrm{E}^2u$, ${}_1\Delta^3 u = u - 3\,\mathrm{E}u + 3\,\mathrm{E}^2u - \mathrm{E}^3u$, etc., ${}_1\Delta = -\Delta$, et généralement ${}_1\Delta^n = (1-\mathrm{E})^n = (-\Delta)^n = (-1)^n\Delta^n$; de sorte que le second membre de (20) est aussi égal à la suite

$$u + {}_1\Delta u + {}_1\Delta^2 u + {}_1\Delta^3 u + \text{etc.} + {}_1\Delta^n u.$$

On trouve pareillement

$$u - \Sigma u + \Sigma^2 u - \Sigma^3 u + \text{etc.} \pm \Sigma^n u = \qquad \ldots\ldots(21)$$
$$(n+1)u + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\,\mathrm{E}u + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\mathrm{E}^2u + \frac{n\ldots(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\mathrm{E}^3u + \text{etc.}$$

En effet, en détachant l'échelle, le premier membre peut prendre la forme $\left\{\frac{1-(-\Delta^{-1})^{n+1}}{1+\Delta^{-1}}\right\}\times u$, qui devient $\left\{\frac{\Delta+(-\Delta)^{-n}}{1+\Delta}\right\}\times u = \left\{\frac{\mathrm{E}-1+(1-\mathrm{E})^{-n}}{\mathrm{E}}\right\}\times u$; et, en développant, on a le théorème (21). La série se termine avec le terme affecté de $\mathrm{E}^r u$, si l'on suppose $\mathrm{E}^r u$ un dernier terme.

450. On trouve aussi bien simplement, au moyen de nos notations, les règles pour prendre la différence et l'intégrale-somme d'un ordre quelconque des quantités factorielles, comme on va le voir.

Soit Δx constante et $= r$, en exprimant par $\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r}$, n.° 423, la factorielle divisée $\dfrac{x(x-r)(x-2r)\ldots\ldots(x-nr+r)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots n}$, on aura

$$\Delta\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r} = r\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r}; \qquad \ldots\ldots(22)$$

car $\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r} = \dfrac{x-nr+r}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r} = \dfrac{x+r}{n}\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r} - r\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r} =$ $\mathfrak{D}^{n}.1^{(x+r):r} - r\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r}$. Donc $\mathfrak{D}^{n}.1^{(x+r):r} - \mathfrak{D}^{n}.1^{x:r} = r\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r}$. Or le premier membre de cette dernière équation est $= \Delta\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r}$, si x varie de r par rapport à Δ et 1 de r par rapport à D; ce qui donne le théorème (22).

De plus, $\Delta^{2}\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r} = r\Delta\mathfrak{D}^{n-1}.1^{x:r} = r^{2}\mathfrak{D}^{n-2}.1^{x:r}$, partant

$$\Delta^{m}\mathfrak{D}^{n}.1^{x:r} = r^{m}\mathfrak{D}^{n-m}.1^{x:r}. \qquad \ldots\ldots(23)$$

En multipliant par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n$, il vient

$$\Delta^{m}\mathrm{D}^{n}.1^{x:r} = \mathrm{D}^{m}1^{n}.r^{m}.\mathrm{D}^{n-m}.1^{x:r}; \qquad \ldots\ldots(24)$$

et si dans cette équation on change m en $-m$, on a

$$\Sigma^{m}\mathrm{D}^{n}.1^{x:r} = \mathrm{D}^{-m}1^{n}.r^{-m}\mathrm{D}^{n+m}.1^{x:r} \qquad \ldots\ldots(25)$$

ou bien (n.° 428) $\Sigma^{m}\mathrm{D}^{n}.1^{x:r} = \dfrac{\mathrm{D}^{n+m}.1^{x:r}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m).\,r^{m}}$.

Si dans (24) et (25) on fait n négatif, on a aussi

$$\Delta^{m}\mathrm{D}^{-n}.1^{x:r} = \mathrm{D}^{m}1^{-n}.r^{m}.\mathrm{D}^{-n-m}.1^{x:r}, \qquad \ldots\ldots(26)$$

$$\Sigma^{m}\mathrm{D}^{-n}.1^{x:r} = \mathrm{D}^{-m}1^{-n}.r^{-m}\mathrm{D}^{-n+m}.1^{x:r}. \qquad \ldots\ldots(27)$$

Ces deux dernières formules contiennent les règles pour prendre les différences et les intégrales des quantités de la forme $\dfrac{1}{(x+r)(x+2r)(x+3r)\ldots(x+nr)}$.

Pour ne pas avoir dans les factorielles de différences négatives, de l'espèce de celles dont nous avons parlé au n.° 449, et que nous avons désignées par ${}_{1}\Delta$; il ne faut jamais faire r négatif dans les notations par lesquelles nous représentons les factorielles. Si donc on a la factorielle $x(x+r)(x+2r)(x+3r)$ $\ldots\ldots\ldots(x+nr-r)$, on ne la représentera pas par $\mathrm{D}^{n}.1^{x:-r}$, mais par $\mathrm{D}^{n}.1^{(x+nr-r):r}$; et l'on aura, comme précédemment,

$$\Delta\mathrm{D}^{n}.1^{(x+nr-r):r} = nr\mathrm{D}^{n-1}.1^{(x+nr-r):r} =$$
$$nr(x+r)(x+2r)(x+3r)\ldots(x+nr-r);$$

ce qui est en effet la différence de $x(x+r)(x+2r)\ldots(x+nr-r)$, que l'on obtient en mettant $x+r$ au lieu de x et en soustrayant l'état proposé de l'état varié. On aura aussi

$$\Delta^{\pm m}\mathrm{D}^{n}.1^{(x+nr-r):r} = \mathrm{D}^{\pm m}1^{n}.r^{\pm m}.\mathrm{D}^{n\mp m}.1^{(x+nr-r):r} \qquad \ldots\ldots(28)$$

Si l'on fait n négatif, $\mathrm{D}^{-n}.1^{(x-nr-r):r.}$ étant $= \dfrac{1}{\mathrm{D}^{n}.1^{(x-r):r.}} = \dfrac{1}{(x-r)(x-2r)(x-3r)\ldots(x-nr)}$, (n.° 428); on aura pour les quantités de cette dernière forme

$$\Delta^{\pm m} \frac{1}{\mathrm{D}^{n}.1^{(x-r):r.}} = \frac{\mathrm{D}^{\pm m}1^{-n}.r^{\pm m}}{\mathrm{D}^{n\pm m}.1^{(x\pm mr-r):r.}}. \quad \ldots\ldots(29)$$

Les signes supérieurs et inférieurs vont ensemble dans les deux membres de chacune de ces équations (28) et (29).

451. Voici quelques intégrales-sommes qu'on trouve sur-le-champ par les formules du numéro précédent.

1.° On demande la valeur de $\Sigma^{m}x$, Δx étant constante et $= r$.

On fera $x = \mathrm{D}^{1}.1^{x:r.}$, et l'on aura, par la formule (25),

$$\Sigma^{m}x = \Sigma^{m}\mathrm{D}^{1}.1^{x:r.} = \frac{\mathrm{D}^{m+1}.1^{x:r.}}{2.3.4\ldots.(m+1).r^{m}}, \text{ ou bien}$$

$$\Sigma^{m}x = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots(x-m\Delta x)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots(m+1).(\Delta x)^{m}}. \quad \ldots\ldots(30)$$

2.° On demande la valeur de $\Sigma^{m}(\Delta x)^{s}$, Δx étant $= r$.

La formule (25) donnera, en y mettant $r^{s}\mathrm{D}^{n}.1^{x:r.}$ au lieu de $\mathrm{D}^{n}.1^{x:r.}$,

$$\Sigma^{m}r^{s}\mathrm{D}^{n}.1^{x:r.} = \frac{\mathrm{D}^{n+m}.1^{x:r.}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+m).r^{m-s}}:$$

Donc, puisqu'en faisant $n = 0$, $\mathrm{D}^{n}.1^{x:r.} = 1^{x:r.} = 1$, on aura

$$\Sigma^{m}r^{s} = \frac{\mathrm{D}^{m}.1^{x:r.}}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots m.r^{m-s}}, \text{ ou bien}$$

$$\Sigma^{m}(\Delta x)^{s} = \frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)(x-3\Delta x)\ldots.(x-m\Delta x+\Delta x)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m.(\Delta x)^{m-s}} \quad \ldots(31)$$

On aura de plus $\quad \Sigma^{m}\mathrm{E}^{k}(\Delta x)^{s} = \mathrm{E}^{k}\Sigma^{m}(\Delta x)^{s} = \quad \ldots\ldots(32)$

$$\frac{[x+k\Delta x][x+(k-1)\Delta x][x+(k-2)\Delta x]\ldots\ldots[x+(k-m+1)\Delta x]}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m.(\Delta x)^{m-s}}.$$

---

452. Donnons présentement quelques développemens des formules à échelles du numéro 444.

Pour avoir la différence et l'intégrale-somme de l'ordre m de la fonction $\varphi(x,y)$; après avoir développé $(\Delta^{1,} + \Delta^{,1}\mathrm{E}^{1,})^{m}$ et $(\Delta^{1,} + \Delta^{,1}\mathrm{E}^{1,})^{-m}$ par la règle du binome, on multiplie par $\varphi(x,y)$, et l'on trouve sur-le-champ, $\mathrm{E}^{t,}\varphi(x,y)$ étant $= \varphi(\mathrm{E}^{t}x,y) = \varphi(x_{t},y)$ par la formule (O) du numéro 409,

$$\Delta^m\phi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\Delta^{m,}\phi(x,y) + m\Delta^{m-1,}\Delta^{,1}\phi(\mathrm{E}x,y) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\Delta^{m-2,}\Delta^{,2}\phi(\mathrm{E}^2x,y)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^{m-3,}\Delta^{,3}\phi(\mathrm{E}^3x,y) + \text{etc.}$$

$$\Sigma^m\phi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\Sigma^{m,}\phi(x,y) - m\Sigma^{m+1,}\Delta^{,1}\phi(\mathrm{E}x,y) + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\Sigma^{m+2,}\Delta^{,2}\phi(\mathrm{E}^2x,y)$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Sigma^{m+3,}\Delta^{,3}\phi(\mathrm{E}^3x,y) + \text{etc.}$$

Si l'on développe $(\Delta^{,1}\mathrm{E}^{1,} + \Delta^{1,})^{-m} = \Sigma^m$ en commençant par $\Delta^{,1}\mathrm{E}^{1,}$, on trouve, au lieu de (2),

$$\Sigma^m\phi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\Sigma^{,m}\phi(\mathrm{E}^{-m}x,y) - m\Sigma^{,m+1}\Delta^{1,}\phi(\mathrm{E}^{-m-1}x,y) + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\Sigma^{,m+2}\Delta^{2,}\phi(\mathrm{E}^{-m-2}x,y)$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Sigma^{,m+3}\Delta^{3,}\phi(\mathrm{E}^{-m-3}x,y) + \text{etc.}$$

Dans ces formules x et y sont des quantités quelconques qui varient indépendamment l'une de l'autre ; elles peuvent être fonctions chacune d'une même variable t, ou de différentes variables ; Δx et Δy peuvent être constantes ou variables, ensemble ou séparément.

453. Si au lieu de la fonction $\phi(x,y)$ on a le produit vw de deux quantités v et w qu'on peut faire varier indépendamment l'une de l'autre, v et w pouvant être fonctions chacune de la même variable t ou x, ou de plusieurs variables ; on voit que ce cas est renfermé dans le précédent : mais comme on peut séparer v de w, on peut donner aux développemens une forme un peu plus simple par la suppression des virgules des caractéristiques Δ, Σ, E; et l'on aura

$$\Delta^m(vw) = (\Delta^{,1} + \Delta^{1,}\mathrm{E}^{,1})^m \times (vw) =$$
$$(\Delta^{,m} + \mathrm{D}1^m.\Delta^{,m-1}\Delta^{1,}\mathrm{E}^{,1} + \mathrm{D}^21^m.\Delta^{,m-2}\Delta^{2,}\mathrm{E}^{,2} + \text{etc.})\times(vw)$$
$$= v.\Delta^m w + m\Delta v.\Delta^{m-1}w_1 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\Delta^2v.\Delta^{m-2}w_2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3v.\Delta^{m-3}w_3 + \text{etc.} \qquad \ldots(4)$$

Changeant m en $-m$; on a

$\Sigma^m(vw)$

$$\Sigma^m(vw) = \qquad \ldots\ldots(5)$$

$$v.\Sigma^m w - m\Delta v.\Sigma^{m+1}w_1 + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\Delta^2 v.\Sigma^{m+2}w_2$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 v.\Sigma^{m+3}w_3 + \text{etc.}$$

Dans le cas de $m = 1$, cette dernière formule devient

$$\Sigma(vw) = \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$v.\Sigma w - \Delta v.\Sigma^2 w_1 + \Delta^2 v.\Sigma^3 w_2 - \Delta^3 v.\Sigma^4 w_3 + \Delta^4 v.\Sigma^5 w_4 - \text{etc.}$$

Si dans la formule (3) du numéro précédent on met v au lieu de x, w au lieu de y, et vw au lieu de $\phi(x,y)$, on en tire

$$\Sigma^m(vw) = \qquad \ldots\ldots(7)$$

$$v_{-m}.\Sigma^m w - m\Delta v_{-m-1}.\Sigma^{m+1}w + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\Delta^2 v_{-m-2}.\Sigma^{m+2}w$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 v_{-m-3}.\Sigma^{m+3}w + \text{etc.}$$

Les suites (4), (5) et (6) ont déjà été données par TAYLOR dans le tome XXX des Transactions philosophiques de Londres, pages 676 et suivantes; mais elles y sont démontrées moins simplement qu'ici. Les autres suites du numéro précédent et de celui-ci me paroissent nouvelles.

454. Si l'on veut avoir, pour les intégrales-sommes, des formules d'un nombre limité de termes, on comparera $\Delta^{-1} = (\Delta^{,1} + \Delta^{1,}E^{,1})^{-1}$ avec $(a+b)^{-1}$ du n.° 391 ; et, en faisant $a = \Delta^{,1}$, $b = \Delta^{1,}E^{,1}$, $a + b = \Delta$, la première valeur de $(a+b)^{-1}$ donnera, en changeant Δ^{-1} en Σ,

$$\Sigma = \Sigma^{,1} - \Sigma\Delta^{1,}E^{,1}\Sigma^{,1}; \qquad \ldots\ldots(8)$$

partant $\quad \Sigma\phi(x,y) = \Sigma^{,1}\phi(x,y) - \Sigma[\Delta^{1,}\Sigma^{,1}\phi(x, Ey)], \qquad \ldots\ldots(9)$

et $\quad \Sigma(vw) = v\Sigma w - \Sigma[\Delta v.\Sigma w_1]. \qquad \ldots\ldots(10)$

Si l'on faisoit $a = \Delta^{1,}E^{,1}$, $b = \Delta^{,1}$ et $a + b = \Delta$, on auroit

$$\Sigma = \Sigma^{1,}E^{,-1} - \Sigma\Delta^{,1}\Sigma^{1,}E^{,-1}; \qquad \ldots\ldots(11)$$

partant $\quad \Sigma\phi(x,y) = \Sigma^{1,}\phi(x, E^{-1}y) - \Sigma[\Delta^{,1}\Sigma^{1,}\phi(x, E^{-1}y)], \qquad \ldots\ldots(12)$

et $\quad \Sigma(vw) = \Sigma v.w_{-1} - \Sigma[\Sigma v.\Delta w_{-1}]. \qquad \ldots\ldots(13)$

Les théorèmes (9) et (12) sont de la plus grande importance dans la méthode inverse des différences : ils donnent la manière d'intégrer par parties les quantités aux différences. Comparez avec (11) du n.° 391.

En prenant la puissance entière m des deux membres de (8) et (11), on a pour l'intégrale-somme d'un ordre quelconque les formules finies suivantes

$$\Sigma^{m}\varphi(x,y) = \{\Sigma^{,1} - \Sigma\Delta^{1,}E^{,1}\Sigma^{,1}\}^{m}\times\varphi(x,y), \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{F})$$

$$\Sigma^{m}\varphi(x,y) = \{\Sigma^{1,}E^{,-1} - \Sigma\Delta^{,1}\Sigma^{1,}E^{,-1}\}^{m}\times\varphi(x,y). \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{G})$$

Si l'on reprend les valeurs de $(a+b)^{-1}$ du n.° 391, et qu'on fasse $a=\Delta^{,1}$, $b=\Delta^{1,}E^{,1}$, il est aisé de voir que la dernière de ces valeurs donne

$$\Sigma\varphi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{H})$$

$$\left\{\begin{matrix}\Sigma^{,1} - \Delta^{1,}E^{,1}\Sigma^{,2} + \Delta^{2,}E^{,2}\Sigma^{,3} - \Delta^{3,}E^{,3}\Sigma^{,4} + \text{etc.} \\ \pm\,\Delta^{r-1,}E^{,r-1}\Sigma^{,r} \mp \Sigma(\Delta^{r,}E^{,r}\Sigma^{,r})\end{matrix}\right\}\times\varphi(x,y);$$

partant, en élevant l'échelle à la puissance m, on aura

$$\Sigma^{m}\varphi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{I})$$

$$\left\{\begin{matrix}\Sigma^{,1} - \Delta^{1,}E^{,1}\Sigma^{,2} + \Delta^{2,}E^{,2}\Sigma^{,3} - \Delta^{3,}E^{,3}\Sigma^{,4} + \text{etc.} \\ \pm\,\Delta^{r-1,}E^{,r-1}\Sigma^{,r} \mp \Sigma(\Delta^{r,}E^{,r}\Sigma^{,r})\end{matrix}\right\}^{m}\times\varphi(x,y).$$

Si l'on fait au contraire $a=\Delta^{1,}E^{,1}$, $b=\Delta^{,1}$, on aura

$$\Sigma\varphi(x,y) = \qquad \ldots\ldots(\mathfrak{K})$$

$$\left\{\begin{matrix}\Sigma^{1,}E^{,-1} - \Delta^{,1}\Sigma^{2,}E^{,-2} + \Delta^{,2}\Sigma^{3,}E^{,-3} - \Delta^{,3}\Sigma^{4,}E^{,-4} \\ + \text{etc.} \pm \Delta^{,r-1}\Sigma^{r,}E^{,-r} \mp \Sigma(\Delta^{,r}\Sigma^{r,}E^{,-r})\end{matrix}\right\}\times\varphi(x,y),$$

et, en élevant pareillement l'échelle à la puissance m, on aura une formule pour $\Sigma^{m}\varphi(x,y)$.

Ces formules sont en général d'un nombre fini de termes.

455. Faisons quelques applications des formules précédentes.

Soit y une fonction de x, et Δx constante, on demande la valeur de $\Sigma y\Delta x$ par une suite.

Qu'on fasse $v=y$ et $w=\Delta x$ dans la formule (6) du n.° 453, elle donnera

$$\Sigma y\Delta x =$$

$$y\Sigma\Delta x - \Delta y.E\Sigma^{2}\Delta x + \Delta^{2}y.E^{2}\Sigma^{3}\Delta x - \Delta^{3}y.E^{3}\Sigma^{4}\Delta x + \text{etc.}$$

Or on a, par la formule (32) du n.° 451,

$$E^{n}\Sigma^{n+1}\Delta x = \frac{[x+n\Delta x][x+(n-1)\Delta x]\ldots\ldots[x+\Delta x]x}{2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\ldots(n+1).(\Delta x)^{n}}.$$

Donc

$$\Sigma y\Delta x = \qquad \ldots\ldots(14)$$

$$C + xy - \frac{x(x+\Delta x)}{1\,.\,2}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{\Delta^{2}y}{(\Delta x)^{2}}$$

$$- \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{\Delta^{3}y}{(\Delta x)^{3}} + \text{etc.}$$

Cette suite est aux différences ce que la première série de JEAN BERNOULLI, rapportée au n.° 389, est aux différentielles.

Si l'on suppose Δx variable et Δy constante, et qu'on fasse dans la formule (6) du n.° 453 $w = y$ et $v = \Delta x$, on aura aussi

$$\Sigma y \Delta x =$$
$$\Delta x . \Sigma y - \Delta^2 x . \mathrm{E}\Sigma^2 y + \Delta^3 x . \mathrm{E}^2 \Sigma^3 y - \Delta^4 x . \mathrm{E}^3 \Sigma^4 y + \text{etc.},$$

et, par la formule (30) du n.° 451,

$$\Sigma y \Delta x = \qquad \ldots\ldots(15)$$
$$C + \frac{y(y-\Delta y)}{1 . 2} \frac{\Delta x}{\Delta y} - \frac{(y+\Delta y)y(y-\Delta y)}{1 . 2 . 3} \frac{\Delta^2 x}{(\Delta y)^2} + \frac{(y+2\Delta y)(y+\Delta y)y(y-\Delta y)}{1 . 2 . 3 . 4} \frac{\Delta^3 x}{(\Delta y)^3}$$
$$- \frac{(y+3\Delta y)(y+2\Delta y)(y+\Delta y)y(y-\Delta y)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} \frac{\Delta^4 x}{(\Delta y)^4} + \text{etc.};$$

ce qui répond à la seconde formule de JEAN BERNOULLI du n.° 389.

Si dans la formule (14) ci-dessus on suppose $\Delta x = 1$, et qu'on y ajoute y de part et d'autre, elle devient

$$y + \Sigma y = \qquad \ldots\ldots(16)$$
$$C + (x+1)y - \frac{x(x+1)}{1 . 2} \Delta y + \frac{x(x+1)(x+2)}{1 . 2 . 3} \Delta^2 y$$
$$- \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 . 2 . 3 . 4} \Delta^3 y + \text{etc.};$$

ce qui est la formule pour sommer les suites au moyen des différences du terme général y, que LORGNA a trouvée par des considérations moins simples et moins directes dans les *Mémoires de Turin* pour 1786 et 1787, page 445, et que PRONY a donnée dans le 4.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*, page 543.

456. Soit encore y une fonction de x, et Δx constante, on demande la valeur de $\Sigma^m y(\Delta x)^m$ par une suite.

Je fais $w = (\Delta x)^m$ et $v = y$ dans la formule (5) du n.° 453, et j'ai

$$\Sigma^m y(\Delta x)^m =$$
$$y\Sigma^m(\Delta x)^m - m\Delta y . \mathrm{E}\Sigma^{m+1}(\Delta x)^m + \frac{m(m+1)}{1 . 2}\Delta^2 y . \mathrm{E}^2\Sigma^{m+2}(\Delta x)^m$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1 . 2 . 3}\Delta^3 y . \mathrm{E}^3\Sigma^{m+3}(\Delta x)^m + \text{etc.},$$

suite qui devient, par la formule (32) du n.° 451,

$$\Sigma^m y(\Delta x)^m = \quad \ldots\ldots(17)$$

$$\frac{x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-m\Delta x+\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(m-1)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y}{m}-\dfrac{(x+\Delta x)}{1.(m+1)}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\\[2mm] +\dfrac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,(m+2)}\dfrac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}\\[2mm] -\dfrac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.(m+3)}\dfrac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}\\[2mm] +\text{ etc.}\end{array}\right\}$$

$$+ C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \text{etc.} + C_{m-1} x^{m-1}.$$

Cette suite a aussi été trouvée par le Professeur BURMANN (*).

En faisant, dans la formule (7) du n.° 453, $w=(\Delta x)^m$ et $v=y=\phi x$; on a l'expression suivante, dont l'usage dans les calculs numériques est un peu plus facile que celui de la suite précédente (17) :

$$\Sigma^m y(\Delta x)^m = \quad \ldots\ldots(18)$$

$$\frac{x[x-\Delta x]\ldots[x-(m-1)\Delta x]}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\phi[x-m\Delta x]}{m}-\dfrac{[x-m\Delta x]}{(m+1).\Delta x}\Delta\phi[x-(m+1)\Delta x]\\[2mm] +\dfrac{[x-m\Delta x][x-(m+1)\Delta x]}{1\,.\,2\,.(m+2).(\Delta x)^2}\Delta^2\phi[x-(m+2)\Delta x]\\[2mm] -\dfrac{[x-m\Delta x][x-(m+1)\Delta x][x-(m+2)\Delta x]}{1\,.\,2\,.\,3.(m+3).(\Delta x)^3}\Delta^3\phi[x-(m+3)\Delta x]\\[2mm] +\text{ etc.}\end{array}\right\}$$

Ces suites se terminent lorsque y est un polynome dans lequel il n'entre que des puissances entières positives de x.

Pour éclaircir l'usage de ces formules par un exemple; supposons qu'on ait $y=x^3$ et $\Delta x=r$. On aura $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3xr+r^2$, $\dfrac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}=6x+6r$, $\dfrac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}=6$, $\dfrac{\Delta^4 y}{(\Delta x)^4}=0$; et la formule (17) ou (14) donnera

$$\Sigma x^3 r = x.x^3 - \frac{x(x+r)}{1\,.\,2}(3x^2+3xr+r^2)+\frac{x(x+r)(x+2r)}{1\,.\,2\,.\,3}(6x+6r)$$
$$-\frac{x(x+r)(x+2r)(x+3r)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}6.$$

(*) On voit cette formule dans un rapport fait à l'Institut national de France sur deux mémoires d'analyse de BURMANN, actuellement Professeur de Mathématiques à Cologne, tome II des *Mémoires de l'Institut national, classe des sciences mathématiques et physiques; histoire*, *page* 16. Un de ces mémoires contient une formule qui paroît semblable à (F) du n.° 386. Je saisis cette occasion pour observer que mon travail sur le retour des séries a été fait long-temps avant que je connusse l'existence des mémoires du Professeur BURMANN : au commencement de l'an V, j'ai communiqué à FRANÇAIS plusieurs de mes théorèmes sur cette matière, entre autres celui du n.° 257.

La

La formule (18) donnera

$$\Sigma x^3 r = x(x-r)^3 - \frac{x(x-r)}{1\,.\,2}\{3(x-2r)^2 + 3(x-2r)r + r^2\}$$
$$+ \frac{x(x-r)(x-2r)}{1\,.\,2\,.\,3}\{6(x-3r)+6r\} - \frac{x(x-r)(x-2r)(x-3r)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,6.$$

Supposons qu'on demande la somme des cubes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à 100^3 inclusivement; il faudra faire $r=1$ et $x=101$ dans ces deux expressions : tandis qu'en employant l'expression du n.° 448, il faudra y faire $r=1$, $x=1$ et $n=99$; cette dernière expression est donc bien plus avantageuse pour ces cas.

C'est de la formule (D) du n.° 404, développée, et dans laquelle on fait $l=1$, qu'on se sert le plus pour la sommation des suites; ainsi qu'on peut le voir dans le Calcul différentiel d'Euler.

457. On peut aussi employer les dérivations pour représenter les différences et les sommes d'un ordre quelconque.

Ainsi, en supposant $\mathfrak{D}^n.u = u_n = \mathrm{E}^n u$, $\mathfrak{D}^{-n}.u = u_{-n} = \mathrm{E}^{-n}u$, on aura

$$\Delta^n u = \mathfrak{D}^n.(1^n.u)\ldots.(1),\quad \Sigma^n u = \mathfrak{D}^{-n}.(1^{-n}.u) = \mathfrak{D}^{-n}.(u.1^{-n}),\quad \ldots(2)$$

pourvu qu'on fasse la dérivée de 1 dans 1^n et dans 1^{-n} égale à -1.

On aura pareillement, en supposant $\mathfrak{D}^n.u = \Delta^n u$, $\mathfrak{D}^{-n}.u = \Delta^{-n}u = \Sigma^n u$, et faisant la dérivée de 1 dans 1^n et 1^{-n} égale à $+1$,

$$\mathrm{E}^n u = \mathfrak{D}^n.(1^n.u)\ldots..(3),\quad \mathrm{E}^{-n}u = \mathfrak{D}^{-n}.(1^{-n}.u) = \mathfrak{D}^{-n}.(u.1^{-n}).\quad \ldots(4)$$

Si l'on veut détacher les échelles, on peut faire $\mathfrak{D}^n.\mathrm{E}^0 = \mathrm{E}^n$, $\mathfrak{D}^{-n}.\mathrm{E}^0 = \mathrm{E}^{-n}$, $\mathfrak{D}^n.\Delta^0 = \Delta^n$, $\mathfrak{D}^{-n}.\Delta^0 = \Delta^{-n} = \Sigma^n$; et l'on aura sous cette condition

$$\Delta^n u = \mathfrak{D}^n.(1^n.\mathrm{E}^0)\times u\ \ldots..(5),\qquad \Sigma^n u = \mathfrak{D}^{-n}.(1^{-n}.\mathrm{E}^0)\times u,\qquad \ldots.(6)$$

pourvu qu'on fasse $\mathrm{D}.1 = -1$; pareillement

$$\mathrm{E}^n u = \mathfrak{D}^n.(1^n.\Delta^0)\times u\ \ldots..(7),\qquad \mathrm{E}^{-n}u = \mathfrak{D}^{-n}.(1^n.\Delta^0)\times u,\qquad \ldots.(8)$$

en faisant $\mathrm{D}.1 = 1$ dans (7) et (8), et $\mathrm{E}^0 = 1$, $\Delta^0 = 1$ après les développemens de ces quatre dernières formules.

On a regardé u comme fonction de x; u et ses états variés $\mathrm{E}u$, E^2u, E^3u, etc., ou u, u_1, u_2, u_3, etc., peuvent aussi souvent être considérés comme des quantités quelconques A, A_1, A_2, A_3, etc., ou A, B, C, D, etc., indépendantes entre elles, et la plupart des formules des numéros précédens seront encore vraies pour ces cas.

Nous n'avons eu que peu d'occasions d'employer les dérivations dans ce que nous venons de dire des différences : ainsi, sans nous laisser entraîner par la facilité que procure la séparation des échelles pour arriver aux théorèmes qui constituent la méthode des différences, passons à des cas où se montre l'utilité des dérivations.

---

458. Supposons que la fonction à échelle $f\mathrm{E}$ du n.° 445 soit un polynome ordonné suivant les puissances de E : si l'on représente par $\mathrm{H}u$ la quantité $au + b\mathrm{E}u + c\mathrm{E}^2u + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^ru$, ou $au + bu_1 + cu_2 + du_3 + \text{etc.} + a_ru_r$, ..(1) [la capitale grecque H, mise au lieu de $f\mathrm{E}$, est ici une caractéristique et non une quantité]; si l'on représente de plus par H^2u ce que devient (1) lorsqu'à la place de u on y met $\mathrm{H}u$, c'est-à-dire, si l'on fait

$$\mathrm{H}^2u = a\mathrm{H}u + b\mathrm{E}\mathrm{H}u + c\mathrm{E}^2\mathrm{H}u + d\mathrm{E}^3\mathrm{H}u + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^r\mathrm{H}u; \quad ..(2)$$

qu'on fasse de plus

$$\mathrm{H}^3u = a\mathrm{H}^2u + b\mathrm{E}\mathrm{H}^2u + c\mathrm{E}^2\mathrm{H}^2u + d\mathrm{E}^3\mathrm{H}^2u + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^r\mathrm{H}^2u, \quad ..(3)$$

et ainsi de suite; on pourra exprimer H^2u, H^3u, etc., H^mu en u, $\mathrm{E}u$, E^2u, E^3u, etc. : car l'on aura généralement

$$\mathrm{H}^mu = (a + b\mathrm{E} + c\mathrm{E}^2 + d\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^r)^m \times u \quad ....(4)$$

$$= a^m.u + \mathrm{D}.a^m.\mathrm{E}u + \mathrm{D}^2.a^m.\mathrm{E}^2u + \text{etc.} + \mathrm{D}^{rm}.a^m.\mathrm{E}^{rm}u, \quad ...(5)$$

où a dans $\mathrm{D}^s.a^m$ doit être regardé comme un dernier terme.

Cette proposition suit de ce qu'en détachant l'échelle de (1), on a

$$\mathrm{H}u = (a + b\mathrm{E} + c\mathrm{E}^2 + d\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^r) \times u;$$

donc, en mettant $\mathrm{H}u$ au lieu de u dans le premier membre et sa valeur dans l'autre, on trouve $\mathrm{H}^2u = (a + b\mathrm{E} + c\mathrm{E}^2 + d\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + a_r\mathrm{E}^r)^2 \times u$; on continuera ainsi, en mettant de nouveau $\mathrm{H}u$ et sa valeur au lieu de u. On peut aussi appliquer, si l'on veut, à cette proposition la manière de démontrer du n.° 400.

459. Si l'on écrit la suite (1) ci-dessus de cette manière :

$$\alpha u_r + \beta u_{r-1} + \gamma u_{r-2} + \text{etc.} + \alpha_{r-2}u_2 + \alpha_{r-1}u_1 + \alpha_r u,$$

où α, β, γ, etc. α_{r-2}, α_{r-1}, α_r sont respectivement égaux à a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, etc., c, b, a, et qu'on suppose $\mathrm{D}^n.u = u_n = \mathrm{E}^nu$; on aura aussi $\mathrm{H}u = \mathrm{D}^r.(\alpha.u)$; $\mathrm{H}u_s = \mathrm{E}^s\mathrm{H}u = \mathrm{D}^{r+s}.(\alpha.u)$, $\mathrm{H}^mu = \mathrm{D}^{mr}.(\alpha^m.u)$, α_r étant une dernière quantité.

Mais, comme il est utile dans beaucoup de cas de détacher les échelles,

remarquons qu'on a aussi $Hu = D^r.(\alpha.E^0)\times u$, $H^m u = D^{mr}.(\alpha^m.E^0)\times u$, en faisant après le développement $E^0 = 1$, $D.E^0 = E$, $D^2.E^0 = E^2$, etc., $D^n.E^0 = E^n$; α_r étant toujours une dernière quantité.

460. Si la relation entre les termes d'une suite est variable, si l'on a par exemple la relation

$$\alpha(m^2+km+l).u_m+\mathcal{C}(m^2+pm+q).u_{m-1}+\gamma(m^2+rm+s).u_{m-2}=0, \quad ..(1)$$

où m est la variable, $m+1$ étant le quantième des termes ou le nombre des termes de la suite; il est clair, que plus m devient grand, plus la relation (1) approche de la relation constante

$$\alpha.u_m + \mathcal{C}.u_{m-1} + \gamma.u_{m-2} = 0, \quad .....(2)$$

qui est celle des termes d'une série récurrente. En effet, l'équation de relation (1) peut être mise sous cette forme

$$\alpha.u_m + \mathcal{C}\frac{m^2+pm+q}{m^2+km+l}.u_{m-1} + \gamma\frac{m^2+rm+s}{m^2+km+l}.u_{m-2} = 0,$$

ou sous celle-ci, en divisant haut et bas les fractions par m^2,

$$\alpha.u_m + \mathcal{C}\frac{1+\frac{p}{m}+\frac{q}{m^2}}{1+\frac{k}{m}+\frac{l}{m^2}}.u_{m-1} + \gamma\frac{1+\frac{r}{m}+\frac{s}{m^2}}{1+\frac{k}{m}+\frac{l}{m^2}}.u_{m-2} = 0.$$

Donc, plus m devient grand, plus chacune des deux fractions approche de l'unité, et plus la relation approche de l'équation (2). Cette équation (2) se nomme la *dernière relation* des termes.

On voit donc qu'il y a un nombre considérable de suites dont la dernière relation des termes est celle d'une suite récurrente.

Dans les cas ci-dessus (1), le premier membre de (2) n'est point zéro, mais il approche de zéro si m devient considérable; si l'on désigne $\alpha u_2 + \mathcal{C}u_1 + \gamma u$ par Hu, les quantités Hu, HEu, HE^2u, etc. $HE^m u$, etc. iront en diminuant, au moins après un certain intervalle, et approcheront d'autant plus de zéro que m sera plus grand; Hu, H^2u, H^3u, etc. $H^n u$, etc. iront aussi en diminuant, et en général $H^n E^m u$ approchera de zéro si n et m sont considérables. Donc, si dans les cas pareils à celui de (1) on ordonne une suite suivant Hu, H^2u, H^3u, etc., ou suivant HEu, H^2E^2u, H^3E^3u, etc., elle sera ordonnée suivant des quantités qui iront en diminuant. Ces éclaircissemens m'ont paru nécessaires pour ce qui va suivre.

461. Occupons-nous à présent de la transformation des suites pour des cas fort étendus.

PROBLÈME. Soit proposée la suite

$$Au + Bu_1 + Cu_2 + Du_3 + \text{etc.} + A_s u_s, \quad \ldots\ldots(1)$$

et la suite

$$\zeta u + \gamma u_1 + \delta u_2 + \text{etc.} + \zeta_r u_r = \mathrm{H}u, \quad \ldots\ldots(2)$$

u, u_1, u_2, u_3, etc., A, B, C, D, etc., ζ, γ, δ, etc. étant des quantités quelconques ; transformer la première suite (1) en une autre qui soit ordonnée suivant u, $\mathrm{EH}^m u$, $\mathrm{E}^2\mathrm{H}^{2m}u$, $\mathrm{E}^3\mathrm{H}^{3m}u$, etc.

En détachant les échelles, on aura la solution par le théorème du n.° 257. En effet (1) et (2) deviendront

$$(A + B\mathrm{E} + C\mathrm{E}^2 + D\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + A_s\mathrm{E}^s)\times u,$$

$$(\zeta + \gamma\mathrm{E} + \delta\mathrm{E}^2 + \varepsilon\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + \zeta_r\mathrm{E}^r)\times u.$$

Comparant donc avec le n.° 257, on mettra E à la place de x, H à la place de s; et l'on aura, par la formule (IV),

$$(A + B\mathrm{E} + C\mathrm{E}^2 + D\mathrm{E}^3 + \text{etc.} + A_s\mathrm{E}^s)\times u =$$

$$\left\{\begin{array}{r} A + \zeta^{-m}\mathrm{D}.A.\mathrm{EH}^m + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\zeta^{-2m}.\mathrm{D}.A).\mathrm{E}^2\mathrm{H}^{2m} + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\zeta^{-3m}.\mathrm{D}.A).\mathrm{E}^3\mathrm{H}^{3m} \\ + \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(\zeta^{-nm}.\mathrm{D}.A).\mathrm{E}^n\mathrm{H}^{nm} + \text{etc.} \end{array}\right\}\times u,$$

ou bien

$$Au + Bu_1 + Cu_2 + Du_3 + \text{etc.} + A_s u_s = \quad \ldots\ldots(3)$$

$$Au + \zeta^{-m}\mathrm{D}.A.\mathrm{H}^m u_1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(\zeta^{-2m}.\mathrm{D}.A).\mathrm{H}^{2m}u_2 + \tfrac{1}{3}\mathrm{D}^2.(\zeta^{-3m}.\mathrm{D}.A)\mathrm{H}^{3m}u_3$$

$$+ \text{etc.} + \tfrac{1}{n}\mathrm{D}^{n-1}.(\zeta^{-nm}.\mathrm{D}.A).\mathrm{H}^{nm}u_n + \text{etc.} :$$

on développera les quantités affectées de D comme il est dit au n.° 257, en ayant soin d'observer qu'ici A_s et ζ_r sont des derniers termes qui n'ont plus de dérivées. Ce théorème (3) est bien plus étendu que celui du n.° 257.

Si l'on propose de transformer la suite

$$u + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} + u_s;$$

il suffira de faire chacune des quantités A, B, C, D, etc. A_s égale à l'unité dans le développement (VI) du n.° 257 ; et l'on aura ainsi une formule pour la somme de la suite précédente.

On peut tirer bien d'autres conséquences de l'application aux échelles des formules de l'article cinquième ; mais, sans suivre ces détails, il nous suffit d'avoir tracé la marche de ces applications. Nous allons nous arrêter à des applications du même genre qu'on peut faire des formules de l'article quatrième, relatives

relatives aux suites récurrentes ; parce que les résultats qu'elles donnent sont liés plus étroitement à des théories connues.

462. PROBLÈME. Supposons qu'on ait

$$au + bu_1 + cu_2 + du_3 = Hu; \quad \ldots\ldots(1)$$

on propose de transformer la suite

$$u + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \text{etc. à l'infini} \quad \ldots\ldots(2)$$

en une autre qui procède suivant Hu, H^2u, H^3u, etc., Hu_1, H^2u_1, etc., Hu_2, H^2u_2, etc.

Nous n'avons supposé que quatre termes au polynome (1), afin de simplifier; mais ce que nous en dirons s'étend à un polynome d'un nombre quelconque de termes.

Je détache l'échelle de (1), ce qui donne

$$a + bE + cE^2 + dE^3 - H = 0; \quad \ldots\ldots(3)$$

mais, afin de comparer avec (1) du n.° 204, je mets α, β, γ, δ à la place de d, c, b, a respectivement, et, multipliant par E^{m-3}, l'échelle (3) devient

$$\alpha E^m + \beta E^{m-1} + \gamma E^{m-2} + (\delta - H)E^{m-3} = 0. \quad \ldots\ldots(4)$$

L'échelle détachée de (2) est $1 + E + E^2 + E^3 + E^4 +$ etc. Je compare (4) avec (1) du n.° 204 ; je vois qu'ici E^m remplace A_m, et que $\delta - H$ remplace δ pour l'instant ; en raisonnant comme dans le numéro cité, j'aurai

$$\frac{\alpha + x(\alpha E + \beta) + x^2(\alpha E^2 + \beta E + \gamma)}{\alpha + x\beta + x^2\gamma + x^3(\delta - H)} = 1 + xE + x^2E^2 + x^3E^3 + \text{etc.} \quad \ldots(5)$$

Ici x n'est point affecté de E ou de H, il n'est introduit que pour ordonner les termes.

Présentement, si l'on fait $x = 1$, et qu'on multiplie (5) par u ; il est clair que l'on a

$$\frac{\alpha + (\alpha E + \beta) + (\alpha E^2 + \beta E + \gamma)}{\alpha + \beta + \gamma + \delta - H} \times u = (1 + E + E^2 + E^3 + \text{etc.}) \times u, \ldots(6)$$

c'est-à-dire que le premier membre est égal à la somme de la série (2). Je fais $\alpha + \beta + \gamma + \delta = k$, pour plus de simplicité ; puisque $\frac{1}{k - H} = \frac{1}{k} + \frac{H}{k^2} + \frac{H^2}{k^3} + \frac{H^3}{k^4} +$ etc., je trouve sur-le-champ, en effectuant la division par le dénominateur du premier membre de (6), et ordonnant par rapport à E,

$$(1 + E + E^2 + E^3 + E^4 + \text{etc.}) \times u =$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}H + \frac{1}{k^3}H^2 + \frac{1}{k^4}H^3 + \text{etc.}\right\} \times u$$

$$+ (\alpha + \beta)\left\{\frac{1}{k}E + \frac{1}{k^2}EH + \frac{1}{k^3}EH^2 + \frac{1}{k^4}EH^3 + \text{etc.}\right\} \times u \quad \ldots (7)$$

$$+ \alpha\left\{\frac{1}{k}E^2 + \frac{1}{k^2}E^2H + \frac{1}{k^3}E^2H^2 + \frac{1}{k^4}E^2H^3 + \text{etc.}\right\} \times u;$$

ou bien, en remettant pour α, β, γ leurs valeurs d, c, b, et observant que $E^s H^r u = H^r u_s$, on a, pour la solution du problème,

$$u + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \text{etc.} =$$

$$(b + c + d)\left\{\frac{u}{k} + \frac{Hu}{k^2} + \frac{H^2u}{k^3} + \frac{H^3u}{k^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ (c + d)\left\{\frac{u_1}{k} + \frac{Hu_1}{k^2} + \frac{H^2u_1}{k^3} + \frac{H^3u_1}{k^4} + \text{etc.}\right\} \quad \ldots (8)$$

$$+ d\left\{\frac{u_2}{k} + \frac{Hu_2}{k^2} + \frac{H^2u_2}{k^3} + \frac{H^3u_2}{k^4} + \text{etc.}\right\}$$

Si l'on veut avoir la somme de la suite terminée

$$u + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} + u_n,$$

on multipliera (7) par E^{n+1}, afin d'avoir la somme de la suite non terminée $E^{n+1}u + E^{n+2}u + E^{n+3}u + \text{etc.}$; on aura, pour cette somme,

$$(b+c+d)\left\{\frac{u_{n+1}}{k} + \frac{Hu_{n+1}}{k^2} + \frac{H^2u_{n+1}}{k^3} + \frac{H^3u_{n+1}}{k^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ (c+d)\left\{\frac{u_{n+2}}{k} + \frac{Hu_{n+2}}{k^2} + \frac{H^2u_{n+2}}{k^3} + \frac{H^3u_{n+2}}{k^4} + \text{etc.}\right\} \quad \ldots (9)$$

$$+ d\left\{\frac{u_{n+3}}{k} + \frac{Hu_{n+3}}{k^2} + \frac{H^2u_{n+3}}{k^3} + \frac{H^3u_{n+3}}{k^4} + \text{etc.}\right\},$$

et l'on retranchera cette suite (9) de (8).

Ce problème a été résolu par STIRLING dans son traité *de summatione et interpolatione serierum, propos.* XIV; ensuite par EULER dans son Calcul différentiel, page 530. LAPLACE, dans son *mémoire sur les suites*, Académie des sciences de Paris, année 1779, pages 242 et 243, en a simplifié la solution par une analyse différente de la nôtre.

Si l'on a $Hu = 0$, la formule précédente (8) donne la somme ordinaire d'une suite récurrente. Il peut arriver que Hu ne soit pas zéro, et que cependant une des quantités H^2u, H^3u, etc. H^ru, etc. devienne zéro; alors la formule se termine et donne la valeur exacte de la somme : mais si aucune

des quantités Hu, H^2u, H^3u, etc. H^ru etc. ne devient zéro, alors (n.° 450) elle donnera la valeur approchée de la somme par des suites convergentes.

463. Exemples. On propose de sommer la série

$$1 + 3^2.p^2 + 5^2.p^4 + 7^2.p^6 + 9^2.p^8 + 11^2.p^{10} + \text{etc.}$$

Si l'on fait ici $u = 1$, $u_1 = 3^2.p^2$, $u_2 = 5^2.p^4$, etc., l'équation de relation (n.° 450) sera $(2m-1)^2.u_m-(2m+1)^2p^2.u_{m-1} = 0$, où m est la variable, et l'on aura, pour la dernière relation des termes, $u_m - p^2u_{m-1} = 0$. Ainsi $\alpha = b = 1$, $\zeta = a = -p^2$, $c = 0$, $d = 0$, $k = 1-p^2$; $Hu = -p^2u+u_1 = 8p^2$, $H^2u = u_2 - 2p^2u_1 + p^4u = 8p^4$, $H^3u = u_3 - 3p^2u_2 + 3p^4u_1 - u = 0$, $H^4u = 0$, H^5u, etc. $= 0$; substituant dans la formule (8), elle donne, pour la somme exacte de la série ci-dessus,

$$\frac{1}{1-p^2} + \frac{8p^2}{(1-p^2)^2} + \frac{8p^4}{(1-p^2)^3} = \frac{1+6p^2+p^4}{(1-p^2)^3}.$$

Soit proposé de sommer la série

$$\frac{1^n}{p} + \frac{2^n}{p^2} + \frac{3^n}{p^3} + \frac{4^n}{p^4} + \text{etc.} + \frac{l^n}{p^l} + \text{etc.},$$

en supposant n égal successivement à 1, 2, 3, 4, etc.

On fera $u = \frac{1^n}{p}$, $u_1 = \frac{2^n}{p^2}$, etc.; l'équation de relation et celle de dernière relation seront

$$m^n.u_m - \frac{(m+1)^n}{p}.u_{m-1} = 0, \quad -\frac{1}{p}.u_{m-1} + u_m = 0;$$

ainsi $k = 1 - \frac{1}{p}$, $Hu = -\frac{1}{p}u + u_1$; et l'on aura

$$H^su = (-\tfrac{1}{p})^s u + s(-\tfrac{1}{p})^{s-1} u_1 + \frac{s(s-1)}{1.2}(-\tfrac{1}{p})^{s-2} u_2 + \text{etc.}$$
$$+ s(-\tfrac{1}{p})u_{s-1} + u_s;$$

d'où l'on tire $H^2u = 0$, si $n = 1$; $H^3u = 0$, si $n = 2$; $H^4u = 0$, si $n = 3$; et ainsi de suite. L'on trouvera ainsi pour la somme exacte de la série proposée, savoir :

1.° $\frac{p}{(p-1)^2}$, si $n = 1$; 2.° $\frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$, si $n = 2$;

3.° $\frac{p(p+2)^2-3p}{(p-1)^4}$, si $n = 3$; 4.° $\frac{p^4+11p^3+11p^2+p}{(p-1)^5}$, si $n = 4$;

et ainsi de suite. Si l'on ne veut les sommes que jusqu'au terme $\frac{l^n}{p^l}$ inclu-

sivement, on les trouvera égales à

$$\frac{p}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^l}\frac{p}{(p-1)^2} - \frac{l}{p^l}\cdot\frac{1}{p-1}, \text{ si } n=1,$$

$$\frac{p(p+1)}{(p-1)^3} - \frac{1}{p^l}\frac{p(p+1)}{(p-1)^3} - \frac{2l}{p^l}\frac{p}{(p-1)^2} - \frac{l^2}{p^l}\frac{1}{p-1}, \text{ si } n=2,$$

et ainsi des autres.

464. Problème. Étant proposée la même suite que n.° 462, savoir

$$au + bu_1 + cu_2 + du_3 = \text{H}u, \qquad \ldots\ldots(1)$$

on demande à interpoler les termes de la suite

$$u + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \text{etc.}; \qquad \ldots\ldots(2)$$

c'est-à-dire, m étant quelconque entier ou fractionnaire, on demande la valeur de u_m par une suite ordonnée suivant $\text{H}u$, H^2u, H^3u, etc., $\text{H}u_1$, H^2u_1, H^3u_1, etc., $\text{H}u_2$, H^2u_2, H^3u_2, etc., etc.

Tout demeurant comme au n.° 462, je reprends l'équation à échelle (5), savoir

$$\frac{\alpha + x(\alpha\text{E}+\zeta) + x^2(\alpha\text{E}^2+\zeta\text{E}+\gamma)}{\alpha + x\zeta + x^2\gamma + x^3(\delta - \text{H})} = 1 + x\text{E} + x^2\text{E}^2 + x^3\text{E}^3 + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots(5)$$

On voit qu'il s'agit d'avoir la valeur de E^m par le développement du premier membre, c'est-à-dire de trouver le coëfficient de x^m dans le développement du premier membre; le coëfficient de x^m dans le second membre étant E^m.

Je partage le dénominateur en deux parties, en faisant $V = \alpha + \zeta x + \gamma x^2 + \delta x^3$; alors ce dénominateur devient $V - x^3\text{H}$; et, puisque

$$\frac{1}{V - x^3\text{H}} = V^{-1} + V^{-2}x^3\text{H} + V^{-3}x^{2\cdot 3}\text{H}^2 + V^{-4}x^{3\cdot 3}\text{H}^3 + \text{etc.},$$

le premier membre de (5) devient

$$\left\{\begin{matrix} \alpha \\ + x(\alpha\text{E}+\zeta) \\ + x^2(\alpha\text{E}^2+\zeta\text{E}+\gamma) \end{matrix}\right\}(V^{-1} + V^{-2}x^3\text{H} + V^{-3}x^6\text{H}^2 + V^{-4}x^{3\cdot 3}\text{H}^3 + \text{etc.}) \quad ..(10)$$

Or V^{-r} étant $= \alpha^{-r} + \text{D}.\alpha^{-r}.x + \mathfrak{D}^2.\alpha^{-r}.x^2 + \mathfrak{D}^3.\alpha^{-r}.x^3 + \text{etc.}$, où δ est considéré comme un dernier terme; il est clair que le coëfficient de x^m dans V^{-1} est $\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1}$; que ce coëfficient dans $V^{-1}x$, $V^{-1}x^2$, etc. est $\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1}$, $\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1}$, etc.; que ce même coëfficient dans $V^{-2}x^3$, $V^{-2}x^4$, $V^{-2}x^5$, etc. est $\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-2}$, $\mathfrak{D}^{m-4}.\alpha^{-2}$, $\mathfrak{D}^{m-5}.\alpha^{-2}$, etc. que dans $V^{-3}x^{2.3}$, $V^{-3}x^{2.3+1}$, $V^{-3}x^{2.3+2}$, etc., il est $\mathfrak{D}^{m-2.3}.\alpha^{-3}$, $\mathfrak{D}^{m-2.3-1}.\alpha^{-3}$, $\mathfrak{D}^{m-2.3-2}.\alpha^{-3}$, etc.; et ainsi

ainsi de suite. Donc, en ordonnant par rapport à E, on aura pour le coëfficient de x^m tiré de (10)

$$\begin{aligned}
E^m = \quad & \alpha D^m.\alpha^{-1} + \beta D^{m-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{m-2}.\alpha^{-1} \\
& + (\alpha D^{m-3}.\alpha^{-2} + \beta D^{m-4}.\alpha^{-2} + \gamma D^{m-5}.\alpha^{-2}).H \\
& + (\alpha D^{m-6}.\alpha^{-3} + \beta D^{m-7}.\alpha^{-3} + \gamma D^{m-8}.\alpha^{-3}).H^2 \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\alpha D^{m-1}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-2}.\alpha^{-1}).E \\
& + (\alpha D^{m-4}.\alpha^{-2} + \beta D^{m-5}.\alpha^{-2}).EH \\
& + (\alpha D^{m-7}.\alpha^{-3} + \beta D^{m-8}.\alpha^{-3}).EH^2 \qquad \ldots.(11) \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha D^{m-2}.\alpha^{-1}.E^2 \\
& + \alpha D^{m-5}.\alpha^{-2}.E^2H \\
& + \alpha D^{m-8}.\alpha^{-3}.E^2H^2 \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

et, en multipliant par u cette équation à échelle, on a sur-le-champ, pour la formule cherchée,

$$\begin{aligned}
u_m = \quad & (\alpha D^m.\alpha^{-1} + \beta D^{m-1}.\alpha^{-1} + \gamma D^{m-2}.\alpha^{-1}).u \\
& + (\alpha D^{m-3}.\alpha^{-2} + \beta D^{m-4}.\alpha^{-2} + \gamma D^{m-5}.\alpha^{-2}).Hu \\
& + (\alpha D^{m-6}.\alpha^{-3} + \beta D^{m-7}.\alpha^{-3} + \gamma D^{m-8}.\alpha^{-3}).H^2u \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (\alpha D^{m-1}.\alpha^{-1} + \beta D^{m-2}.\alpha^{-1}).u_1 \\
& + (\alpha D^{m-4}.\alpha^{-2} + \beta D^{m-5}.\alpha^{-2}).Hu_1 \qquad \ldots.(12) \\
& + (\alpha D^{m-7}.\alpha^{-3} + \beta D^{m-8}.\alpha^{-3}).H^2u_1 \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha D^{m-2}.\alpha^{-1}.u_2 \\
& + \alpha D^{m-5}.\alpha^{-2}.Hu_2 \\
& + \alpha D^{m-8}.\alpha^{-3}.H^2u_2 \\
& + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où l'on aura en général le développement de $H^r u_s$ par la formule

$$a^r.u_s + D.a^r.u_{s+1} + D^2.a^r.u_{s+2} + D^3.a^r.u_{s+3} + \text{etc.},$$

laquelle sera toujours terminée, parce que r est entier positif. On regardera d comme une dernière quantité.

Si m est entier positif, on peut développer les quantités affectées de $\mathfrak{D}$ par nos règles de dérivation, ainsi qu'on l'a fait voir n.os 208 et 211. Si m est fractionnaire, ainsi que l'exigent les interpolations; pour développer en général $\mathfrak{D}^m.\alpha^{-r}$, on décomposera $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, c'est-à-dire $d + cx + bx^2 + ax^3$ en facteurs binomes. Soit ce polynome, ainsi décomposé, égal à

$$\mu(a-x)(b-x)(c-x);$$

on aura, par la dernière formule du n.° 217,

$$\mathfrak{D}^m.\alpha^{-s} = \mu^{-s}\mathfrak{D}^{s-1}.\left\{\begin{array}{l} a^{-m-1}(b-a)^{-s}(c-a)^{-s}, \text{ a seul variant de } -1, \\ +\, b^{-m-1}(a-b)^{-s}(c-b)^{-s}, \text{ b seul variant de } -1, \\ +\, c^{-m-1}(a-c)^{-s}(b-c)^{-s}, \text{ c seul variant de } -1, \end{array}\right\}; \quad (13)\ldots$$

formule dans laquelle s est entier positif, et qui, par cette raison, est toujours développable quel que soit m.

46[illegible]. La solution précédente s'étend au cas où la suite (1) a un nombre quelconque de termes; car, si l'on avoit

$$au + bu_1 + cu_2 + du_3 + \text{etc.} + a_{r-1}u_{r-1} + a_r u_r = \mathrm{H}u_r \quad ..(14)$$

on écriroit aussi cette expression de cette manière:

$$\alpha u_r + \beta u_{r-1} + \gamma u_{r-2} + \text{etc.} + \alpha_{r-1}u_1 + \alpha_r u - \mathrm{H}u = 0, \quad ..(15)$$

en faisant $a_r = \alpha$, etc. $a = \alpha_r$; et l'on formeroit, tout de même que n.° 205, la fraction suivante

$$\frac{\mathfrak{A} + x\mathfrak{B} + x^2\mathfrak{C} + x^3\mathfrak{D} + \text{etc.} + x^{r-1}\mathfrak{R}}{\alpha + x\beta + x^2\gamma + x^3\delta + \text{etc.} + x^{r-1}\alpha_{r-1} + x^r(\alpha_r - \mathrm{H})} = 1 + x\mathrm{E} + x^2\mathrm{E}^2 + \text{etc.}, \quad .(16)$$

où l'on a $\mathfrak{A} = \alpha$, $\mathfrak{B} = \alpha\mathrm{E} + \beta$, $\mathfrak{C} = \alpha\mathrm{E}^2 + \beta\mathrm{E} + \gamma$, etc., $\mathfrak{R} = \alpha\mathrm{E}^{r-1} + \beta\mathrm{E}^{r-2} + \gamma\mathrm{E}^{r-3} + \text{etc.} + \alpha_{r-1}\mathrm{E} + \alpha_r$.

On feroit le dénominateur de (16) égal à $V - x^r\mathrm{H}$; et après avoir développé $(V - x^r\mathrm{H})^{-1}$, on chercheroit le coëfficient de x^m dans le développement de la fraction qui forme le premier membre de (16); coëfficient qui, en vertu du second membre, est égal à E^m. Multipliant ensuite par u l'équation à échelle que l'on obtiendroit, on trouveroit la formule

$$u_m = \quad \ldots\ldots(17)$$

$$\begin{array}{l} (\alpha_{r-1}.\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-2}.\mathfrak{D}^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \beta\mathfrak{D}^{m-1}\alpha^{-1} + \alpha\mathfrak{D}^m.\alpha^{-1}).u \\ +\, (\alpha_{r-1}.\mathfrak{D}^{m-2r+1}.\alpha^{-2} + \alpha_{r-2}.\mathfrak{D}^{m-2r+2}.\alpha^{-2} + \text{etc.} + \beta\mathfrak{D}^{m-r-1}.\alpha^{-2} + \alpha\mathfrak{D}^{m-r}.\alpha^{-2}).\mathrm{H}u \\ +\, (\alpha_{r-1}.\mathfrak{D}^{m-3r+1}.\alpha^{-3} + \alpha_{r-2}.\mathfrak{D}^{m-3r+2}.\alpha^{-3} + \text{etc.} + \beta\mathfrak{D}^{m-2r-1}.\alpha^{-3} + \alpha\mathfrak{D}^{m-2r}.\alpha^{-3}).\mathrm{H}^2u \\ +\, \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$+ (\alpha_{r-2}.\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + 6\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1} + \alpha\mathfrak{D}^{m-1}.\alpha^{-1}).u_1$$
$$+ (\alpha_{r-2}.\mathfrak{D}^{m-2r+1}.\alpha^{-2} + \text{etc.} + 6\mathfrak{D}^{m-r-2}.\alpha^{-2} + \alpha\mathfrak{D}^{m-r-1}.\alpha^{-2}).\mathrm{H}u_1$$
$+$ etc. ....

$$+ (\alpha_{r-3}.\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + 6\mathfrak{D}^{m-3}.\alpha^{-1} + \alpha\mathfrak{D}^{m-2}.\alpha^{-1}).u_2$$
$$+ (\alpha_{r-3}.\mathfrak{D}^{m-2r+1}.\alpha^{-2} + \text{etc.} + 6\mathfrak{D}^{m-r-3}.\alpha^{-2} + \alpha\mathfrak{D}^{m-r-2}.\alpha^{-2}).\mathrm{H}u_2$$
$+$ etc., etc. ....

$$+ \alpha\mathfrak{D}^{m-r+1}.\alpha^{-1}.u_{r-1} + \alpha\mathfrak{D}^{m-2r+1}.\alpha^{-2}.\mathrm{H}u_{r-1} + \alpha\mathfrak{D}^{m-3r+1}.\alpha^{-3}.\mathrm{H}^2u_{r-1}$$
$+$ etc.

Ici $\mathrm{H}^n u_s$ est donné par la formule terminée

$$a^n.u_s + \mathrm{D}.a^n.u_{s+1} + \mathfrak{D}^2.a^n.u_{s+2} + \mathfrak{D}^3.a^n.u_{s+3} + \text{etc.},$$

n étant entier positif : on y considère a_r comme un dernier terme.

Supposons qu'en décomposant V en facteurs simples, on ait

$$\alpha + 6x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.} + \alpha_r x^r = \mu(\mathfrak{a}-x)(\mathfrak{b}-x)(\mathfrak{c}-x)(\mathfrak{d}-x)\times\ldots;$$

on aura en général

$$\mathfrak{D}^m.\alpha^{-s} = \quad \ldots.(18)$$

$$\mu^{-s}\mathfrak{D}^{s-1}.\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a}^{-m-1}(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})^{-s}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})^{-s}(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})^{-s}\times\ldots, \ \mathfrak{a} \text{ seul variant de } -1, \\ +\mathfrak{b}^{-m-1}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{-s}(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})^{-s}(\mathfrak{d}-\mathfrak{b})^{-s}\times\ldots, \ \mathfrak{b} \text{ seul variant de } -1, \\ +\mathfrak{c}^{-m-1}(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})^{-s}(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^{-s}(\mathfrak{d}-\mathfrak{c})^{-s}\times\ldots, \ \mathfrak{c} \text{ seul variant de } -1, \\ +\mathfrak{d}^{-m-1}(\mathfrak{a}-\mathfrak{d})^{-s}(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})^{-s}(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})^{-s}\times\ldots, \ \mathfrak{d} \text{ seul variant de } -1, \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

expression qui donnera $\mathfrak{D}^m.\alpha^{-s}$ lors même que m est une fraction, s étant entier positif.

La formule (17) sert ainsi à interpoler les suites dont la dernière relation des termes est celle d'une suite récurrente d'un ordre quelconque.

466. Si l'on a $\mathrm{H}u = 0$, c'est-à-dire si l'on a l'équation

$$au + bu_1 + cu_2 + du_3 + \text{etc.} + a_r u_r = 0,$$

ou $$\alpha_r.u + \alpha_{r-1}.u_1 + \alpha_{r-2}.u_2 + \text{etc.} + 6u_{r-1} + \alpha u_r = 0,$$

à laquelle on peut réduire toute équation linéaire aux différences (finies), d'un ordre quelconque, dont les coëfficiens sont constans; et que l'on suppose $\Delta x = 1$, $u = \phi x$, partant $u_m = \phi(x+m)$; en faisant $x = 0$ dans u, on aura $u = \phi(0)$, $u_1 = \phi(1)$, $u_2 = \phi(2)$, etc. $u_m = \phi(m)$, et la formule (17) deviendra

$$\begin{aligned}\varphi(m) = \quad & \varphi(0).(\alpha_{r-1}D^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-2}D^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha D^{m}.\alpha^{-1}) \\ & + \varphi(1).(\alpha_{r-2}D^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-3}D^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha D^{m-1}.\alpha^{-1}) \\ (19)\ldots \quad & + \varphi(2).(\alpha_{r-3}D^{m-r+1}.\alpha^{-1} + \alpha_{r-4}D^{m-r+2}.\alpha^{-1} + \text{etc.} + \alpha D^{m-2}.\alpha^{-1}) \\ & + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi(r-1).\alpha D^{m-r+1}.\alpha^{-1}\,;\end{aligned}$$

où m est la variable dans $\varphi(m)$, à la place de laquelle on peut mettre x si l'on veut : et cette formule est l'intégrale d'une équation linéaire aux différences (finies) d'un ordre quelconque, à coëfficiens constans ; $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, etc. $\varphi(r-1)$ sont les r constantes arbitraires. En faisant $\varphi(m) = A_m$, cette formule coïncide avec (13) du n.° 206 pour le terme général d'une série récurrente d'un ordre quelconque.

La formule (17) s'accorde avec celle (B) que Laplace a trouvée au n.° v de son mémoire sur les suites, cité ci-dessus. Notre analyse est différente à quelques égards, et l'usage que nous y faisons des dérivations rend les notations plus expressives et les développemens plus faciles.

467. On a l'expression $au + b\mathrm{E}u + c\mathrm{E}^2u + d\mathrm{E}^3u = \mathrm{H}u$ sous la forme

$$a'u + b'\Delta u + c'\Delta^2 u + d'\Delta^3 u = \nabla u, \qquad \ldots(20)$$

∇ étant une caractéristique ; et l'on demande $\mathrm{E}^m u$ par une suite en ∇u, $\nabla^2 u$, $\nabla^3 u$, etc., dans laquelle E n'entre pas, mais Δ, Δ^2, Δ^3, etc.

Ce cas se ramène à celui du n.° 464, de la manière suivante. Puisque l'on a ici ∇u égale à $\mathrm{H}u$, l'expression ∇u étant ordonnée suivant Δu, $\Delta^2 u$, etc., tandis que $\mathrm{H}u$ l'est suivant $\mathrm{E}u$, $\mathrm{E}^2 u$, etc. ; en détachant les échelles et mettant $\mathrm{E}-1$ au lieu de Δ, on aura

$$a' + b'(\mathrm{E}-1) + c'(\mathrm{E}-1)^2 + d'(\mathrm{E}-1)^3 = \nabla = \mathrm{H}; \qquad \ldots(21)$$

et, puisque pour déduire $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ de $\alpha\mathrm{E}^3 + \beta\mathrm{E}^2 + \gamma\mathrm{E} + \delta$, il suffit de mettre x^{-1} au lieu de E et de tout multiplier par x^3 ; on mettra x^{-1} à la place de E dans (21), on multipliera par x^3, et l'on aura

$$a'x^3 + b'(1-x)x^2 + c'(1-x)^2x + d'(1-x)^3 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3. \quad \ldots(22)$$

En ordonnant le premier membre suivant les puissances de x, on aura facilement les valeurs de α, β, γ, δ en a', b', c', d', et réciproquement.

Je reprends l'équation (5) du n.° 464, et j'en mets le numérateur sous la forme $A'(1-x)^2 + B'(1-x)x + C'x^2$, et au lieu de E je mets sa valeur $1 + \Delta$. J'ai d'abord, en ordonnant suivant x,

$A' +$

$$A^{\text{I}} + (B^{\text{I}} - 2A^{\text{I}})x + (C^{\text{I}} - B^{\text{I}} + A^{\text{I}})x^2 =$$
$$\alpha + x\{\beta + \alpha + \alpha\Delta\} + x^2\{\gamma + \beta + \alpha + (\beta + 2\alpha)\Delta + \alpha\Delta^2\}.$$

D'où, en comparant les termes, on tire

$$A^{\text{I}} = \alpha, \quad B^{\text{I}} = \beta + 3\alpha + \alpha\Delta, \quad C^{\text{I}} = \gamma + 2\beta + 3\alpha + (\beta + 3\alpha)\Delta + \alpha\Delta^2;$$

et, en mettant d^{I}, c^{I}, b^{I} au lieu de leurs valeurs tirées de l'équation (22), le numérateur sera

$$(1-x)^2 d^{\text{I}} + (1-x)x\{c^{\text{I}} + d^{\text{I}}\Delta\} + x^2\{b^{\text{I}} + c^{\text{I}}\Delta + d^{\text{I}}\Delta^2\};$$

et le premier membre de l'équation (5) du n.° 464 deviendra

$$\left\{\begin{matrix}(1-x)^2 d^{\text{I}} + (1-x)x(c^{\text{I}} + d^{\text{I}}\Delta) \\ + x^2(b^{\text{I}} + c^{\text{I}}\Delta + d^{\text{I}}\Delta^2)\end{matrix}\right\}\{V^{-1} + V^{-2}x^3\nabla + V^{-3}x^{2.3}\nabla^2 + \text{etc.}\}.$$

Il ne s'agit plus que d'avoir le coëfficient de x^m. Or, ce coëfficient dans $(1-x)^2 V^{-1}$ est $\mathfrak{p}^m.\alpha^{-1} - 2\mathfrak{p}^{m-1}.\alpha^{-1} + \mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1} = \Delta^2\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1}$, m étant ici la variable par rapport à Δ, et $\Delta m = 1$. Le même coëfficient dans $(1-x)xV^{-1}$ est $\mathfrak{p}^{m-1}.\alpha^{-1} - \mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1} = \Delta\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1}$; dans $(1-x)^2 V^{-2}x^3$, il est $\Delta^2\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2}$, et ainsi des autres. On formera donc facilement la valeur de E^m, qui est le coëfficient de x^m dans le second membre de l'équation (5); et en multipliant par u, on aura, pour l'expression cherchée,

$$\begin{aligned}
\text{E}^m u = u_m = \ & \{b^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1} + c^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1} + d^{\text{I}}\Delta^2\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1}\}.u \\
& + \{b^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2} + c^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2} + d^{\text{I}}\Delta^2\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2}\}.\nabla u \\
& + \{b^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-8}.\alpha^{-3} + c^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-8}.\alpha^{-3} + d^{\text{I}}\Delta^2\mathfrak{p}^{m-8}.\alpha^{-3}\}.\nabla^2 u \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \{c^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1} + d^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1}\}.\Delta u \\
& + \{c^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2} + d^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2}\}.\Delta\nabla u \qquad \ldots(23) \\
& + \{c^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-8}.\alpha^{-3} + d^{\text{I}}\Delta\mathfrak{p}^{m-8}\alpha^{-3}\}.\Delta\nabla^2 u \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + d^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-2}.\alpha^{-1}.\Delta^2 u \\
& + d^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-5}.\alpha^{-2}.\Delta^2\nabla u \\
& + d^{\text{I}}\mathfrak{p}^{m-8}.\alpha^{-3}.\Delta^2\nabla^2 u \\
& + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec la formule que trouve LAPLACE à la fin du n.° VII du mémoire cité. LAPLACE a déduit de ses solutions plusieurs conséquences importantes, pour lesquelles nous renvoyons à son mémoire.

468. En partant des formules sur les séries doubles, triples, répandues

dans cet ouvrage, on peut étendre aux suites doubles, triples, les applications que nous avons faites aux suites simples depuis le n.° 458; et, en associant à ces mêmes formules les théorèmes du n.° 445, on peut donner aux résultats différentes formes, parmi lesquelles on pourra choisir celle qui sera la plus convenable aux recherches qu'on se propose de faire.

En général, les principes que nous avons établis relativement aux échelles conduisent à généraliser plusieurs des théorèmes que nous avons trouvés sur les séries ordonnées suivant les dimensions d'une ou de plusieurs lettres, pourvu qu'il soit possible de détacher les échelles; car, si l'on avoit, par exemple, $\phi(\alpha u + \mathcal{E}u_1 + \gamma u_2 + \text{etc.})$, il est aisé de voir, par le n.° 407, que cette expression n'est pas égale à $\phi(\alpha + \mathcal{E}\text{E} + \gamma \text{E}^2 + \text{etc.}) \times u$: ainsi il n'est pas toujours possible de séparer l'échelle.

469. Voici encore un théorème qui donne des transformations utiles dans plusieurs rencontres.

Théorème. a, b, c, d, e, etc. étant des quantités quelconques, si l'on fait $\Delta a = b - a$, $\Delta^2 a = c - 2b + a$, $\Delta^3 a = d - 3c + 3b - a$, etc.; on aura, ϕ étant une fonction quelconque,

$$a\phi\alpha + b\text{D}.\phi\alpha.x + c\text{D}^2.\phi\alpha.x^2 + d\text{D}^3.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} = \quad \ldots(1)$$
$$a\phi(\alpha + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \text{etc.}) + x\Delta a.\text{D}.\phi(\alpha + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$
$$+ x^2\Delta^2 a.\text{D}^2.\phi(\alpha + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \text{etc.}) + x^3\Delta^3 a.\text{D}^3.\phi(\alpha + \mathcal{E}x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de développer le second membre, lequel, en ordonnant suivant x, devient

$$\begin{aligned} a\phi\alpha &+ a\text{D}.\phi\alpha.x + a\text{D}^2.\phi\alpha.x^2 + a\text{D}^3.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} \\ &+ \Delta a.\text{D}.\phi\alpha.x + \Delta a.\text{D}.\text{D}.\phi\alpha.x^2 + \Delta a.\text{D}.\text{D}^2.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} \\ &+ \Delta^2 a.\text{D}^2.\phi\alpha.x^2 + \Delta^2 a.\text{D}^2.\text{D}.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} \\ &+ \Delta^3 a.\text{D}^3.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, à cause de $a + \Delta a = b$, $a + 2\Delta a + \Delta^2 a = c$, $a + 3\Delta a + 3\Delta^2 a + \Delta^3 a = d$, etc.; il est évident que ce développement se réduit à

$$a\phi\alpha + b\text{D}.\phi\alpha.x + c\text{D}^2.\phi\alpha.x^2 + d\text{D}^3.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.}$$

470. COROLLAIRE. Par le n.° 369 la formule précédente (1) devient aussi

$$a\phi\alpha + b\mathfrak{D}.\phi\alpha.x + c\mathfrak{D}^2.\phi\alpha.x^2 + d\mathfrak{D}^3.\phi\alpha.x^3 + \text{etc.} = \quad \ldots(2)$$

$$a\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}) + x\Delta a.\partial.\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$

$$+ x^2\Delta^2 a.\partial^2.\phi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.}) + x^3\Delta^3 a.\partial^3.\phi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.}) + \text{etc.},$$

où ∂ n'affecte que x, qui varie de la constante dx.

471. EXEMPLES. Supposons que $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}$ se réduise à un binome : soit, par exemple, $\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}) = (\alpha + \beta x)^m$; on aura par la formule (2)

$$a\alpha^m + b.m\alpha^{m-1}\beta x + c.\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\alpha^{m-2}\beta^2x^2 + d.\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\alpha^{m-3}\beta^3x^3 + \text{etc.}$$

$$= a(\alpha + \beta x)^m + \Delta a.m(\alpha + \beta x)^{m-1}\beta x + \Delta^2 a.\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(\alpha + \beta x)^{m-2}\beta^2x^2$$

$$+ \Delta^3 a.\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(\alpha + \beta x)^{m-3}\beta^3x^3 + \text{etc.} \quad \ldots(3)$$

De là on tire, en faisant $m = -1$, $\alpha + \beta x = 1 - x$,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.} = \quad \ldots(4)$$

$$\frac{a}{1-x} + \frac{\Delta a.x}{(1-x)^2} + \frac{\Delta^2 a.x^2}{(1-x)^3} + \frac{\Delta^3 a.x^3}{(1-x)^4} + \text{etc.};$$

et si l'on fait $x = + z^n$, $(\alpha + \beta x)^m = (1 + z^n)^{-1}$, et qu'après le développement on multiplie tout par z^r, on aura

$$az^r - bz^{r+n} + cz^{r+2n} - dz^{r+3n} + \text{etc.} = \quad \ldots(5)$$

$$\frac{z^r}{1+z^n}\left\{a - \Delta a.\frac{z^n}{1+z^n} + \Delta^2 a.\frac{z^{2n}}{(1+z^n)^2} - \Delta^3 a.\frac{z^{3n}}{(1+z^n)^3} + \text{etc.}\right\}.$$

De là on tire, par exemple,

$$\log(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - \text{etc.} = \quad \ldots(6)$$

$$\frac{z}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{(1+z)^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{(1+z)^3} + \frac{1}{4}\frac{z^4}{(1+z)^4} + \text{etc.}$$

Si dans (3) on suppose $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $x = 1$, $a = 1$, $b = \frac{p+t}{t}$, $c = \frac{(p+t)(p+t+r)}{t(t+r)}$, $d = \frac{(p+t)(p+t+r)(p+t+2r)}{t(t+r)(t+2r)}$, etc.; on aura $\Delta a = \frac{p}{t}$, $\Delta^2 a = \frac{p(p-r)}{t(t+r)}$, $\Delta^3 a = \frac{p(p-r)(p-2r)}{t(t+r)(t+2r)}$, etc. Donc la formule (3) donne, dans le cas de m entier positif,

$$1-\frac{p+t}{t}m+\frac{(p+t)(p+t+r)}{t(t+r)}\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}-\frac{(p+t)\ldots(p+t+2r)}{t(t+r)(t+2r)}\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$+\text{etc.}=(1-1)^m-\frac{p}{t}m(1-1)^{m-1}+\frac{p(p-r)}{t(t+r)}\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(1-1)^{m-2}+\text{etc.}$$

$$=\pm\frac{p(p-r)(p-2r)\ldots(p-mr+r)}{t(t+r)(t+2r)\ldots(t+mr-r)};\qquad\ldots(7)$$

car tous les termes du second membre, le dernier excepté, disparoissent, parce qu'ils sont multipliés chacun par $1-1=0$.

On peut consulter, sur l'usage des transformations (4) et (5), le chapitre 1.er de la seconde partie du calcul différentiel d'Euler; et l'on voit combien d'autres formules particulières du même genre on peut tirer de notre théorème.

---

472. Nous nous proposions d'ajouter des applications du calcul des dérivations aux fractions continues, aux éliminations des inconnues dans les équations, et à d'autres objets; et de présenter des réflexions sur les opérations analytiques considérées en général. Mais cet ouvrage passe déjà les bornes que nous nous étions prescrites, quoique nous ayons supprimé beaucoup de détails et d'exemples qui auroient pu faire ressortir l'utilité de nos méthodes et de nos formules; et nous nous voyons forcés de remettre à d'autres occasions la publication de ce que nous avions préparé sur les sujets dont nous venons de parler. Nous sommes bien éloignés de penser que nous ayons parcouru tout le champ d'applications et de recherches qu'ouvrent les méthodes de dérivations; et il nous paroît que ce n'est pas trop présumer de ces méthodes que de dire avec Newton : *Et his via ad majora sternitur.*

FIN.

